

열린 균열이 있는 보의 효율적 모델링

An efficient modeling method for open cracked beam structures

김만달*·최성환**·홍성욱***·이종원****

M.D. Kim, S.H. Choi, S.W. Hong and C.W. Lee

Key Words : Open crack(열린 균열), Finite element method(유한 요소법), beam(보), Exact dynamic element(엄밀한 동적 요소), Natural frequency(고유진동수), Modal testing(모드 시험)

ABSTRACT

This paper presents an efficient modeling method for open cracked beam structures. An equivalent bending spring model is introduced to represent the structural weakening effect in the presence of open cracks. The proposed method adopts the exact dynamic element method (EDEM) to avoid the difficulty and numerical errors in association with re-meshing the structure. The proposed method is rigorously compared with a commercial finite element code. Experiments are also performed to validate the proposed modeling method. Finally, a diagnostic scheme for open cracked beam structures is proposed and demonstrated through a numerical example.

1. 서론

균열은 시간에 따라 점차 진전되면서 결국 구조물의 파괴를 일으키는 매우 위험한 결함이다. 따라서 균열을 조기에 진단하는 것은 구조물의 안전성을 확보하는데 핵심적인 일이 되고 있다. 일반적으로 구조물에 균열이 발생하게 되면 균열 부위에서의 응력집중으로 인해 상대적으로 큰 변형을 일으키게 되며 해당 부위에 큰 강성의 변화를 일으키게 되는 것으로 알려져 있다. 따라서 균열의 발생은 궁극적으로 구조물의 동특성에 큰 영향을 미치게 된다. 이와 같이 균열의 발생에 따른 동적 변화를 이용하여 구조물을 훼손하지 않는 비파괴적 방법으로 균열을 진단하기 위해 많은 연구가 있어 왔다⁽¹⁻¹¹⁾.

동특성 검사에 의한 균열의 진단을 위해서는 균열 현상에 대한 적절한 모델링과 동시에 전체 구조물에 미치는 영향에 관한 연구가 선행되어야 한다. 근래 균열에 대한 모델링 및 이를 이용한 진단 방법에 대한 많은 연구가 수행되어 왔으며 특히 보 구조물을 중심으로 파괴역학의 개념을 도입하여 균열의 진행에 따른 구조 강성의 변화를 표현하려는 노력이 있어 왔다. 본 연구에서는 균열의 위치와 크기를 알아내는데 보다 효과적인 모델링 방법을 제시하였다. 균열이 있는 구조물의 모델링 및 해석에 많이 활용되고 있는 기존의 모델링 방법, 예컨대, 유한요소방법 등의 이산화 방

법에서는 균열의 위치에 따라 메쉬를 다시 해야하므로 이에 따른 모델링 오차가 개입됨으로서 그 특성을 파악하기 쉽지 않다. 특히, 균열에 의한 변화를 정확히 진단하기 위해서는 미소한 균열에 의한 효과를 적절히 파악하는 것이 매우 중요하므로 모델링 오차를 최소화할 필요가 있다.

본 연구에서는 열린 균열을 동일 단면을 갖는 보의 접합부에서 각변위에 대한 스프링으로 모형화하고 이를 엄밀한 동적 요소 모델링 방법에 적용함으로써 손쉽게 모델링할 수 있도록 하였다. 먼저, 이를 위해 열린 균열에 의해 발생하는 강성 약화 효과를 굽힘 각변위 스프링으로 모형화하는 방법에 대해 기술하였다. 또한 이와 같은 스프링을 포함하는 엄밀한 동적 요소 모델링 방법을 제안하였다. 그리고 제시한 방법의 적정성을 확인하기 위해 균열이 있는 보를 상용 유한요소 코드를 이용한 정밀 분석 결과와 제안된 스프링 모형에 의한 결과와 비교하였다. 또한 간단한 보 구조물에 대한 실험을 통해 제안된 모델링 방법의 적합성을 검증하였다. 한편, 수치예제를 통해 제안된 모델링 방법을 이용하여 균열의 깊이 및 위치에 따른 변화를 분석하였으며 그 결과로부터 균열의 존재를 진단하는 방법을 제안하였다.

2. 열린 균열이 있는 보의 모델링

2.1 티모센코 보 이론에 의한 보의 모델링

전단변형과 회전관성을 고려한 보 모델인 티모센코 보의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.⁽¹²⁾

* 금오공과대학교 대학원
E-mail : kmdtg@kumoh.ac.kr
Tel : (054) 467-4219, Fax : (054) 467-4472

** 금오공과대학교 대학원, 삼성탈레스

*** 금오공과대학교 기계공학부

**** 한국과학기술원

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \phi - \frac{f}{kAG} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{m}{EI_d} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial m}{\partial x} &= f + \rho I_d \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, u, ϕ 는 각각 보의 횡 변위 및 회전 변위이고 f, m 은 전단력 및 모멘트를 나타낸다. 또, ρ, G, E 는 보의 물성치로서 각각 밀도, 전단 강성 계수(Shear modulus), 영율(Young's modulus)을 의미하며, A 는 단면적, k 는 단면 보정계수(Shape factor)이다. 또, I_d 는 직경방향 단면 관성 모멘트(Diametral area moment of inertia)를 의미한다.

2.2 균열 효과의 모델링

Fig.1(a)와 같이 보의 특정 부위에 열린 균열이 있는 경우, 균열 부위를 기준으로 Fig. 1(b)와 같이 좌우로 구분하였을 때 다음과 같은 조건이 성립한다고 가정한다.

$$\begin{aligned} u_R &= u_L \\ f_R &= f_L \\ m_R &= m_L \end{aligned} \quad (2)$$

그러나 각변위에 대해 다음과 같은 관계를 갖는다.

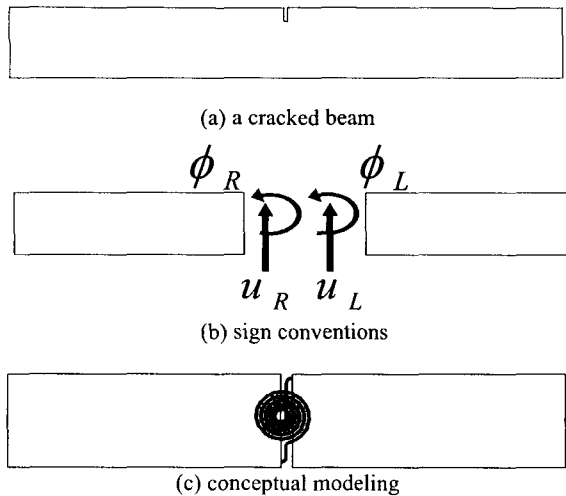


Fig. 1 Modeling of cracked beam structure

$$\Delta \phi = u'_L - u'_R = \frac{1}{k_\theta} M = \frac{h}{EI} R(q)M \quad (3)$$

여기서 e 를 크랙의 깊이, h 를 보의 높이라고 할 때, 무차원 균열깊이 변수 $q = e/h$ 로 정의되며 응력집중에 의한 강성 보정 계수 함수는 다음과 같이 표현된다.^(2,3)

$$\begin{aligned} R(q) &= 2\left(\frac{q}{1-q}\right)^2 \{5.93 - 19.69q + 37.14q^2 \\ &\quad - 35.84q^3 + 13.12q^4\} \end{aligned} \quad (4)$$

또 E 와 I 는 각각 Young 계수 및 단면관성모멘트를 나타낸다. 따라서 크랙에 의한 각변위 강성 계수는 다음과 같이 모델링을 할 수 있다.

$$k_\theta = \frac{EI}{hR(q)} = \frac{Ebh^2}{12R(q)} \quad (5)$$

2.3 엄밀한 동적 요소에 의한 균열 있는 보의 모델링

균열 부위를 기준으로 두 개의 요소로 구분한 후 각각의 요소를 엄밀한 동적 요소 모델링 방법에 의해 표현하면 다음과 같다.⁽¹²⁾

$$\begin{Bmatrix} f_1^* \\ m_1^* \\ f^*(\xi) \\ m^*(\xi) \end{Bmatrix} = D^b(s, \xi) \begin{Bmatrix} u_1^* \\ \phi_1^* \\ u^*(\xi) \\ \phi^*(\xi) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned} D^b(s, \xi) &= \begin{bmatrix} D_{11}(s, \xi) & D_{12}(s, \xi) \\ D_{21}(s, \xi) & D_{22}(s, \xi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_1(s, \xi) & d_2(s, \xi) & d_4(s, \xi) & d_5(s, \xi) \\ d_2(s, \xi) & d_3(s, \xi) & -d_5(s, \xi) & d_6(s, \xi) \\ d_4(s, \xi) - d_5(s, \xi) & d_1(s, \xi) - d_2(s, \xi) \\ d_5(s, \xi) & d_6(s, \xi) - d_2(s, \xi) & d_3(s, \xi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

이때,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{2b(1 - \cosh \alpha \xi \cosh \beta \xi) \\ &\quad + \frac{\alpha \beta}{c} \{\mu^2 + \nu^2\} \sinh \alpha \xi \sinh \beta \xi\} \end{aligned}$$

$$d_1 = \frac{1}{\Delta} \{-\mu \sinh \alpha \xi \cosh \beta \xi + \nu \sinh \beta \xi \cosh \alpha \xi\}$$

$$d_2 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{(\beta\mu + \alpha\nu)}{\alpha^2 - \beta^2} \sinh \alpha\xi \sinh \beta\xi - \frac{ab - cd}{\alpha^2 - \beta^2} (1 - \cosh \alpha\xi \cosh \beta\xi) \right\}$$

$$d_3 = \frac{1}{\Delta} \frac{\alpha\beta}{bc} \{ \nu \sinh \alpha\xi \cosh \beta\xi - \mu \sinh \beta\xi \cosh \alpha\xi \}$$

$$d_4 = \frac{1}{\Delta} \{ \mu \sinh \alpha\xi - \nu \sinh \beta\xi \}$$

$$d_5 = \frac{1}{\Delta} \{ \cosh \alpha\xi - \cosh \beta\xi \}$$

$$d_6 = \frac{1}{\Delta} \frac{\alpha\beta}{bc} \{ -\nu \sinh \alpha\xi + \mu \sinh \beta\xi \}$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) + \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) - \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \}$$

$$\mu = \frac{(cd - \alpha^2)}{\alpha}, \nu = \frac{(cd - \beta^2)}{\beta}$$

$$a = \rho I s^2, b = \frac{1}{EI}, c = \rho A s^2, d = \frac{1}{kAG}$$

한편, 이미 설명한 바와 같이 균일하지 않은 두 개의 보가 결합되어 있는 구조에서는 결합부에서의 각에 대한 불연속성이 존재하게 된다. 그러나 변위에서는 연속성이 유지되므로 부재간의 결합부에서 각에 관한 1 개의 자유도가 추가된다. 즉 부재 1의 우측 단의 절점변위와 부재 2의 좌측 단 절점변위가 동일하게 되나 각변위는 각각 독립적인 자유도가 됨으로서 두 요소간의 조합은 Fig. 1(c)로부터 다음과 같이 이루어지게 된다.

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \\ m_3 \\ f_4 \\ m_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A & A & A & 0 & 0 & 0 \\ A & A & A & A & 0 & 0 & 0 \\ A & A & A+B & A & B & B & B \\ A & A & A & A+k_0 & -k_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & -k_0 & B+k_0 & B & B \\ 0 & 0 & B & 0 & B & B & B \\ 0 & 0 & B & 0 & B & B & B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \phi_1 \\ \mu_2 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \mu_4 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서 A와 B는 각각 좌측과 우측 보에 관한 요소를 의미한다.

3. 열린 균열이 있는 보 모델의 검증

3.1 수치 실험

먼저 제안된 모델링 방법의 타당성을 검증하기 위하여 단순 균일 보에 대해 균열이 존재하는 경우의 고유진동수 변화를 분석하였다. 고려한 보는

Table 1 Specification of the numerical model

Property	Data
Dimension	L ₁ =L ₂ =25cm b=2 h=5cm
Young's Modulus	2.08x10 ¹¹ N/m ²
Density	7833 kg/m ³
Poisson Ratio	0.3

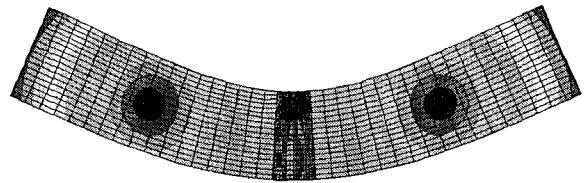


Fig. 2. Typical result of finite element analysis for the uniform beam model with a crack at the mid span

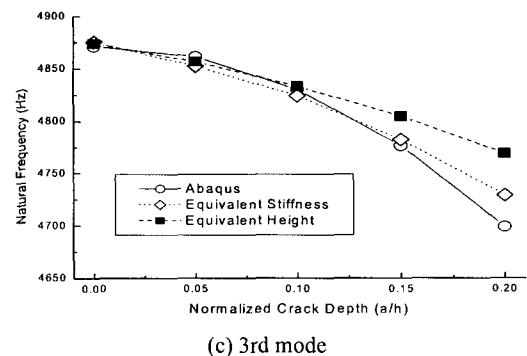
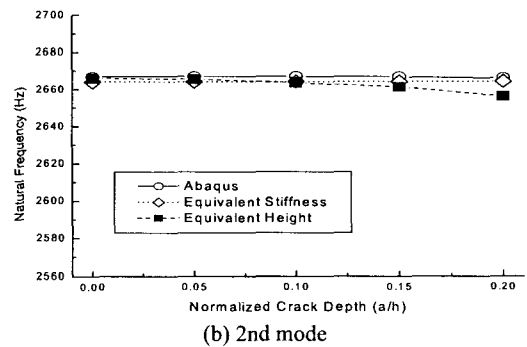
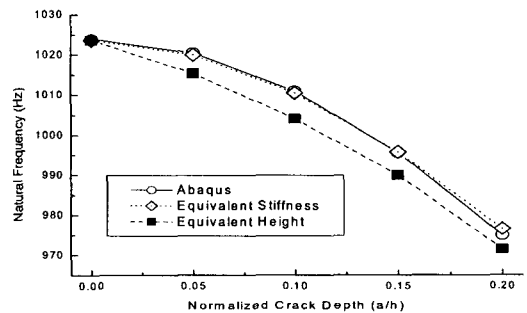


Fig. 3 Natural frequency of a uniform beam model (numerical model) by ABAQUS, the equivalent stiffness model (proposed model) and the equivalent height model

Fig. 1(a)와 같고, 그 사양은 Table 1에 주어진 바와 같다. 먼저, 균열이 있는 보에 대해 일반적인 상용 코드인 ABAQUS⁽¹³⁾를 이용하여 정밀한 모델링을 하여 고유진동수를 계산하였다. Fig. 2는 유한 요소 모델에 의한 계산결과의 예를 보여주고 있다. 여기서는 Hexahedral 요소, 즉 요소당 16 node를 갖는 6면체형 요소를 이용하였고, 요소의 수는 약 12,000개를 적용하여 충분한 정밀도를 확보할 수 있도록 하였다. 이와 같이 계산된 고유진동수를 기준으로 두고 제안된 방법에 의해 고유진동수를 계산한 결과와 비교하였다. 제안된 방법의 정확성을 비교하기 위해 균열에 의한 효과를 보의 높이(h)의 변화로 바꾸어 모델링하는 방법⁽⁷⁾에 의한 계산결과도 동시에 비교하였다.

Fig. 3에는 세 방법에 의한 고유진동수 계산 결과를 비교해서 보여주고 있다. 결과에서 알 수 있는 바와 같이 3가지 방법에 의한 결과들의 경향이 대체로 일치하고 있다. 그 중에서도 제안된 방법과 ABAQUS에 의한 계산 결과가 제시된 3개 모드에서 모두 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다. 특히, 보의 높이 변화 방식으로 균열을 모델링하는 방법에 비해 월등히 좋은 결과를 보여주고 있다. 한편, 2차 모드에서 제안된 방법에서는 고유진동수의 변화가 없는 것으로 나타나고 있으나 ABAQUS에 의한 결과에서는 약간의 변화가 관측되고 있는 것을 볼 수 있다. 균열이 보의 중앙에 위치하므로 순수 2차 굽힘 모드에서의 균열의 효과는 거의 없을 것으로 추정되는데, ABAQUS 모델에서는 중방향 자유도를 포함하므로 약간씩 고유진동수가 감소하는 특성을 보이고 있다. 그러나 그 효과는 미미한 수준이므로 제안된 방법으로 충분히 정확한 모델링이 가능할 것으로 사료된다.

3.2 실험

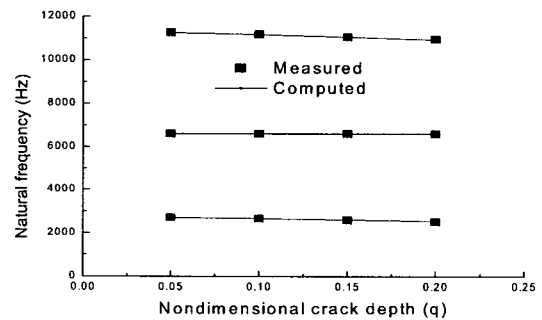
제안된 모델의 타당성을 확인하기 위하여 두 가지의 실험을 실시하였다. 먼저 균일한 보의 중앙에 서로 다른 깊이의 균열을 발생시킨 후 고유진동수를 측정하고 이를 제안된 방법으로 계산한 결과와 비교하였다. 실험에 사용된 시편은 길이가 30cm로서 중앙에 2mm의 폭으로 열린 균열을 발생시켰다. Fig. 4는 실험에 의해 얻어진 고유진동수와 제안된 방법으로 계산한 결과를 비교해서 보여주고 있다. 3개의 모드에 대해 모두 매우 뛰어난 상관성을 보이고 있음을 알 수 있다. 1차 모드의 경우 균열 깊이의 증가에 따라 오차가 조금씩 증가하고는 있으나 모두 0.8% 미만의 오차를 보이고 있어 실제 모델을 정확히 표현하고 있

음을 알 수 있다.

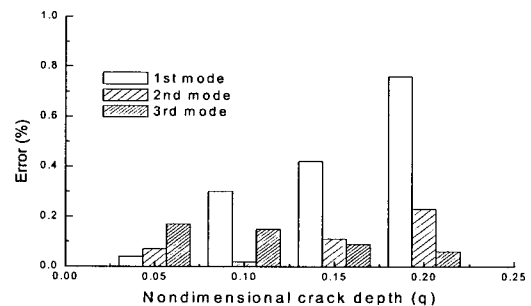
두 번째 실험으로는 Fig. 5와 같이 서로 다른 깊이를 갖는 두 개의 균열이 보에 존재하는 시편에 대해 고유진동수를 측정하였고 이를 제안된 방법으로 계산한 결과와 비교하였다. 참조를 위해 ABAQUS를 이용한 계산도 병행하였다. Table 2는 계산 결과를 보여주고 있다. 결과에서 볼 수 있는 바와 같이 균열이 한 개 이상이 존재하는 경우에도 제안된 방법에 의해 균열 효과를 높은 정밀도로 예측할 수 있음을 확인할 수 있다.

Table 2. Comparison of natural frequency of experimental model 2

Mode	Natural frequency (Hz)			Error(%) E-P /E x100
	E Experiment	A ABAQUS	P Proposed	
1	919	910	920	0.11
2	2470	2447	2462	0.32
3	4775	4727	4758	0.36



(a) first three natural frequencies



(b) errors of computed natural frequencies

Fig. 4 Comparison of measured and computed natural frequency with the crack depth changed (experiments)

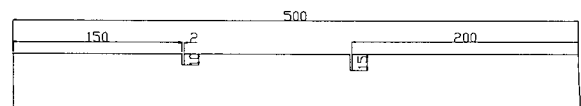


Fig. 5 Experimental model 2: a uniform beam with two cracks

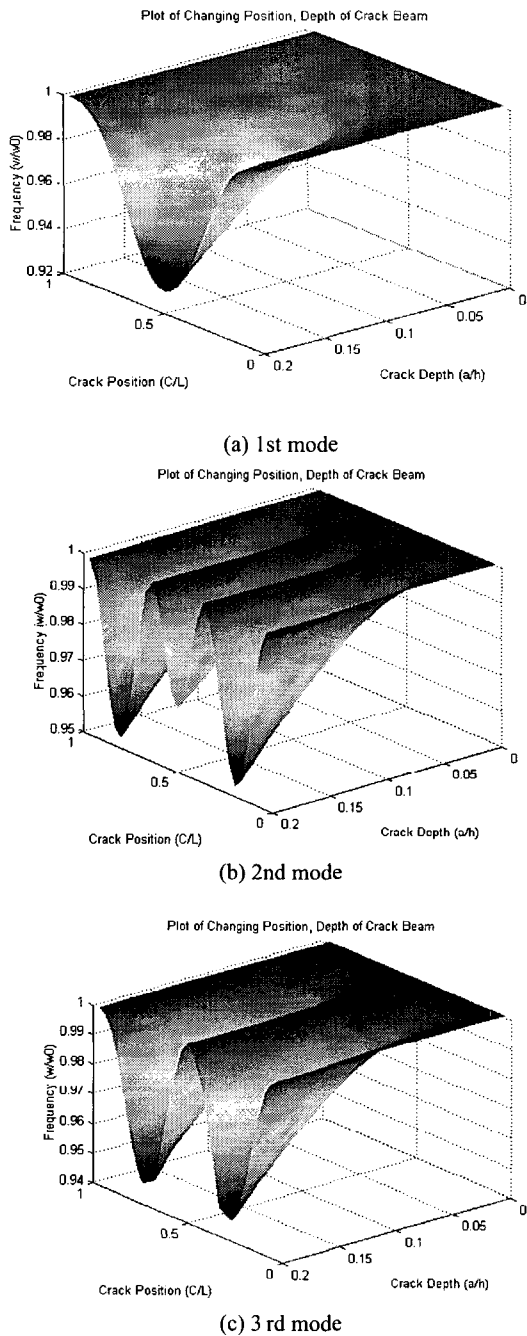


Fig. 6 Variation of natural frequencies due to a crack: the effect of depth and position

4. 수치 예제

앞서 기술한 균열 효과에 대한 모델링과 검증 과정을 통해, 제안된 방법을 사용하면 균열이 있는 보에 대한 정밀한 해석이 가능함을 확인하였다. 본 절에서는 제안된 방법의 응용 관점에서 수치예제를 제시하고자 한다.

균열 효과에 대한 모델링은 균열의 진단에 직접적인 활용이 가능하다. 균열 모델을 균열 진단에 활용하는 예를 보이기 위해 간단한 보에서 균열의 크기와 위치에 따른 효과를 분석하였다. 앞서 균열 모델을 검증하기 위해 활용하였던 Fig. 1(a), Table 1의 수치모델에 대해 균열의 위치와 크기가 변할 때의 고유진동수 변화를 Fig. 6에 보여주고 있다. 본 연구에서 제시한 모델링 방법에서는 엄밀한 동적 요소 모델링 방법을 사용하고 있으므로 균열의 위치가 바뀌어도 메쉬를 다시할 필요가 없고, 균열의 위치를 기준으로 구분되는 보의 좌, 우측 요소의 길이에 관한 데이터만 교체하면 된다. 따라서 매우 효과적이고도 정확한 계산을 할 수 있다. 균열이 1개 존재한다고 가정하고 그 균열의 크기와 위치를 찾는 것은 2개의 고유진동수에 대한 변화를 관찰함으로써 가능하다. 예컨대 1,2 차모드를 측정했다고 가정하면 Fig. 6의 (a),(b)로부터 얻어지는 Fig. 7의 등고선에서 해당 고유진동수의 변화에 대응되는 선의 교차점을 확인함으로써 균열의 크기와 위치를 확인할 수 있다. Fig. 8은 그 한 예를 보여주고 있다. 본 예제의 경우에는 좌우 대칭인 보이므로 동일한 결과를 주는 균열의 위치가 두 개 존재하게 된다.

5. 요약 및 결론

본 연구에서는 열린 균열을 있는 보 구조물에 대한 동적 모델링 방법을 제시하였다. 열린 균열에 의한 강성 저하 효과를 고려하기 위해 균열 부위를 경계로 발생되는 각변위 차이에 대한 굽힘 스프링으로 모델링하였으며 균열 부위의 위치 변화에 대해 보다 효과적으로 대처할 수 있는 엄밀한 동적 요소 모델링 방법을 도입하였다. 제안된 모델링 방법의 타당성을 검증하기 위해 상용 유한요소 프로그램을 이용한 정밀한 모델과 제안된 방법으로 얻어진 간편한 모델의 결과를 비교하였으며 매우 우수한 상관성을 얻을 수 있다. 또한 실제 균열이 있는 보에 대해 실행된 실험과 제안된 방법에 의한 얻어진 고유진동수를 비교한 결과를 매우 정확한 예측이 가능함을 확인하였다. 제안된 모델링 방법의 응용 관점에서 균열의 크기 및 위치에 따른 고유진동수 변화에 관한 등고선을 구했으며 이를 근거로 한 균열의 크기 및 위치를 규명하는 2가지 수치 예를 제시하였다. 본 연구에서 제안한 모델링 방법은 균열이 있는 보의 동특성에 대한 정밀한 예측이 가능하도록 함으로써 궁극적으로 균열이 있는 보 구조물에 대한 효과적인 진단에 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

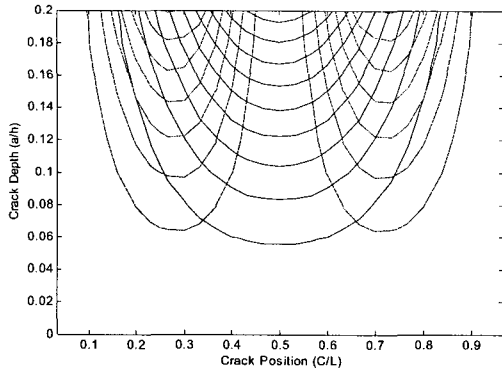


Fig. 7 Contour plot for first two modes with respect to crack depth and position

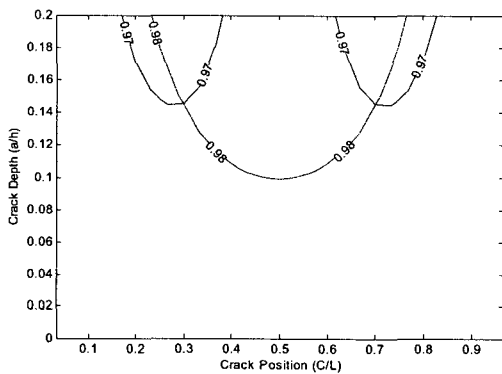


Fig. 8 Determination of the crack depth and position when the first two natural frequencies are shifted by 2,3%, respectively

후 기

본 연구는 국방과학연구소에서 지원하는 장기기초 연구(TECD-413-001115) 결과의 일부로서 관계자 여러분에게 감사드립니다.

- (1) Gounaris, G.D. and Papadopoudos, C.A., 1997, "Analytical and experimental crack identification of beam structures in air or in fluid," *Computer and Structures*, Vol.65, No.5, 633-639.
- (2) Tada, H., Paris, P. and Irwin, G. 1985, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 2nd ed., St. Louis, Research Cooperation.
- (3) Fernandez-Saez, J., Rubio, L., and Navarro, C., 1999, "Approximate calculation of the fundamental frequency for bending vibrations of cracked beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225, No.2, pp.345-352.
- (4) Hjelmstad, K.D. and Shin, S., 1996, "Crack identification in a cantilever beam from modal response," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.198, No.5, 527-545.
- (5) Boltezar, M., Strancar, B. and Kuhelj, A., 1998, "Identification of transverse crack location in flexural vibration of free-free beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.211, No.5, 729-734.
- (6) Zheng, D.Y. and Fan, S.C., 2001, "Natural frequency changes of a cracked Timoshenko beam by modified Fourier series," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.246, No.2, pp.297-317.
- (7) Yang, X.F., Swamidias, A.S.J. and Seshadri, R., 2001, "Crack identification in vibrating beams using the energy method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.244, No.2, pp.339-357.
- (8) Viola, E., Federici, L. and Nobile, L., 2001, "Detection of crack location using cracked beam element method for structural analysis," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol.36, 23-35.
- (9) Chinchalkar, S., 2001, "Determination of crack location in beams using natural frequencies," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.247, No.3, 417-429.
- (10) Dimarogonas, A.D., 1996, "Vibration of cracked structures: a state of the art review," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.55, pp.831-857.
- (11) Narayana, K. L. and Jebaraj, C., 1999, "Sensitivity analysis of local/global modal parameters for identification of a crack in a beam," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.228, No.5, 977-994.
- (12) 김종욱, 홍성욱, 1999, "엄밀한 동적 요소를 이용한 프레임 구조물의 동적 모델링 및 모드 해석," *한국소음진동공학회지*, 제 9 권 제 5 호, pp.966-974.
- (13) ABAQUS User's Manual Version 5.7, 1997, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. Leo, L. B., and Eric, E. U., 1992, *Noise and Vibration Control Engineering*, John Wiley & Sons, Inc., New York.