

마이크로 3축 링 자이로스코프의 동역학 Dynamics of a Micro Three-Axis Ring Gyroscope

최 상 현* · 김 창 부**

Sang-Hyun Choi, Chang-Boo Kim

Key Words : Ring Gyroscope(링 자이로스코프), Three-Axis(3축), Angular Velocity(각속도), Cyclic Symmetry(순환대칭), In-plane Motion(면내운동), Out-of-plane Motion(면외운동), Natural Mode(고유모드)

ABSTRACT

In this paper, we analyse and present mechanical dynamic characteristics of a micro-machined vibrating silicon ring gyroscope which can measure angular velocities about three orthogonal axes. The ring gyroscope has a ring connected to the gyroscope main body by support-ligaments which are arranged with cyclic symmetry. The natural modes of its vibration can be distinguished into the in-plane motion and the out-of-plane motion which are coupled by the gyro-effect due to the rotation of the gyroscope main body. The equations of motion, the response to angular velocities, and the relationships between the natural modes of vibration are derived and compared with the previous studies for the design of a micro three-axis ring gyroscope.

1. 서 론

1851년 프랑스의 물리학자 Leon Foucault에 의해 발명된 자이로스코프는 항공기, 선박, 우주선 등에 탑재되어 자세와 각속도를 측정하기 위한 센서로 많은 분야에 활용되어 왔다. 그러나 기존의 기계식, 레이저방식, 압전방식 등의 자이로스코프는 마모성, 고가격, 대형, 대량생산에 용이하지 못하는 등의 한계를 가지고 있으며 이를 극복하기 위해 마이크로머시닝 기술을 이용한 마이크로 자이로스코프에 대한 활발한 연구가 진행되어왔으며, 구조, 구성재료, 제조방법, 가진 및 감지 방식에 따라 다양한 형태를 가지고 있다⁽¹⁾.

최근에는 항법장치 등에 사용될 수 있는 고성능 및 다축의 마이크로 자이로스코프의 개발이 필요함에 따라 링 자이로스코프의 구조에 대한 연구가 진행되고 있다.

Putty와 Najafi⁽²⁾는 링과 반원 모양의 지지스프링으로 이루어진 구조에 가진 및 감지를 하고 미세 튜닝을 할 수 있는 전극을 주변에 배치한 진동형 링 자이로스코프를 개발하였다. Putty⁽³⁾는 순환대칭형 링 자이로스코프의 구조에 대한

연구에서 링의 지지대가 최소 8개 이상이어야 함과 다른 구조에 비해 의사(spurious)진동과 온도에 민감하지 않고 대칭형 구조가 회전을 감지하는데 우수함을 밝혔다. Ayazi와 Najafi⁽⁴⁾는 성능의 향상을 위해 폴리실리콘으로 이루어진 링 자이로스코프를 제작하였으며, 링의 크기가 크고 재료의 방향성이 작으며 링과 전극과의 간격이 작을수록 성능이 우수함을 밝혔다. Ayazi⁽⁵⁾는 자이로스코프의 성능 향상을 위해 링 자이로스코프를 하나의 웨이퍼 상에 모두 실리콘으로 제작하였으며 민감도와 축척한계에 대한 연구를 하였다.

Eley 등⁽⁶⁾은 3축의 각속도를 감지할 수 있는 링 구조의 해석을 통해 면내운동과 면외운동 사이에 발생하는 코리올리 연성 효과에 대해 연구하였고 제작공정상의 오차에 따라 발생하는 진동수 분리(frequency split)가 작동시 중요한 영향을 미칠 수 있음을 보였다. 또한, Gallacher 등⁽⁷⁾은 링과 크랭크 모양의 지지대로 이루어진 순환대칭 구조의 면내와 면외운동의 특성을 이용한 3축 실리콘 링 자이로스코프를 제안하였고 링의 폭과 두께의 조정을 통해 진동수를 일치시키는 방법과 정전기력을 이용한 미세 튜닝에 대해 연구하였다.

링 자이로스코프는 N 개의 최소 부분구조가 원주방향으로 주기적으로 배열된 순환대칭 구조를 갖고 있다. 순환대칭 구조의 고유진동은 절직경수(number of nodal diameter) p 로 구분될 수 있고, $0 < p < N/2$ 의 절직경수에 대해서는 고유진동수는 항상 이중(double)이고 이에 대응하는 고유모드는 원주방향으로 $\pi/(2p)$ 만큼 회전되어 있다^(7,8).

* 정회원, 인하대학교 대학원
E-mail : sapi1975@msn.com
Tel : (032) 800-7383 Fax : (032) 808-1716

** 정회원, 인하대학교 기계공학부

또한, 링 자이로스코프의 고유진동모드는 순환대칭면에 대하여 면내운동(in-plane motion)과 면외운동(out-of-plane motion)으로 구분될 수 있으며 링 자이로스코프 본체의 회전운동으로 인한 자이로 효과에 의해서 면내운동과 면외운동이 연성된다.

본 논문에서는 Gallacher 등⁽⁷⁾의 논문을 기준으로 마이크로 3축 링 자이로스코프의 설계에 필요한 기계적 동역학 특성들을 체계적으로 검토하고 해석하여 그 결과를 제시하고자 한다.

2. 링 자이로스코프의 변형 및 운동

2.1 링 자이로스코프의 구조

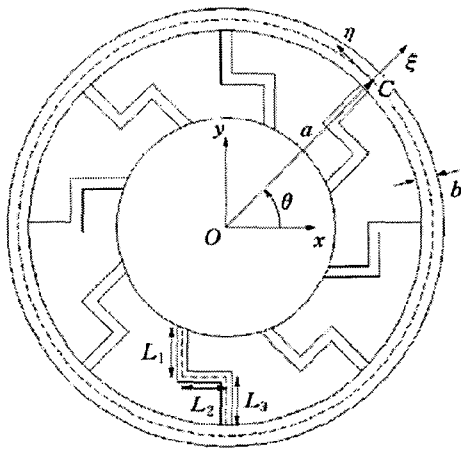


Fig. 1 Geometry of a ring gyroscope

링 자이로스코프는 자유롭게 움직일 수 있는 링(ring)이 원주방향으로 주기적으로 배열된 N 개의 지지대(support ligament)에 연결되어 있고 지지대는 자이로스코프 본체(main body)에 고정된 구조를 갖고 있다. 링은 폭 b , 두께 t 인 사각단면을 갖고 있고 평균반경이 a 이다. 지지대는 크랭크 형상을 갖고 있고 길이가 각각 L_1, L_2, L_3 이며 단면은 폭 h , 두께 t 인 사각단면이다.

자이로스코프 본체에 고정된 적각 좌표계 $Oxyz$ 는 각속도 $\vec{\Omega}$ 로 회전하며, 각속도 $\vec{\Omega}$ 의 본체 좌표계 $Oxyz$ 에 대한 성분은 $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ 이다.

링의 외부 및 하부에 원주방향으로 배열된 전극(electrode)은 링과 전극사이의 정전용량의 변화에 의해서 링에 힘을 작용하거나 링의 변위를 감지한다.

2.2 링의 운동

x 축에서 원주방향으로 θ 만큼 떨어진 링 단면의 중심 C 점에 반경방향, 원주방향, 수직방향의 축을 갖는 단면 좌표

계 $C\xi\eta\zeta$ 를 설정하면 C 점의 변위 \vec{u}_C 및 단면의 회전 $\vec{\phi}_C$ 는 θ 만의 함수로서 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{u}_C = u_\xi \vec{e}_\xi + u_\eta \vec{e}_\eta + u_\zeta \vec{e}_\zeta \quad (1)$$

$$\vec{\phi}_C = \phi_\xi \vec{e}_\xi + \phi_\eta \vec{e}_\eta + \phi_\zeta \vec{e}_\zeta \quad (2)$$

여기서 $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ 는 ξ, η, ζ 방향의 단위 길이 벡터이다.

회전 $\vec{\phi}_C$ 가 매우 작다고 가정하면, C 점을 통과하는 링 중심선에 수직한 단면상의 임의의 한 점 P 점의 변위 \vec{u}_P 는 다음과 같다.

$$\vec{u}_P = \vec{u}_C + \vec{\phi}_C \times \vec{\rho} \quad (3)$$

여기서

$$\vec{\rho} = \overline{CP} = \xi \vec{e}_\xi + \zeta \vec{e}_\zeta$$

따라서 변형후의 C 점 및 P 점의 위치는 다음과 같다.

$$\vec{r}_C = a \vec{e}_\xi + \vec{u}_C \quad (4)$$

$$\vec{r}_P = \vec{r}_C + \vec{\rho} + \vec{\phi}_C \times \vec{\rho} \quad (5)$$

자이로스코프 본체 좌표계 $Oxyz$ 는 순간 각속도 $\vec{\Omega}$ 로 회전하고 있으므로 변형 후의 C 점 및 P 점의 속도는 다음과 같다.

$$\vec{v}_C = \vec{\Omega} \times \vec{r}_C + \vec{u}_{Crel} \quad (6)$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\Omega} \times \vec{\rho} + \vec{\Omega} \times (\vec{\phi}_C \times \vec{\rho}) + \vec{\phi}_{Crel} \times \vec{\rho} \quad (7)$$

여기서

$$\vec{u}_{Crel} = \dot{u}_\xi \vec{e}_\xi + \dot{u}_\eta \vec{e}_\eta + \dot{u}_\zeta \vec{e}_\zeta$$

$$\vec{\phi}_{Crel} = \dot{\phi}_\xi \vec{e}_\xi + \dot{\phi}_\eta \vec{e}_\eta + \dot{\phi}_\zeta \vec{e}_\zeta$$

$$\vec{\Omega} = \Omega_\xi \vec{e}_\xi + \Omega_\eta \vec{e}_\eta + \Omega_\zeta \vec{e}_\zeta$$

$$\Omega_\xi = \Omega_x \cos \theta + \Omega_y \sin \theta$$

$$\Omega_\eta = -\Omega_x \sin \theta + \Omega_y \cos \theta$$

$$\Omega_\zeta = \Omega_z$$

2.3 링의 운동에너지

링의 밀도 ρ 가 균일한 경우에 각속도 성분의 2차 항의 영향을 무시하면 링의 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} T_R = & \frac{1}{2} \rho A a \int_0^{2\pi} [(\dot{u}_\xi^2 + \dot{u}_\eta^2 + \dot{u}_\zeta^2) \\ & + a^2(\mu_\xi \dot{\phi}_\xi^2 + \mu_\eta \dot{\phi}_\eta^2 + \mu_\zeta \dot{\phi}_\zeta^2) \\ & + 2\Omega_z\{(\dot{u}_\eta u_\xi - \dot{u}_\xi u_\eta) + a^2 \mu_\xi(\dot{\phi}_\eta \phi_\xi - \dot{\phi}_\xi \phi_\eta)\} \\ & + 2\Omega_x\{((\dot{u}_\zeta u_\eta - \dot{u}_\eta u_\zeta) \\ & + a^2 \mu_\zeta(\dot{\phi}_\zeta \phi_\eta - \dot{\phi}_\eta \phi_\zeta)) \cos \theta \\ & - (\dot{u}_\xi u_\zeta - \dot{u}_\zeta u_\xi) \sin \theta\} \\ & + 2\Omega_y\{((\dot{u}_\zeta u_\eta - \dot{u}_\eta u_\zeta) \\ & + a^2 \mu_\zeta(\dot{\phi}_\zeta \phi_\eta - \dot{\phi}_\eta \phi_\zeta)) \sin \theta \end{aligned}$$

$$+ (\dot{u}_\xi u_\zeta - \dot{u}_\zeta u_\xi) \cos \theta] d\theta \quad (8)$$

여기서

$$\mu_\xi = \frac{\rho I_\xi}{\rho A a^3}, \mu_\zeta = \frac{\rho I_\zeta}{\rho A a^2}, \mu_\eta = \mu_\xi + \mu_\zeta$$

또한 A, I_ξ, I_ζ 는 링 단면의 면적, ξ, ζ 축에 대한 관성모멘트이다.

2.4 링의 변형에너지

링의 변형은 $x-y$ 면에 대하여 면내 및 면외변형으로 구분될 수 있다. 링의 면내변위는 $u_\xi, u_\eta, \phi_\zeta$ 이고, 면외변위는 $u_\zeta, \phi_\xi, \phi_\eta$ 이다. 따라서 링의 변형에너지는 다음과 같이 면내와 면외 변형에너지로 합으로 표현된다.

$$V_R = V_{KI} + V_{KO} \quad (9)$$

$$V_{KI} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [EA\varepsilon_\eta^2 + KGA\gamma_\xi^2 + EI_\zeta x_\zeta^2] a d\theta \quad (10)$$

$$V_{KO} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [KGA\gamma_\zeta^2 + GJ_\eta \tau_\eta^2 + EI_\xi x_\xi^2] a d\theta \quad (11)$$

여기서 ε_η 는 인장변형률, γ_ξ, γ_ζ 는 반경방향, 수직방향 전단변형률, τ_η 는 원주방향 비틀림, x_ξ, x_ζ 는 반경방향, 수직방향 곡률로서 다음과 같다.

$$\varepsilon_\eta = \frac{1}{a} (u_\xi + u_{\eta,\theta}) \quad (12)$$

$$\gamma_\xi = \phi_\zeta + \frac{1}{a} (-u_\eta + u_{\xi,\theta}) \quad (13)$$

$$\gamma_\zeta = -\phi_\xi + \frac{1}{a} u_{\zeta,\theta} \quad (14)$$

$$\tau_\eta = \frac{1}{a} (\phi_{\eta,\theta} + \phi_\xi) \quad (15)$$

$$x_\zeta = \frac{1}{a} [\phi_{\zeta,\theta} - \frac{1}{a} (u_\xi + u_{\eta,\theta})] \quad (16)$$

$$x_\xi = \frac{1}{a} (\phi_{\xi,\theta} - \phi_\eta) \quad (17)$$

또한, E 는 Young 계수, G 는 전단계수이며, K 는 사각단면의 굽힘 전단계수⁽¹⁰⁾, J_η 는 사각단면의 비틀림 관성모멘트⁽¹¹⁾이다.

2.5 지지대의 변형에너지

지지대는 한 쪽 끝이 자이로스콥프 본체에 고정되어 있고 다른 쪽 끝은 링에 연결되어 순환대칭 구조를 갖고 있으므로 링과 지지대의 변형은 서로 연성된다. 지지대의 변형은 링의 변형과 마찬가지로 면내변형과 면외변형으로 구분될 수 있고, 전체 지지대의 변형에너지는 다음과 같다.

$$V_S = V_{SI} + V_{SO} \quad (18)$$

$$V_{SI} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N u_{Ik}^T K_{LI} u_{Ik} \quad (19)$$

$$V_{SO} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N u_{Ok}^T K_{LO} u_{Ok} \quad (20)$$

여기서 K_{LI}, K_{LO} 는 링 단면중심 C 점에 대한 지지대 한 개의 면내 강성행렬 및 면외 강성행렬로서 해석적방법 또는 유한요소법을 사용하여 얻어진다.

$$u_I = (u_\xi, u_\eta, \phi_\zeta)^T$$

$$u_O = (u_\zeta, \phi_\xi, \phi_\eta)^T$$

$$u_{Ik} = u_I(\theta = \theta_k)$$

$$u_{Ok} = u_O(\theta = \theta_k)$$

$$\theta_k = \theta_0 + k \frac{2\pi}{N}$$

θ_0 는 첫 번째 지지대의 x 축에 대한 위치각이다.

3. 링 자이로스콥프의 운동방정식

3.1 기진력

링의 외부에 원주방향으로 배열된 전극에 의해서 링에 반경방향의 힘이 작용한다. 링 중심선의 단위 길이당 작용하는 반경방향의 기진력 $f_r(\theta, t)$ 은 다음과 같다.

For $0 \leq p \leq N/2$

$$\int_0^{2\pi} [f_r(\theta, t) \cos p\theta] a d\theta = F_{rC}(t) \delta_{np} \quad (21)$$

$$\int_0^{2\pi} [f_r(\theta, t) \sin p\theta] a d\theta = F_{rS}(t) \delta_{np} \quad (22)$$

여기서 δ_{np} 는 Kronecker delta 이다.

링의 반경방향 변위를 다음과 같이 가정하면

$$u_\xi = u_{rC} \cos p\theta + u_{rS} \sin p\theta$$

면내 기진력에 의한 가상일은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta W_I &= \int_0^{2\pi} \delta u_\xi f_r a d\theta \\ &= \delta u_{rC} F_{rC} \delta_{np} + \delta u_{rS} F_{rS} \delta_{np} \end{aligned} \quad (23)$$

따라서 상기와 같은 n 개의 절직경수 분포를 가지는 면내 기진력에 의해서 유발되는 링 자이로스콥프의 면내운동은 n 개의 절직경수 만을 갖게 된다.

또한, 링의 하부에 원주방향으로 배열된 전극에 의해서 링에 수직방향의 힘이 작용한다. 링 중심선의 단위 길이당 작용하는 수직방향의 기진력 $f_z(\theta, t)$ 은 다음과 같다.

For $0 \leq p \leq N/2$

$$\int_0^{2\pi} [f_z(\theta, t) \cos p\theta] a d\theta = F_{zC}(t) \delta_{mp} \quad (24)$$

$$\int_0^{2\pi} [f_z(\theta, t) \sin p\theta] a d\theta = F_{zS}(t) \delta_{mp} \quad (25)$$

링의 반경방향 변위를 다음과 같이 가정하면

$$u_\zeta = u_{zC} \cos p\theta + u_{zS} \sin p\theta$$

면외 기진력에 의한 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W_O = \int_0^{2\pi} \delta u_{\zeta} f_{\zeta} a d\theta$$

$$= \delta u_{\zeta C} F_{\zeta C} \delta_{mp} + \delta u_{\zeta S} F_{\zeta S} \delta_{mp} \quad (26)$$

따라서 상기와 같은 m 개의 절직경수 분포를 가지는 변의 기진력에 의해서 유발되는 링 자이로스코프의 면외운동은 m 개의 절직경수 만을 갖게 된다.

3.2 링의 순환대칭 운동

링의 면내운동을 n 개의 절직경수를 갖는 순환대칭의 단 순조화형이라고 가정하면 면내변위는 다음과 같이 표현된다.

$$u_{\xi} = u_{\xi C} \cos n\theta + u_{\xi S} \sin n\theta$$

$$u_{\eta} = u_{\eta C} \cos n\theta + u_{\eta S} \sin n\theta \quad (27)$$

$$\phi_{\zeta} = \phi_{\zeta C} \cos n\theta + \phi_{\zeta S} \sin n\theta$$

링의 면외운동을 m 개의 절직경수를 갖는 순환대칭의 단 순조화형이라고 가정하면 면외변위는 다음과 같이 표현된다.

$$u_{\zeta} = u_{\zeta C} \cos m\theta + u_{\zeta S} \sin m\theta$$

$$\phi_{\xi} = \phi_{\xi C} \cos m\theta + \phi_{\xi S} \sin m\theta \quad (28)$$

$$\phi_{\eta} = \phi_{\eta C} \cos m\theta + \phi_{\eta S} \sin m\theta$$

링의 인장 및 굽힘 전단을 고려하지 않는 경우, 즉 다음과 같은 경우에는

$$\varepsilon_{\eta} = 0, \gamma_{\xi} = 0, \gamma_{\zeta} = 0$$

면내변위에 대한 구속은 다음과 같고

$$u_{\eta C} = \frac{1}{n} u_{\xi S}, u_{\eta S} = -\frac{1}{n} u_{\xi C}$$

$$\phi_{\zeta C} = -\frac{(n^2-1)}{an} u_{\xi S}, \phi_{\zeta S} = \frac{(n^2-1)}{an} u_{\xi C} \quad (29)$$

면외변위에 대한 구속은 다음과 같다.

$$\phi_{\xi C} = \frac{m}{a} u_{\xi S}, \phi_{\xi S} = \frac{m}{a} u_{\xi C} \quad (30)$$

3.3 운동에너지

$m = n + 1$ 혹은 $m = n - 1$ 일 때에만 운동에너지의 Ω_x, Ω_y 에 대한 항이 존재한다. 따라서 링의 회전관성, 굽힘 전단 및 인장을 무시하고 지지대의 관성을 무시하는 경우에, $m = n + 1, n \geq 1$ 의 순환대칭 운동에 대한 링 자이로스코프 구조의 운동에너지는 다음과 같다.

$$T = T_R$$

$$= \frac{1}{2} \pi \rho A a \left\{ \left(\left(1 + \frac{1}{n^2} \right) (\dot{u}_{\zeta C}^2 + \dot{u}_{\zeta S}^2) + (\dot{u}_{\xi C}^2 + \dot{u}_{\xi S}^2) \right) \right.$$

$$+ 2\Omega_z \left\{ \frac{2}{n} (\dot{u}_{\xi S} u_{\xi C} - \dot{u}_{\xi C} u_{\xi S}) \right\}$$

$$+ \Omega_y \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right) (\dot{u}_{\xi S} u_{\zeta C} - \dot{u}_{\zeta C} u_{\xi S}) \right.$$

$$\left. \left. - \dot{u}_{\xi C} u_{\zeta S} + \dot{u}_{\zeta S} u_{\xi C} \right\} \right\}$$

$$+ \Omega_y \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right) (\dot{u}_{\zeta C} u_{\zeta C} - \dot{u}_{\zeta C} u_{\xi C} \right.$$

$$\left. + \dot{u}_{\xi S} u_{\zeta S} - \dot{u}_{\zeta S} u_{\xi S}) \right\} \quad (31)$$

3.4 변형에너지

링의 굽힘 전단 및 인장을 무시하는 경우에, $m = n + 1, n \geq 1$ 의 순환대칭 운동에 대한 링 자이로스코프 구조의 변형에너지는 다음과 같다.

$$V = V_R + V_S = V_{RI} + V_{RO} + V_{SI} + V_{SO} \quad (32)$$

여기서

$$V_{RI} = \frac{1}{2} \pi E I_{\zeta} \frac{1}{a^3} [(n^2-1)^2 (u_{\xi C}^2 + u_{\xi S}^2)] \quad (33)$$

$$V_{RO} = \frac{1}{2} \pi E I_{\xi} \frac{1}{a^3} [(m^2 u_{\zeta C}^2 + a \phi_{\eta C})^2$$

$$+ (m^2 u_{\zeta S}^2 + a \phi_{\eta S})^2$$

$$+ \beta m^2 (u_{\zeta S} + a \phi_{\eta S})^2 + \beta m^2 (u_{\zeta C} + a \phi_{\eta C})^2] \quad (34)$$

$$V_{SI} = \frac{1}{2} \{ k_n (u_{\xi C}^2 + u_{\xi S}^2) \} \quad (35)$$

$$V_{SO} = \frac{1}{2} \{ k_{11} (u_{\zeta C}^2 + u_{\zeta S}^2) + 2k_{12} (u_{\zeta C} \phi_{\eta C} + u_{\zeta S} \phi_{\eta S})$$

$$+ k_{22} (\phi_{\eta C}^2 + \phi_{\eta S}^2) + 2k_m (u_{\zeta S} \phi_{\eta C} - u_{\zeta C} \phi_{\eta S}) \} \quad (36)$$

$$\beta = \frac{G J_R}{E I_{\xi}}$$

$$k_n = \left(\frac{N}{2} \right) \left(K_{L1n1} + \frac{1}{n^2} K_{L122} \right.$$

$$\left. - \frac{2(n^2-1)}{an^2} K_{L123} + \frac{(n^2-1)^2}{a^2 n^2} K_{L133} \right)$$

$$k_{11} = \left(\frac{N}{2} \right) \left(K_{L011} + \frac{m^2}{a^2} K_{L022} \right)$$

$$k_{12} = \left(\frac{N}{2} \right) K_{L013}$$

$$k_{22} = \left(\frac{N}{2} \right) K_{L033}$$

$$k_m = \left(\frac{N}{2} \right) \left(\frac{m}{a} \right) K_{L023}$$

3.5 운동방정식

자이로스코프의 각속도를 무시해서 Lagrange 방정식으로 부터 얻어진 링 자이로스코프의 운동방정식에 모달 감쇠를 추가하여 운동방정식을 단위질량형으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_{\xi C} \\ \ddot{u}_{\xi S} \\ \ddot{u}_{\zeta C} \\ \ddot{u}_{\zeta S} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \xi_{\xi} \omega_{\xi} & -\lambda \Omega_z & \lambda' \Omega_y & -\lambda'' \Omega_x \\ \lambda \Omega_z & \xi_{\xi} \omega_{\xi} & \lambda'' \Omega_x & \lambda' \Omega_y \\ -\lambda' \Omega_y & -\lambda' \Omega_x & \xi_{\zeta} \omega_{\zeta} & 0 \\ \lambda' \Omega_x & -\lambda' \Omega_y & 0 & \xi_{\zeta} \omega_{\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\xi C} \\ u_{\xi S} \\ u_{\zeta C} \\ u_{\zeta S} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \omega_\xi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_\xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_\zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_\zeta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\xi C} \\ u_{\xi S} \\ u_{\zeta C} \\ u_{\zeta S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\xi C} \\ f_{\xi S} \\ f_{\zeta C} \\ f_{\zeta S} \end{pmatrix} \quad (37)$$

with

$$\phi_{\zeta C} = \frac{1}{k_a} (-k_\beta u_{\zeta C} - k_m u_{\zeta S}) \quad (38)$$

$$\phi_{\zeta S} = \frac{1}{k_a} (-k_\beta u_{\zeta S} + k_m u_{\zeta C}) \quad (39)$$

여기서 ξ_ξ, ξ_ζ 는 면내 및 면외 고유진동수 ω_ξ, ω_ζ 에 대한 모달 감쇠계수이다.

$$\lambda = \frac{2n}{n^2+1}, \lambda' = \frac{n-1}{2n}, \lambda'' = \frac{n(n-1)}{2(n^2+1)}$$

$$f_{\xi C} = \frac{F_{\xi C}}{m_\xi}, f_{\xi S} = \frac{F_{\xi S}}{m_\xi}, f_{\zeta C} = \frac{F_{\zeta C}}{m_\zeta}, f_{\zeta S} = \frac{F_{\zeta S}}{m_\zeta}$$

$$\omega_\xi = \sqrt{\frac{k_\xi}{m_\xi}}, \omega_\zeta = \sqrt{\frac{k_\zeta}{m_\zeta}}$$

$$m_\xi = \pi \rho A a \left(1 + \frac{1}{n^2}\right), m_\zeta = \pi \rho A a$$

$$k_\xi = \pi E I_\xi \frac{1}{a^3} (n^2 - 1)^2 + k_n$$

$$k_\zeta = \left(\pi E I_\zeta \frac{1}{a^3} m^2 (m^2 + \beta) + k_{11} \right) - \frac{(k_\beta^2 + k_m^2)}{k_a}$$

$$k_a = \pi E I_\xi \frac{1}{a} (1 + \beta m^2) + k_{22}$$

$$k_\beta = \pi E I_\xi \frac{1}{a^2} m^2 (1 + \beta) + k_{12}$$

3.6 자이로스코프의 각속도 감지

(1) 변위측정에 의한 각속도 감지

$F_{\xi C}$ 를 제어하여 $u_{\xi C}$ 의 진폭이 일정하게 되도록 하면서 $F_{\xi S}, F_{\zeta C}, F_{\zeta S}$ 를 영이 되게 할 때, 운동방정식에서 감쇠항렬의 비대각 성분을 무시하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} u_{\xi C} &= U_{\xi C} \sin \omega_\xi t \\ \ddot{u}_{\xi S} + 2\xi_\xi \omega_\xi \dot{u}_{\xi S} + \omega_\xi^2 u_{\xi S} &= -2\lambda \Omega_z \omega_\xi U_{\xi C} \cos \omega_\xi t \\ \ddot{u}_{\zeta C} + 2\xi_\zeta \omega_\zeta \dot{u}_{\zeta C} + \omega_\zeta^2 u_{\zeta C} &= 2\lambda' \Omega_y \omega_\zeta U_{\xi C} \cos \omega_\xi t \quad (40) \\ \ddot{u}_{\zeta S} + 2\xi_\zeta \omega_\zeta \dot{u}_{\zeta S} + \omega_\zeta^2 u_{\zeta S} &= -2\lambda'' \Omega_x \omega_\zeta U_{\xi C} \cos \omega_\xi t \end{aligned}$$

따라서 정상상태 응답은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_{\xi S} &= U_{\xi S} \sin \omega_\xi t \\ u_{\zeta C} &= U_{\zeta C} \cos(\omega_\zeta t - \phi) \\ u_{\zeta S} &= U_{\zeta S} \cos(\omega_\zeta t - \phi) \end{aligned} \quad (41)$$

여기서

$$U_{\xi S} = \frac{-\lambda \Omega_z}{\xi_\xi \omega_\xi} U_{\xi C}$$

$$U_{\zeta C} = \frac{2\lambda' \Omega_y}{\sqrt{(r^2-1)^2 + (2\xi_\zeta r)^2} \omega_\zeta} U_{\xi C}$$

$$U_{\zeta S} = \frac{-2\lambda'' \Omega_x}{\sqrt{(r^2-1)^2 + (2\xi_\zeta r)^2} \omega_\zeta} U_{\xi C}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi_\zeta r}{r^2-1} \right)$$

$$r = \frac{\omega_\zeta}{\omega_\xi}$$

자이로스코프의 각속도는 다음과 같은 식을 이용하여 얻어진다.

$$\begin{aligned} \Omega_z &= -\frac{\xi_\xi \omega_\xi}{\lambda} \left\{ \frac{U_{\xi S}}{U_{\xi C}} \right\} \\ \Omega_y &= \frac{\sqrt{(r^2-1)^2 + (2\xi_\zeta r)^2} \omega_\zeta}{2\lambda'} \left\{ \frac{U_{\zeta C}}{U_{\xi C}} \right\} \\ \Omega_x &= -\frac{\sqrt{(r^2-1)^2 + (2\xi_\zeta r)^2} \omega_\zeta}{2\lambda''} \left\{ \frac{U_{\zeta S}}{U_{\xi C}} \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

각속도가 시간에 따라서 빠르게 변하는 경우에는 응답지연시간이 필요하다.

(2) 재평형력 측정에 의한 각속도 감지

$F_{\xi C}$ 를 제어하여 $u_{\xi C}$ 의 진폭이 일정하게 되도록 하면서 $F_{\xi S}, F_{\zeta C}, F_{\zeta S}$ 를 제어하여 $u_{\xi S}, u_{\zeta C}, u_{\zeta S}$ 의 진폭이 영이 되도록 할 때, 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} u_{\xi C} &= U_{\xi C} \sin \omega_\xi t \\ F_{\xi C} &= Q_{\xi C} \cos \omega_\xi t \\ F_{\xi S} &= Q_{\xi S} \cos \omega_\xi t \\ F_{\zeta C} &= Q_{\zeta C} \cos \omega_\zeta t \\ F_{\zeta S} &= Q_{\zeta S} \cos \omega_\zeta t \end{aligned} \quad (43)$$

여기서

$$\begin{aligned} Q_{\xi C} &= 2m_\xi \xi_\xi \omega_\xi^2 U_{\xi C} \\ Q_{\xi S} &= 2m_\xi \lambda \Omega_z \omega_\xi U_{\xi C} \\ Q_{\zeta C} &= -2m_\zeta \lambda' \Omega_y \omega_\zeta U_{\xi C} \\ Q_{\zeta S} &= 2m_\zeta \lambda'' \Omega_x \omega_\zeta U_{\xi C} \end{aligned}$$

자이로스코프의 각속도는 다음과 같은 식을 이용하여 얻어진다.

$$\begin{aligned} \Omega_z &= \frac{\xi_\xi \omega_\xi}{\lambda} \left\{ \frac{Q_{\xi S}}{Q_{\xi C}} \right\} \\ \Omega_y &= -\frac{m_\xi \xi_\xi \omega_\xi}{m_\zeta \lambda'} \left\{ \frac{Q_{\zeta C}}{Q_{\xi C}} \right\} \\ \Omega_x &= \frac{m_\zeta \xi_\zeta \omega_\zeta}{m_\zeta \lambda''} \left\{ \frac{Q_{\zeta S}}{Q_{\xi C}} \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

각속도가 시간에 따라서 빠르게 변하는 경우에는 응답지연시간을 필요로 하지 않는다.

4. 링 자이로스코프 구조의 고유진동

4.1 물성치 및 크기

링과 지지대의 재질은 실리콘으로 수치해석에서 다음과 같은 물성치 및 크기를 사용하였다.

$$N = 8, E = 180 \text{ GPa}, \nu = 0.28, \rho = 2340 \text{ kg/m}^3, \\ a = 4000 \mu\text{m}, b = 285.4 \mu\text{m}(\text{변경가능}), t = 100 \mu\text{m}, \\ h = 20 \mu\text{m}, L_1 = 250 \mu\text{m}, L_2 = 1000 \mu\text{m}, L_3 = 250 \mu\text{m}.$$

4.2 자유 링의 고유진동

링의 굽힘 전단, 인장 및 회전관성을 무시하는 경우에, 지지대로 지지되지 않는 자유 링의 절곡경수 $n = 2$ 의 면내 고유진동수와 절곡경수 $m = 3$ 의 면외 고유진동수가 일치하기 위해서는 b/l 가 약 2.854가 되어야 한다.

$b = 285.4 \mu\text{m}$ 일 때, 자유 링의 면내 고유진동수와 면외 고유진동수는 각각 19,287 Hz, 19,287 Hz 이며 참고문헌 (7)의 결과와 일치한다.

$b = 285.4 \mu\text{m}$ 일 때, 상기의 고유진동수와 링의 굽힘 전단, 인장 또는 회전관성을 고려하는 경우에 $n = 2$ 의 면내 최저 고유진동수 및 $m = 3$ 의 면외 최저 고유진동수를 비교하면 Table 1과 같다.

Table 1의 해석적방법 a), b), c)에서는 본 논문에서 제시된 운동에너지 식(31)에서 회전각속도를 무시하고 변형에너지 식(32)에서 지지대의 탄성을 고려하지 않고 각각 2, 4, 6 자유도로 표현되는 면내 및 면외 운동방정식을 유도하여 고유진동수를 계산하였다.

유한요소방법에서는 MSC/NASTRAN 유한요소해석 프로그램⁽¹²⁾을 이용하여 링을 96개의 CBEND요소로 모델링하여

Table 1 Natural frequency (Hz) of the free ring when $n = 2, m = 3$.

Method \ Mode	In-plane ($n = 2$)	Out-of-plane ($m = 3$)
Analytic a)	19,287	19,287
Analytic b)	19,278	19,281
Analytic c)	19,229	19,260
F.E.M. d)	19,287	19,255
F.E.M. e)	19,238	19,245

- a) $\gamma_\xi, \gamma_\zeta, \epsilon_\eta, \mu_\xi, \mu_\zeta$ are zero.
- b) γ_ξ, γ_ζ are zero.
- c) $\gamma_\xi, \gamma_\zeta, \epsilon_\eta, \mu_\xi, \mu_\zeta$ are not zero.
- d) $K = 0$
- e) $K = 0.84881$

고유진동수를 계산하였다.

링의 인장과 회전관성을 무시하여도 고유진동수에는 영향이 거의 없으나, 굽힘전단 효과를 무시하면 고유진동수가 약간 크게 계산됨을 알 수 있다.

4.3 지지 링의 고유진동

지지대의 굽힘전단을 무시하는 경우에, 지지대 한 개의 면내 강성행렬 및 면외 강성행렬을 kg, m, s 단위로 나타내면 다음과 같다.

$$K_{LI} = \begin{bmatrix} 1.0444 \times 10^2 & 3.1232 \times 10^2 & -7.0428 \times 10^{-2} \\ & 2.0823 \times 10^3 & -6.6156 \times 10^{-1} \\ \text{sym.} & & 2.3258 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$K_{LO} = \begin{bmatrix} 1.2593 \times 10^2 & -6.2967 \times 10^2 & 4.9454 \times 10^{-2} \\ & 6.1029 \times 10^{-5} & -2.4727 \times 10^{-5} \\ \text{sym.} & & 3.5372 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$b = 285.4 \mu\text{m}$ 일 때, 지지대의 관성 및 굽힘 전단을 무시하고 또한 링의 굽힘 전단, 인장 및 회전관성을 무시하는 경우에, 지지대로 지지되는 지지 링의 $n = 2$ 의 면내 고유진동수 및 $m = 3$ 의 면외 고유진동수는 각각 21,435 Hz, 19,673 Hz 이다. 면외 고유진동수는 면내 고유진동수에 비하여 약 8.2% 작다. 상기 결과는 참고문헌 (7)의 결과와 일치하지 않는다. 그 이유는 참고문헌에서는 면외 등가강성 k_ξ 의 표현식에서 k_m 항을 고려하지 않았다.

지지대의 관성 및 굽힘 전단, 링의 굽힘 전단, 인장 및 회전관성을 무시하는 경우에, 링의 폭 b 만을 변경시켜서 지지

Table 2 Natural frequency (Hz) of the supported ring when $n = 2, m = 3$.

Method \ Mode	In-plane ($n = 2$)	Out-of-plane ($m = 3$)
Analytic a)	19,696	19,696
Analytic b)	19,690	19,692
Analytic c)	19,657	19,673
F.E.M. d)	19,688	19,666
F.E.M. e)	19,655	19,657
F.E.M. f)	19,634	19,656
F.E.M. g)	19,480	19,548

- a) $\rho_L, K_L, \gamma_\xi, \gamma_\zeta, \epsilon_\eta, \mu_\xi, \mu_\zeta$ are zero.
- b) $\rho_L, K_L, \gamma_\xi, \gamma_\zeta$ are zero.
- c) ρ_L, K_L are zero.
- d) $\rho_L = 0, K_L = 0, K = 0$
- e) $\rho_L = 0, K_L = 0, K = 0.84881$
- f) $\rho_L = 0, K_L = 0.84881, K = 0.84881$
- g) $\rho_L = 2340 \text{ kg/m}^3, K_L = 0.84881, K = 0.84881$

링의 $n = 2$ 의 면내 고유진동수 및 $m = 3$ 의 면외 고유진동수가 일치하기 위해서는 b/t 가 약 2.523이 되어야 한다.

$b = 252.3 \mu m$ 일 때, 지지 링의 면내 고유진동수 및 면외 고유진동수는 각각 19,696 Hz, 19,696 Hz 이다.

$b = 252.3 \mu m$ 일 때, 상기의 고유진동수와 지지대의 관성, 굽힘 전단, 링의 굽힘 전단, 인장 또는 회전관성을 고려하는 경우에 $n = 2$ 의 면내 최저 고유진동수 및 $m = 3$ 의 면외 최저 고유진동수를 비교하면 Table 2와 같다.

Table 2의 해석적방법 a), b), c)에서는 본 논문에서 제시된 운동에너지 식(31)에서 회전각속도를 무시하고 변형에너지 식(32)에서 지지대의 굽힘 전단효과를 무시한 강성행렬을 사용해서 각각 2, 4, 6 자유도로 표현되는 면내 및 면외 운동방정식을 유도하여 고유진동수를 계산하였다.

유한요소방법에서는 링을 96개의 CBEND요소와 지지대 한 개를 8개의 CBEAM요소로 모델링하여 고유진동수를 계산하였다.

지지대의 질량효과를 무시하면 고유진동수가 약간 크게 계산됨을 알 수 있다. 또한 지지대의 질량효과로 인하여 면내 고유진동수와 면외 고유진동수가 약간의 차이가 있음을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 3축의 각속도를 감지할 수 있는 마이크로 링 자이로스코프의 운동방정식을 체계적으로 유도하여 제시하였고, 지지대의 질량과 링의 굽힘전단 및 회전관성효과를 무시하는 경우에 참고문헌 (7)에서 제시된 면외 고유진동수의 계산식이 틀렸음을 입증하였고 수정식을 제시하였다

지지대의 질량과 링의 굽힘전단, 인장, 및 회전관성효과를 무시해서 면내 및 면외 고유진동수가 일치되도록 링의 크기를 결정하면 상기한 효과에 의해서 면내 및 면외 고유진동수의 차이가 어느정도 있게 되고, 이와 같은 고유진동수의 차이가 x 축 및 y 축의 회전속도 감지도를 떨어지게 할 수 있다.

따라서 면내 및 면외 고유진동수의 차이가 허용될 수 있는 범위 내에 있도록 링의 크기를 결정하기 위해서는 지지대의 질량과 링의 굽힘전단, 인장 및 회전관성을 고려하여 링 자이로스코프의 운동방정식을 유도하여야 한다.

참 고 문 헌

(1) Yazdi, N., Ayazi, F., and Najafi, K., 1998, "Micromachined inertial sensors," Proc. IEEE, Vol. 86, No. 8, pp. 1640~1659.
 (2) Putty, M. W. and Najafi, K., 1994, "A micromachined vibrating ring gyroscope," Tech. Dig.

Solid-State Sensor and Actuator Workshop, Hilton Head Island, SC, pp. 213~220.

(3) Putty, M. W., 1995, "A micromachined vibrating ring gyroscope," Ph.D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor.

(4) Ayazi, F. and Najafi, K., 1998, "Design and Fabrication of a High-Performance Polysilicon Vibrating Ring Gyroscope," Proc. IEEE Micro Electro Mechanical Systems Workshop, Heidelberg, Germany, pp. 621~626.

(5) Ayazi, F., 2000, "A high aspect-ratio high-performance polysilicon vibrating ring gyroscope," Ph.D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor.

(6) Eley, R., Fox, C. H. J., and McWilliam, S., 2000, "Coriolis coupling effects on the vibration of rotating rings," Journal of Sound and Vibration, Vol. 238(3), pp. 459~480.

(7) Gallacher, B. J., Burdess, J. S., Harris, A. J., and McNie, M. E., 2001, "Principles of a Three-Axis Vibrating Gyroscope," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 37, No. 4, pp. 1333~1343.

(8) Thomas, D. L., 1979, "Dynamics of Rotationally Periodic Structures," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, pp. 81~102.

(9) 김창부, 안영철, 2000, "송풍기 임펠러의 순환대칭성을 이용한 고유치해석," 한국소음진동공학회지, 제 10 권, 제 3 호, pp. 523~530.

(10) Cowper, G. R., 1966, "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory," Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 335~340.

(11) Sokolnikoff, I. S., 1956, Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, p. 183.

(12) Kevin Kilroy, 1997, MSC/NASTRAN Quick Reference Guide, The MacNeal-Schwendler Corporation.