

FRF 누설오차 개선에 의한 전달함수 합성법의 향상

An Enhancement of Transfer Function Synthesis by Improving the Leakage Error of FRF

안세진*·정의봉**·김승엽*

Se Jin Ahn, Weui Bong Jeong and Seung Yup Kim

Key Words : Transfer Function Synthesis(TFS), Frequency Response Function(FRF), Leakage Error(누설오차), Impulse Response Function(충격응답함수)

ABSTRACT

The frequency response function(FRF) of each substructure is used for the transfer function synthesis method(TFS). The dynamic characteristics of the full system are obtained by synthesizing FRFs of each substructure. The validation of TFS depends on accuracy for FRF of each substructure. Impact hammer testing is widely used to obtain the modal characteristics of structures. However, the FRF obtained from impact hammer testing contains several errors, such as finite record length error and leakage error of which characteristic depends on data acquisition time which we call record length. In this paper, a method to remove these errors is proposed so as to enhance results of TFS. Numerical examples show that the FRF of full structure can be predicted exactly by the method proposed in this paper.

1. 서론

충격해머 실험은 구조물의 동특성을 파악하는데 비교적 간단하면서도 유익한 결과를 얻을 수 있기 때문에 널리 사용되고 있다. 그런데, 비주기적인 충격신호를 디지털 신호처리 하여 구한 충격 응답함수 스펙트럼은 신호획득시간의 길이에 따라 값이 달라지는 결점을 가지고 있다.⁽¹⁾ 그리고, 감쇠가 있는 신호와 같은 과도응답인 경우에는 주기 신호와는 달리 필연적으로 누설오차를 동반하게 되므로, 스펙트럼 상에서 피크가 나타나는 주파수에 대한 크기가 실제 신호의 진폭보다 작게 나타나게 된다. 각 부분구조에서 발생한 왜곡된 스펙트럼은 전달함수 합성시 오차가 더욱 커지게 되며, 왜곡된 주파수 응답 함수(Frequency Response Function, 이하 FRF)를 얻게 된다.⁽²⁾

본 논문에서는 보다 정확한 크기와 위상을 가지는 FRF를 구하는 방법을 소개하고, 이를 전달함수 합성법(Transfer Function Synthesis, 이하 TFS)에 적용하여 정확한 FRF를 구하고자 한다.

2. 전달함수 합성법의 구성

Fig. 1 과 같이 부분구조 A 와 부분구조 B가 강성 k 와 감쇠 c 로 연결되어있을 때, 결합전의 부분구조 A 에서 f 점 가진에 의한 결합점 i 의 응답을 $G_{if}^A = \frac{X_i^A}{F_f}$ 라 하고, 결합점 i 가진에 의한 결합

점 j 의 응답을 $G_{ji}^B = \frac{X_j^B}{R_i}$ 라 하고, 부분구조 B 에서 결합점 i 가진에 의한 결합점 j 의 응답을 $G_{ji}^B = \frac{X_j^B}{R_i}$ 라 하자.⁽³⁾ 결합점 i 에서 각 부분구조 A, B에서의 변위는 다음과 같다.

$$X_i^A = G_{if}^A F_f + \sum_{k=1}^n G_{ik}^A R_k \quad (1)$$

$$X_i^B = G_{il}^B R_l + \sum_{k=1}^n G_{ik}^B R_k \quad (2)$$

여기서, i 점에서의 반력 R_i 는 다음과 같다.

$$R_i = (K_i + j\omega c_i)(X_i^B - X_i^A) \quad (3)$$

식(3)을 매트릭스 형태로 나타내면, 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ k_1 + j\omega c_1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ & & & k_n + j\omega c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^B \\ X_2^B \\ \vdots \\ X_n^B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1^A \\ X_2^A \\ \vdots \\ X_n^A \end{bmatrix} \quad (4)$$

식(4)에서 반력을 구하여 결합후의 응답점 r 에서

* 정희원, 부산대학교 기계설계공학과 대학원

** 정희원, 부산대학교 기계공학부

E-mail : wbjeong@pusan.ac.kr

Tel : (051) 510-2337, Fax : (051) 517-3805

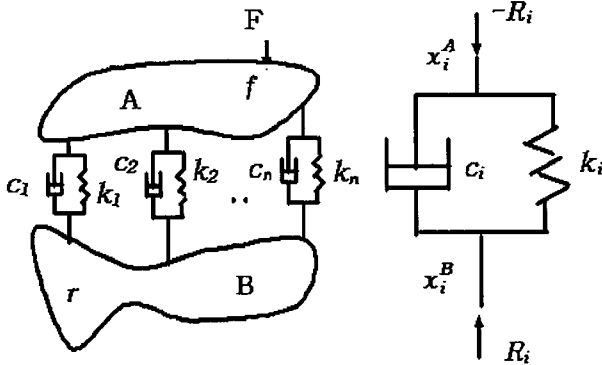


Fig. 1 A schematic model for TFS

의 변위 값은 식(5)와 같이 예측할 수 있다.

$$X_r^A = [G_{r1}^A \quad G_{r2}^A \quad \dots \quad G_{rn}^A] \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

3. 충격응답 스펙트럼의 오차

점성감쇠를 가진 진동계의 운동방정식은 Dirac delta 함수를 이용하면

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (6)$$

단, $f(t) = F_0 \delta(t)$

와 같고, 변위 응답은

$$x(t) = F_0 h(t) = F_0 \frac{e^{-\zeta\omega_d t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t, \quad t \geq 0 \quad (7)$$

와 같다. 여기서 $h(t)$ 는 단위충격응답함수이다. 식(7)과 $f(t)$ 를 푸리에 변환하면 다음과 같다.⁽¹⁾

$$\frac{X(j\omega)}{F_0} \Big|_{T>0} = \frac{1}{k - \omega^2 m + j\omega c} [1 - E(j\omega)]_T \quad (8)$$

여기서 유한획득시간오차 $E(j\omega)|_T$ 는

$$E(j\omega)|_T = e^{(-\zeta\omega_d - j\omega)T} \left\{ \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d T + \cos \omega_d T + j \frac{\omega}{\omega_d} \sin \omega_d T \right\} \quad (9)$$

이고 $\lim_{T \rightarrow \infty} E(j\omega)|_T = 0$ 임을 알 수 있으며 T 를 무한히 크게 하면 다음과 같은 이론식에 수렴하게 됨을 알 수 있다.

$$H(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X(\omega)|_T}{F(\omega)|_T} = \frac{1}{k - \omega^2 + j\omega c} \quad (10)$$

4. 누설오차 개선 방법

감쇠 다자유도계에서의 응답신호는 다음과 같다

$$h(t) = \sum_{r=1}^n A_r e^{-\sigma_r t} \sin \omega_{dr} t \quad (11)$$

단, $A_r = \frac{\phi_{ir} \phi_{ir}}{m_r \omega_{dr}}$ (11a)

$$\sigma_r = \zeta_r \omega_{nr} \quad (11b)$$

$$\omega_{dr} = \sqrt{1 - \zeta_r^2} \omega_{nr} \quad (11c)$$

식(11)을 푸리에 변환하여 등비급수 합의 공식을 이용하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\tilde{H}(k\Delta f) = \frac{T_{RL}}{2} \sum_{r=1}^n A_r \left[\frac{1 - e^{-\sigma_r T_{RL}} \cdot e^{j2\pi((p_r+q_r)-k)}}{2\pi\{(p_r+q_r)-k\} + j\sigma_r T_{RL}} + \frac{1 - e^{-\sigma_r T_{RL}} \cdot e^{-j2\pi((p_r+q_r)+k)}}{2\pi\{(p_r+q_r)+k\} - j\sigma_r T_{RL}} \right] \quad (12)$$

여기서, T_{RL} 은 신호획득 시간을 나타내고, p_r 은 정수로 r 차 모드의 peak이 있는 위치의 일련번호가 되고 소수로 q_r 은 주파수 분해능 때문에 스펙트럼 상에서는 나타낼 수 없는 주파수 오차량이 된다.

최적화를 위한 목적함수를 구성하기 위해 설계 변수인 $q_r, \sigma_r, A_r (r = 1, \dots, n)$ 의 함수로 구성하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{H}_k(\{q\}^T, \{A\}^T, \{\sigma\}^T) = \tilde{H}_{Rk}(\{q\}^T, \{A\}^T, \{\sigma\}^T) - j\tilde{H}_{Ik}(\{q\}^T, \{A\}^T, \{\sigma\}^T) \quad (13)$$

최적화를 위한 목적함수는 식(13)으로 표현되는 이론식과 실험으로 구한 충격응답스펙트럼과의 오차를 제공한 값들의 합으로 다음과 같이 정의한다. 미지수인 설계변수는 $u_i (i = 1, \dots, 3n)$ 로 총칭한다.

$$J[\{q\}^T, \{A\}^T, \{\sigma\}^T] = \sum_{k=0}^{N-1} \{ \tilde{H}_{Rk}(\{q\}^T, \{A\}^T, \{\sigma\}^T) - \text{Re}[\hat{H}(k\Delta f)] \}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \{ \tilde{H}_{Ik}(\{q\}^T, \{A\}^T, \{\sigma\}^T) - \text{Im}[\hat{H}(k\Delta f)] \}^2 \quad (14)$$

목적함수의 설계변수에 대한 미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(\{ \tilde{H}_{Rk} - \text{Re}[\hat{H}(k\Delta f)] \} \frac{\partial \tilde{H}_{Rk}}{\partial u_i} + \{ \tilde{H}_{Ik} - \text{Im}[\hat{H}(k\Delta f)] \} \frac{\partial \tilde{H}_{Ik}}{\partial u_i} \right), \quad i = 1, \dots, 3n \quad (15)$$

식(15)과 같이 목적함수의 설계변수에 대한 미분이 구해지면 최적화 기법을 이용하여 식(14)을 최소화하는 설계변수를 구할 수 있다. Gauss Newton 법을 이용하여 탐색방향을 다음과 같이 정한다.

$$\sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial^2 J}{\partial u_i \partial u_j} \Delta u_j = -\frac{\partial J}{\partial u_i}, \quad i=1, \dots, 3n \quad (16)$$

식(16)의 연립방정식으로부터 탐색방향이 결정되면 1 차원 탐색방법인 황금분할법을 이용하여 식(14)가 최소가 되는 설계변수를 구한다. 이 때 초기치는 다음 식으로 구한다.⁽⁴⁾

$$R_{\pm}^2 = \frac{H[p_r \Delta f]}{H[(p_r \pm 1) \Delta f]} \quad (17)$$

$$= \frac{[2p_r(q_r \mp 1) + (\sigma_r T_{RL} / 2\pi)^2]^2 + [2(\sigma_r T_{RL} / 2\pi)]^2}{[q_r \cdot 2p_r + (\sigma_r T_{RL} / 2\pi)^2]^2 + [2(\sigma_r T_{RL} / 2\pi)p_r]^2}$$

$$\sigma_r = \frac{\pi}{T_{RL}} \sqrt{-\left(\frac{R_{r+}^2 - R_{r-}^2}{R_{r+}^2 + R_{r-}^2 - 2}\right)^2 + \frac{8}{R_{r+}^2 + R_{r-}^2 - 2}} \quad (18)$$

식(14)를 최소로 하는 설계변수 q_r, σ_r, A_r ($r = 1, \dots, n$)이 구해지면 오차가 제거된 새로운 주파수 응답함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{A_r \omega_{dr}}{(\omega_{nr}^2 - \omega^2 + j2\sigma_r \omega)} \quad (19)$$

5. 적용예

5.1 모델의 선정

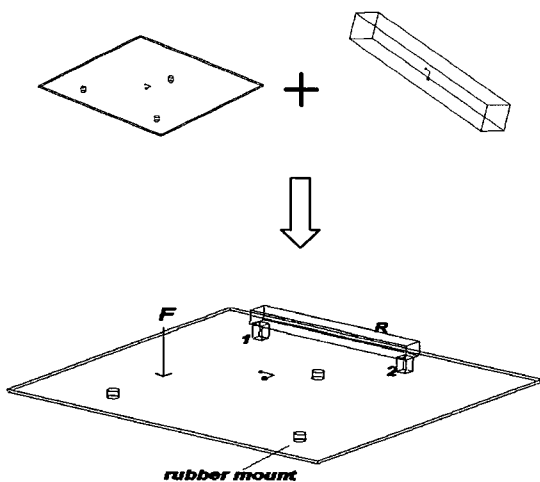


Fig. 2 A model for TFS

Fig. 2 와 같이 평판(부분구조 A) 과 보(부분구조 B)가 결합된 전달함수합성 모델을 고려한다. 평판은 가로 500mm, 세로 510mm, 두께 5.9mm, 밀도 7850kg 이고, 바닥에 강성 $k=23939N/m$,

감쇠 $c=3N \cdot s/m$ 인 고무 마운트로 지지되어있다. 보(beam)는 가로 30mm, 세로 30mm, 길이 249mm, 밀도 7850kg 이고, 평판과의 결합부 특성은 강성 $k=73548N/m$, 감쇠 $c=8N \cdot s/m$ 이다. F 는 가진력을 나타내고, 지점 1, 2 는 부분구조 결합 전·후의 평판과 빔의 연결점을 나타내며, 지점 R 은 결합후의 응답점을 나타낸다.

5.2 수치해석 방법

본 논문에서 제안하는 방법과 기존의 방법을 비교하기 위하여 정확한 FRF 의 도출을 이론적으로 구해보기로 한다. Fig. 2 를 유한요소법을 이용하여 운동방정식을 만들면 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (20)$$

식(20)에서 $[C]$ 는 일반점성 감쇠행렬로 고무 마운트의 감쇠값에 의해 정의되고 이 미분방정식을 고유치 해석을 하여 고유진동수 ω_r 와 고유벡터 ϕ 를 구하여 모드 좌표계에서 풀면 다음과 같다.

$$\{\ddot{P}\} + [\phi^T C \phi]\{\dot{P}\} + [\omega_r^2]\{P\} = [\phi^T]\{f\} \quad (21)$$

단, $\{P\} = [\phi^T]\{x\}, [\omega_r^2] = [\phi^T K \phi]$

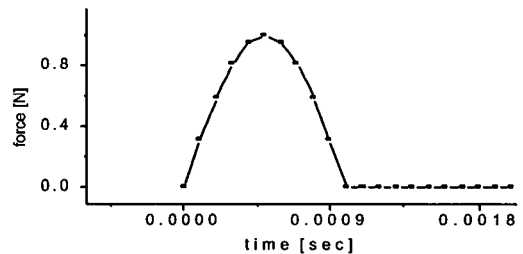


Fig. 3 A typical impulse signal

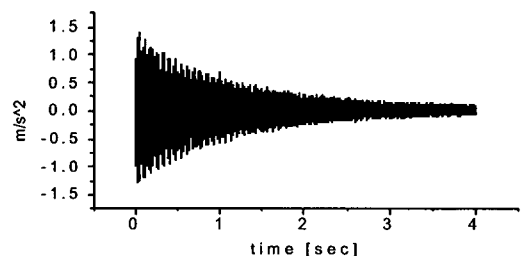


Fig. 4 A typical impulse response signal

기존의 방법인 실제 실험에 의한 방법은 가속도 센서에 의한 가속도-시간 데이터를 FFT 분석기

(Fast Fourier Transform Analyzer)에 의해 그 시간 데이터의 스펙트럼을 얻게 된다. 이와 같은 방법으로 수치 해석을 통해 그 결과 스펙트럼을 얻고자 한다.

식(21)과 같은 모드 좌표계에서 n 개의 2 계 미분 방정식을 2n 개의 1 계 미분 방정식의 형태로 바꾸면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P \\ \dot{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\omega_r^2] & [\phi^T C \phi] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ \dot{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \phi^T f \end{bmatrix} \quad (22)$$

식(22)를 수치적인 방법인 Runge-Kutta 법을 이용하여 시간 데이터를 얻을 수 있다. 이 때 충격 가진 시간 신호를 Fig. 3 과 같은 반주기 사인 함수로 하고, 이에 대한 응답 시간 신호는 Fig. 4 와 같다. 각각의 가진, 응답 시간 신호를 푸리에 변환(Fourier Transform)을 하여 구하는 충격응답 스펙트럼을 얻게 된다.

5.3 기존 방법에 의한 전달함수합성 결과

5.2 절에서 구한 FRF 를 신호획득 시간에 따라 나타내기로 한다. Fig. 5 ~ Fig. 12 에서 참값(Exact)은 식(21)에서 $\{P\} = \{\bar{P}\}e^{j\omega t}$ 라 두면,

$$\{\bar{P}\} = (-\omega^2[I] + j\omega[\phi^T C \phi] + [\omega_r^2])^{-1} \{\phi^T f\} \quad (23)$$

와 같이 표현되므로 $\{x(\omega)\} = [\phi]\{\bar{P}(\omega)\}$ 관계에서 구할 수 있다.

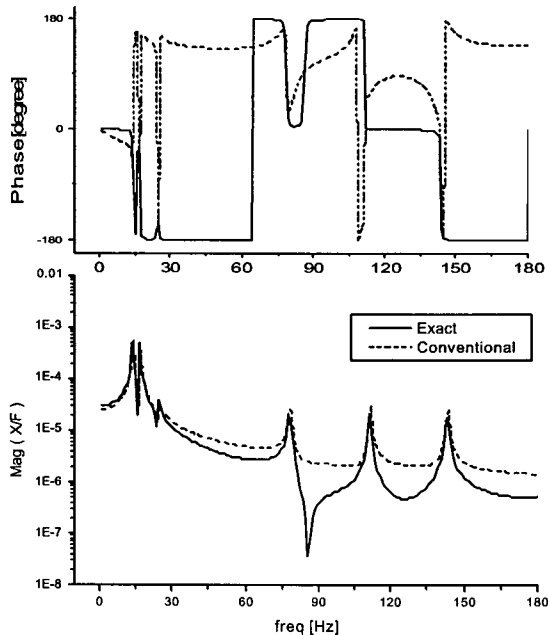


Fig. 5 FRF of G_{1f}^A by conventional method ($T_{RL} = 1$ sec)

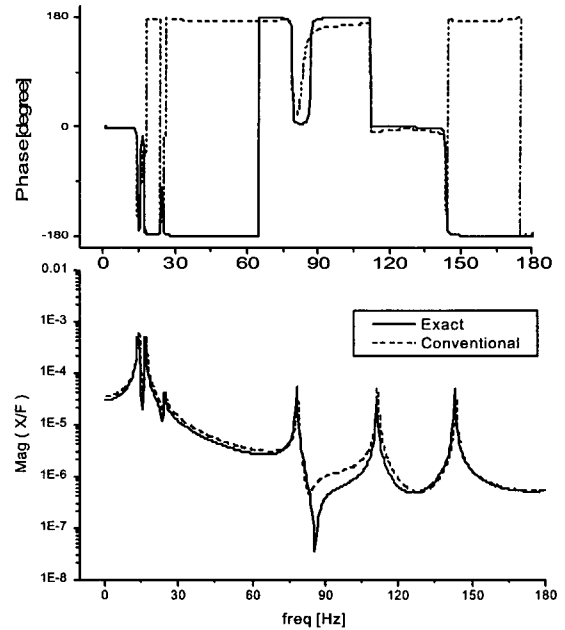


Fig. 6 FRF of G_{1f}^A by conventional method ($T_{RL} = 2$ sec)

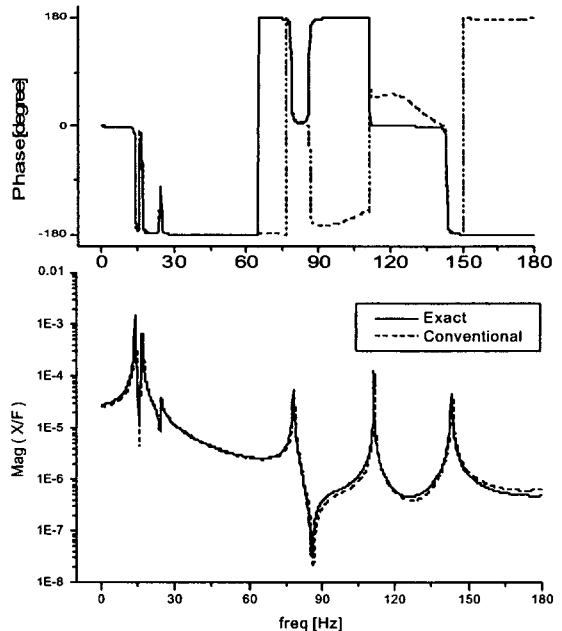


Fig. 7 FRF of G_{1f}^A by conventional method ($T_{RL} = 4$ sec)

Fig. 5 ~ Fig. 7 은 전달함수 G_{1f}^A 를 신호획득 시간 1 초, 2 초, 4 초에 따른 FRF 의 크기와 위상을 각각 나타낸 것으로 Fig. 4 에서 보듯이 신호

획득 시간을 1 초만큼만 고려할 경우 이후의 진동을 무시하게 되므로 왜곡된 FRF 를 표현하며, 신호획득 시간을 2 초로 하였을 경우 1 초로 하였을 때 보다 참값에 근접한 결과를 나타냄을 알 수 있다. 그리고, 4 초로 하였을 경우에는 크기는 거의 일치하나 위상은 차이가 크음을 알 수 있다. 즉, 신호획득 시간이 길수록 더 나은 FRF 를 얻을 수 있다.

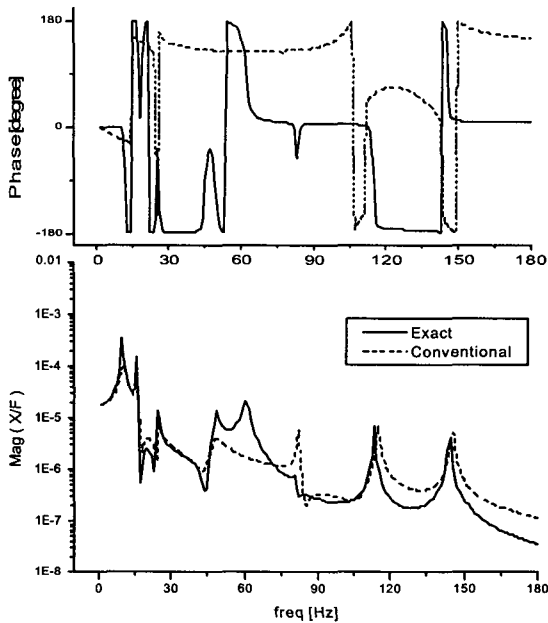


Fig. 8 The spectrum after TFS by conventional method ($T_{RL} = 1$ sec)

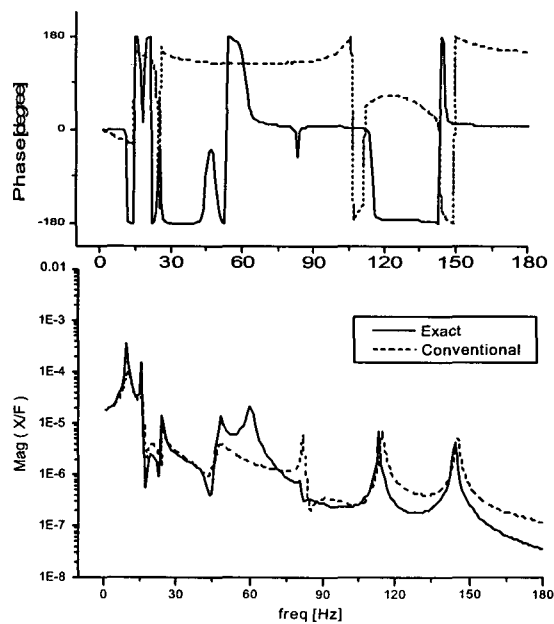


Fig. 9 The spectrum after TFS by conventional method ($T_{RL} = 2$ sec)

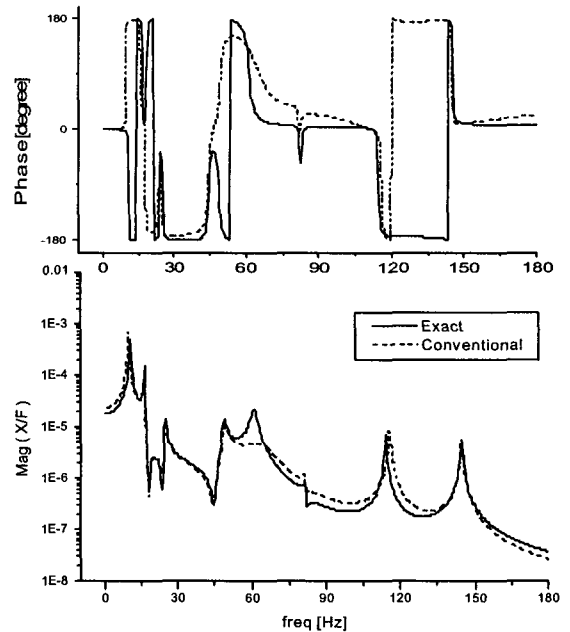


Fig. 10 The spectrum after TFS by conventional method ($T_{RL} = 4$ sec)

전달함수의 신호획득 시간을 1 초, 2 초, 4 초로 했을 경우의 전달함수 합성 결과는 Fig. 8 ~ Fig. 10 과 같다.

그림에서 보듯이 신호획득 시간이 충분치 않은 경우에 TFS 의 결과 역시 정확하지 않음을 알 수 있고, 특히 크기 차이 보다는 위상이 많이 틀리는 것을 알 수 있다.

5.4 제시하는 방법에 의한 전달함수 합성 결과

5.3 절에서 보듯이 신호획득 시간에 따른 오차에 의해 정확하지 않은 전달함수 합성결과가 도출되는 것을 알아보았다. 이제 본 논문에서 제안한 방법으로 수정된 FRF 에 의해 전달함수 합성을 해 본다. 5.3 에서 차이를 많이 보이는 신호획득 시간 1 초일 때의 G_{11}^s 의 FRF 를 구해보면 Fig. 11 과 같다.

Fig. 11 에서 본 논문에서 제안한 방법으로 수정된 FRF 는 크기와 위상에 있어 거의 정확함을 알 수 있다. 이렇게 수정된 FRF 를 이용하여 전달함수 합성법을 해보면 Fig. 12 와 같다.

Fig. 12 에서 수정된 FRF 에 의한 전달함수 합성법의 결과 역시 크기와 위상이 거의 정확함을 알 수 있다.

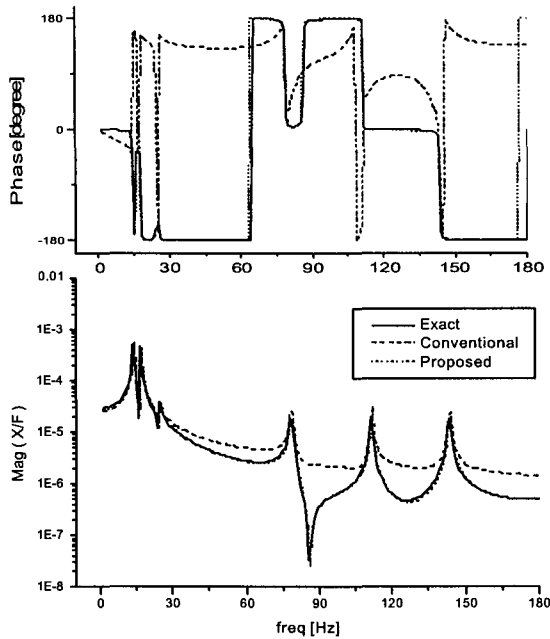


Fig. 11 FRF of G_{1f}^A by proposed method ($T_{RL} = 1 \text{ sec}$)

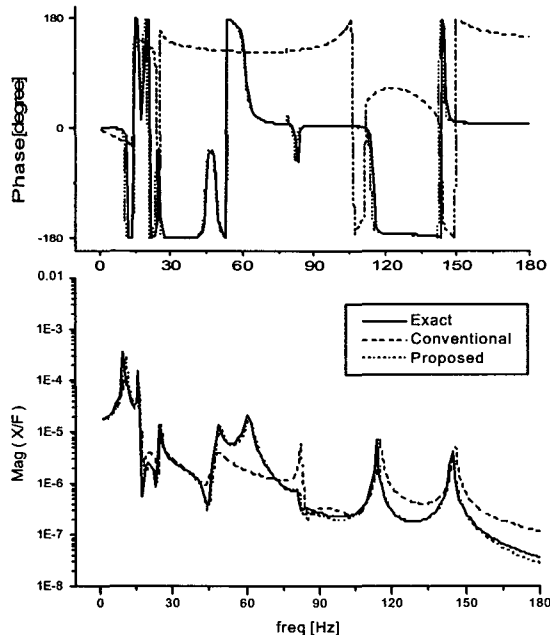


Fig. 12 The spectrum after TFS by proposed method ($T_{RL} = 1 \text{ sec}$)

6. 결론

1) 충격햄머 실험시 응답 신호가 소멸될 만큼 신호획득 시간이 충분하지 못할 경우, 유한획득시

간오차가 발생하게 된다. 그리고, 신호획득 시간에 따라 얻어진 FRF가 달라지게 됨을 보였다.

2) 충격햄머 실험시에 발생한 유한획득시간오차는 전달함수합성하였을 경우, 더욱 증폭되어 왜곡된 FRF를 표현함을 보였다.

3) 유한획득시간오차를 수정하는 방법을 제시하였으며, 제시한 방법을 이용하면 신호획득 시간에 무관하게 정확한 FRF를 얻을 수 있었으며 오차가 없는 전달함수 합성이 가능함을 보였다.

4) 앞으로의 과제는 본 논문의 제시방법을 실험에 적용하고자 한다.

참고문헌

- (1) 안세진, 정의봉, 2002, “충격햄머 가진으로 구한 주파수 응답함수의 오차와 해결방법”, 한국소음진동공학회 논문집, 제 12 권, 제 9 호, pp. 702~708.
- (2) 정의봉, 안세진, 장호엽, 장진혁, 2001, “디지털 푸리에 변환에서 누설오차의 개선”, 한국소음진동공학회지, 제 11 권, 제 3 호, pp. 455~460.
- (3) 長松昭男, 1991, 部分構造合成法, 培風館.
- (4) 장진혁, 2000, “푸리에 변환된 다자유도 신호의 누설오차개선”, 부산대학교 일반대학원 기계설계공학과 석사 졸업논문.
- (5) Nuno. M. M Maia, Julio M. M. Silva, 1998, Theoretical and Experimental Modal Analysis, Research Studies Press Ltd.