

## 치형수정된 기어구동계의 비선형 동특성 해석

### Nonlinear Dynamic Characteristics of Gear Driving System with Tooth Modification

조윤수\* · 최연선\*\*

Yun-Su Cho, Yeon-Sun Choi

**Key Words** : Gear Driving System(기어구동계), Transmission Error(전달오차), Tooth Modification(치형수정).

#### ABSTRACT

To reduce the vibration of a gear driving system, the modification of gear tooth from the original involute gear profile is usually done in gear manufacturers. The quantity of tooth modification has been decided on the basis of the interference between two gear teeth during gear meshing and the elastic deformation due to loading. However, the dynamic characteristics with tooth modification has to be investigated to avoid the instability to the variation of gear meshing stiffness and the nonlinearity due to gear backlash which results in sub- or super-harmonics in its responses. This research shows the dynamic characteristics with various tooth modifications in its type and quantity.

#### 1. 서 론

기어는 높은 동력 전달효율과 다양한 속도비를 갖는 기계 요소로서 모터와 같은 동력 발생원으로부터 감속을 통해 높은 구동력을 얻는데 사용되고 있다. 기어구동부에서 발생하는 진동과 소음은 주로 기어물림과정에서 발생하는 것으로서 축과 베어링을 통해 케이스 등 기어 구동계 전체로 전달된다.

기어의 치형은 대부분 인볼류트(involute) 치형을 사용하고 있다. 그러나 실제 기어의 경우 제작오차와 치변형 등에 의해 정확한 인볼류트 형상을 유지할 수도 없으며, 이러한 오차에 의해 구동시 기어에서 진동과 소음이 발생한다. 제작오차 및 치변형에 의한 오차를 전달오차(transmission error)라 하며, 전달오차에 의한 진동과 소음 문제를 해결하기 위하여 치형수정 방법이 사용되고 있다. 치형수정과 관련하여 보면, Tavakoli<sup>(1)</sup>는 전달오차가 진동과 소음을 유발시키는 중요한 요인임을 밝히고 전달오차를 최소화하는 노력이 필요함을 지적하였다. Houser<sup>(2)</sup>는 기어박스의 진동과 소음을 연구하였으며, 정적 전달오차와 하중분포를 구하

였고, 컴플라이언스를 계산하기 위해 사각형 평판 유한요소 모델을 이용하였다. 이봉현<sup>(3)</sup>은 기어치형과 기어구동계의 동적 안정성 문제를 Matiuieu식으로 설명하였다. 박노길<sup>(4)</sup>은 하중 변형량과 프로파일(profile) 오차를 이용한 치형수정 방법을 제안하였으며, Kahraman<sup>(5)</sup>은 치형수정에 따른 기어의 동적 응답을 실험적으로 연구하였다.

본 연구에서는 선행 연구자들이 제시한 치형수정 방법을 기어치에 적용하여, 기어구동계의 동적 특성을 살펴봄으로써 적절한 기어 치형 수정방법을 제시하고자 한다.

#### 2. 전달오차

본 연구에 사용된 기어의 제원을 Table. 1에 나타내었다. Fig. 1은 물림율이 2 이하인 기어쌍의 맞물림 구간을 나타내고 있다. 초기 접촉점(IPC) 위치는 기어의 이끝원이 작용선과 만나는 B점이 되고, 최종 접촉점(FPC) 위치는 기어의 이끝원이 작용선과 만나는 F점이 된다. 치의 접촉이 B에서 시작되었을 때, 다른 치는 아직 접촉과정 중에 있게 되고 BC구간의 접촉이 수행되는 동안 EF구간도 접촉이 진행되어 두 개의 치가 동시에 접촉하게 된다.

\* 성균관대학교 기계설계학과 대학원

\*\* 성균관대학교 기계공학부 교수

접촉점 C에서는 EF구간에 접촉한 치의 접촉점이 F점에 위치하여 접촉을 완료하게 되므로 CE구간은 한 개의 치만 접촉을 하게 되어 C점은 한 개의 치만 접촉하기 시작하는 최하위 단일치 접촉점이 되고 E는 한 개의 치접촉이 끝나는 최상위 단일치 접촉점으로 치에 작용하는 하중이 급격히 변하는 점이 된다.

Table. 1 Design parameters of gear

	Gear	Pinion
Number of teeth	48	32
Radius of pitch circle(mm)	60	40
Radius of outside circle(mm)	63.7	43.8
Radius of root circle(mm)	57.7	37.8
Radius of fillet	1.4224	1.4224
Tooth thickness at pitch circle(mm)	4	4
Tooth width(mm)	10	10
Pressure angle(deg)	20	20

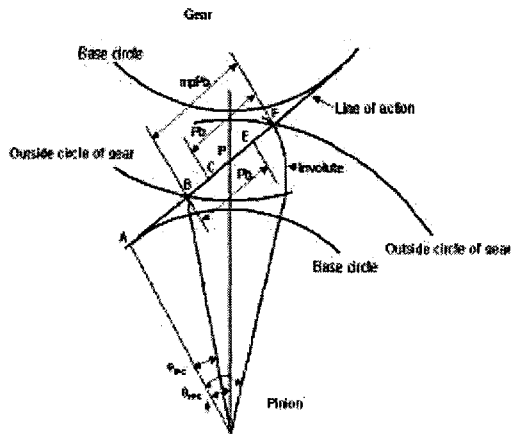


Fig. 1 Characteristics of tooth action

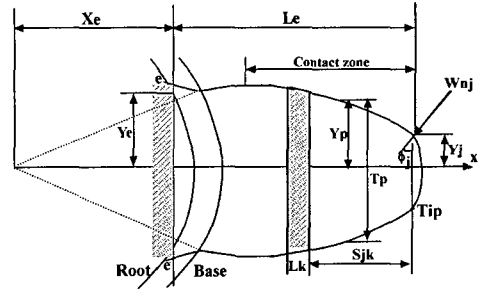


Fig. 2 Tooth modeling for compliance calculation

기어치의 컴플라이언스(compliance)는 굽힘과 전단에 의한 외팔보 변형, 지지부의 유연성에 의한 치의 강체 회전, 접촉에 의한 변형 등 세 가지에 의해 결정된다. Fig. 2에 나타낸 미소횡단요소에 대한 굽힘과 전단에 의한 변형을 구하면 식 (1), (2)와 같다. 이렇게 구한 변형식을 이용하여 치의 컴플라이언스를 계산하면 식(3)과 같다. 치의 회전 컴플라이언스는 식(4)와 같다.

$$(D_a)_j = \frac{W_j}{E_e I_i} \left[ \cos \phi_j \left( \frac{L_i^3}{3} + \frac{L_i^2 S_{ij}}{2} \right) + \left( \frac{S_{ij} \cos \phi_j - y_i \sin \phi_j}{2} \right) (L_i^2 + 2L_i S_{ij}) \right] \quad (1)$$

$$(D_s)_i = \frac{(1.2 W_j \cos^2 \phi_j L_i)}{A_i G} \quad (2)$$

$$Q_{bj} = \frac{\sum_i (D_{ai} + D_{si}) \cos \phi_j}{W_j} \quad (3)$$

$$Q_{fj} = \frac{\cos^2 \phi_j}{FE} \left\{ 5.306 \left( \frac{L_f}{H_f} \right)^2 + 2(1 - \nu) \left( \frac{L_f}{H_f} \right) + 1.534 \left( 1 + \frac{0.4167 \tan^2 \phi_j}{1 + \nu} \right) \right\} \quad (4)$$

이외에 마찰, 마모 등 다른 영향에 의해 발생하는 컴플라이언스를 구하기 위해 맞물림 기어에 Palmgren<sup>(6)</sup>의 공식을 이용하면 식(5)와 같이 된다.

$$Q_h = \frac{1.37}{E_{12}^{0.9} F_{12}^{0.8} W_n^{0.1}} \quad (5)$$

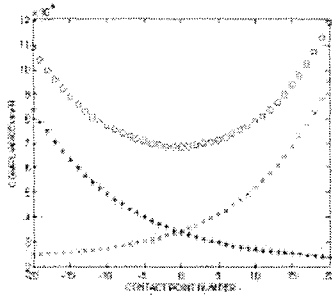


Fig. 3 Mesh compliance of spur gear

이렇게 구해진 세 가지 컴플라이언스를 모두 합하여 전체 기어의 컴플라이언스를 아래 식(6)을 이용하여 계산한 결과 Fig. 3의 결과를 얻었다.

$$Q_j = Q_{bj} + Q_{fj} + Q_h \quad (6)$$

앞서 구한 컴플라이언스를 식 (7)에 대입하여 Fig. 4와 같이 전달오차를 계산할 수 있다. 이렇게 구한 전달오차를 이용하여 기어의 강성을 계산하면 Fig. 5의 값을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} Q_j^0 W_j^0 + E_{ij} &= E_{bj}^0 \\ Q_j^1 W_j^1 + E_{ij} &= E_{bj}^1 + E_{\phi.1} \\ W_j^0 + W_j^1 &= W_n \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $W_n$ 은 전체 수직하중,  $W_j$ 는 치형상에 작용하는 수직하중,  $E_{ij}$ 는 전달오차,  $E_{bj}$ 는 접촉점에서 치형수정,  $E_{\phi.1}$ 은 피치오차,  $Q$ 는 접촉점에서의 컴플라이언스이다. 기어구동계의 동적응답을 수치해석을 이용하여 계산하기 위해 구해진 강성과 전달오차를 Fourier 급수로 전개하면 식(8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} e(t) &= e(t+2\pi/N\omega) = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \cos(N\omega t + \alpha_n) \\ k(t) &= k(t+2\pi/N\omega) = k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos(N\omega t + \alpha_n) \end{aligned} \quad (8)$$

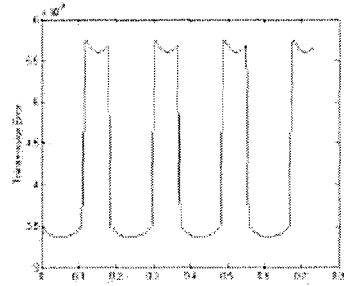


Fig. 4 Transmission error of spur gear

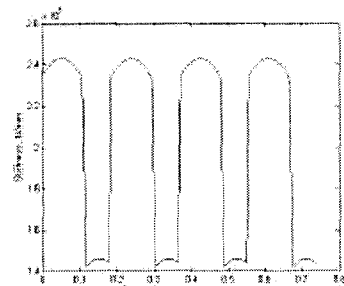


Fig. 5 Stiffness of spur gear tooth

### 3. 치형수정

치형수정 형태 중 가운데가 볼록한 치형이 전달오차를 줄이는 좋은 방법으로 연구된 바 있다.<sup>(3)</sup> 그러나 정확한 치형수정 방법은 정의되지 않았다. 이에 본 연구에서는 박노길<sup>(4)</sup>이 제안한 치형수정 방법을 적용하여 동특성을 살펴보고 적절한 치형수정 방법을 제안하고자 한다. 따라서 아래의 4가지 방법을 적용하여 치형을 수정하고, 이때 나타나는 특성변화를 살펴보았다.

- ① 치변형과 profile error를 고려한 치형수정<sup>(4)</sup>
- ② 치형수정의 하한계값<sup>(4)</sup>을 이용한 치형수정
- ③ ①의 이끝 부분만을 치형수정
- ④ ②의 이끝 부분만을 치형수정

①의 방법을 이용하여 Fig. 6과 같이 치형 수정을 하고, 수정된 기어쌍의 전달오차를 다시 계산하였다. 이때 ②의 방법은 Fig. 6의 최 하단곡선을 따라 치형수정을 실시한 것이다. ③번과 ④번 방법은 Fig. 6의 MTPC 우측부분만을 치형수정하는 방법이 된다.

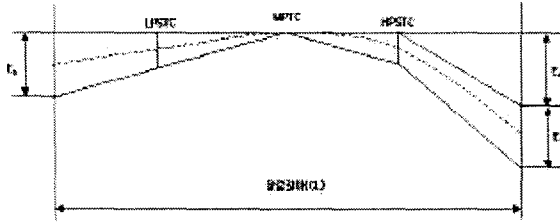
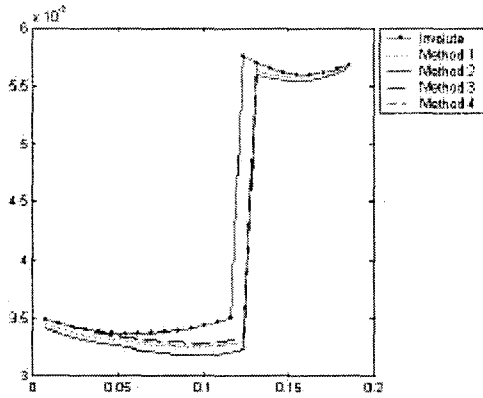
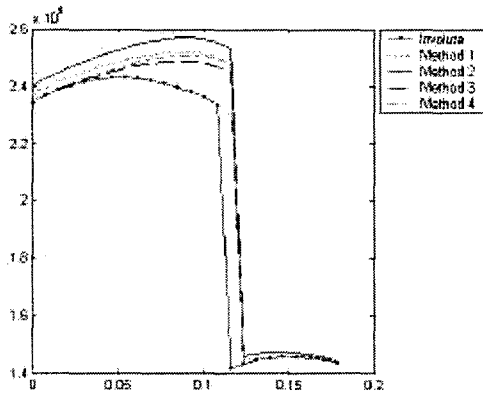


Fig. 6 Involute diagram for tooth modification



(a) Transmission error



(b) Stiffness

Fig. 7 Modified tooth

①, ②, ③, ④번 각각의 방법으로 치형수정을 한 후 전달오차와 강성을 다시 계산하면 Fig. 7와 같은 결과를 얻을 수 있다. 전달오차의 경우 ②번 방법이 가장 작은 값을 가지며, 강성의 경우 ②번 방법이 가장 큰 값을 알 수 있다.

Table. 2 Dynamic parameters of the gear

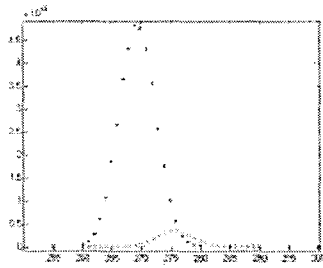
	Original tooth	Modified tooth ①	Modified tooth ②	Modified tooth ③	Modified tooth ④
$k_0$	407818	426638	432909	422269	423890
$k_1$	50586	47023	48695	46017	46407
$k_2$	31597	36164	37170	35673	36159
$k_3$	8949	16459	16644	16368	16424
$k_4$	19976	12254	12389	12073	11979
$k_5$	20369	22713	23144	22477	22630

Table. 3 Mean values of transmission error

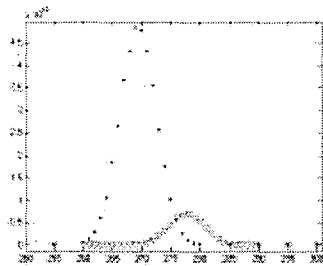
	전달오차 평균값( $\mu\text{m}$ )
Original tooth	4.254
Modified tooth ①	4.076
Modified tooth ②	4.029
Modified tooth ③	4.112
Modified tooth ④	4.101

치형수정 후 전달오차와 강성의 변화는 table 2와 table 3을 통하여 확인할 수 있다. 전달오차의 경우 치형수정량이 많아질수록 평균값이 감소함을 보여준다. 전달오차를 감소시키는 관점에서 보면 ①번과 ②번 방법이 좋은 치형수정 방법임을 알 수 있다.

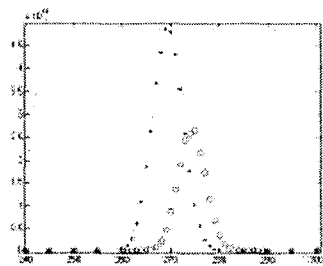
①의 방법으로 치형수정된 기어구동계의 불안정 영역은 Fig. 8(a)에서 처럼 261~290rpm에서 나타남을 알 수 있다. ②, ③, ④방법을 적용한 기어구동계의 불안정 영역은 Fig. 8(b)~(d)와 같이 나타내었다. 순수한 기어의 불안정 응답점으로 표시하고 각각의 치형수정 방법으로 치형수정한 기어시스템의 불안정 응답을 기호로 나타내었다. 전체적으로 치형수정을 했을 때 응답의 크기는 작아짐을 알 수 있다. 그러나 ③, ④번 방법은 ①, ②번에 비해 응답이 크게 작아지고 있지는 못하다.



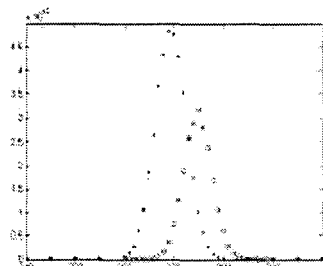
(a) modified tooth ①



(b) modified tooth ②



(c) modified tooth ③



(d) modified tooth ④

Fig. 8 Unstable regions

Table. 4 Unstable regions

	Rotating speed (rpm)
Original tooth	254~285
Modified tooth ①	261~290
Modified tooth ②	263~292
Modified tooth ③	260~288
Modified tooth ④	261~289

Table 4로부터 치형수정한 경우 전체적으로 치형수정을 얇은 경우보다 불안정 회전속도영역이 커짐을 알 수 있고, ③번 ④번 방법의 불안정속도 영역은 좁아진다는 것을 알 수 있다.

치형수정은 기어의 와인(wine)진동을 줄이기 위한 목적으로 수행된다. 그러나 잘못된 치형수정은 기어의 래틀(rattle) 진동에 영향을 미칠 수 있다. 따라서 치형수정이 래틀진동에 미치는 영향을 살펴보고 이를 통해 치형수정 방법을 검토할 필요가 있다.

기어구동계의 동적 응답특성을 살펴보기 위하여 식(9)의 기어구동계 운동방정식을 Runge-Kutta 방법을 이용하여 수치해석을 수행하였다. 이때 실제 기어에 존재하는 백래쉬(backlash)를 함께 고려하여 식(9)의 운동방정식을 유도하고 기어의 운동특성을 살펴보았다.

$$m_{eq} \ddot{p} + c \dot{p} + k(t)f(p) = F_m + F_a - m_{eq} \ddot{e}(t) \quad (9)$$

여기서

$$f(p(t)) = \begin{cases} p(t) - b & : (t) > b \\ 0 & : -b < p(t) < b \\ p(t) + b & : p(t) < -b \end{cases}$$

잘못된 치형수정의 경우 백래쉬량을 증가시킬 수 있고, 이 경우 기어의 래틀진동을 가져 올 수 있다. 이러한 응답특성 변화를 통하여 적용된 치형수정 방법의 타당성을 살펴보고 치형수정이 기어의 전체 응답에 미치는 영향을 살펴보았다.

Fig. 9, 10은 치형수정하지 않은 원래 기어와 네 가지 치형수정 방법을 적용한 기어의 동적 응답특성을 보여준다. 여기서 우측은 40Nm, 좌측은 49Nm의 구동토크를 준 상태에서의 응답이다. Fig. 10에서 보면 치형수정을 한 경우 고유진동수의 1/2에 해당하는 성분의 응답이 커짐을 알 수 있다. 특히 기어에 작용하는 하중이 작은 경우는 고유진동수 이상의 영역에서 치형수정 전, 후의 응답에 차이가 크게 나타남을 알 수 있다. 네 가지 치형수정방법을 적용한 기어의 응답 중 ④번 방법을 적용한 기어가 치형수정 전, 후의 응답차이가 가장 적은 것을 알 수 있다.

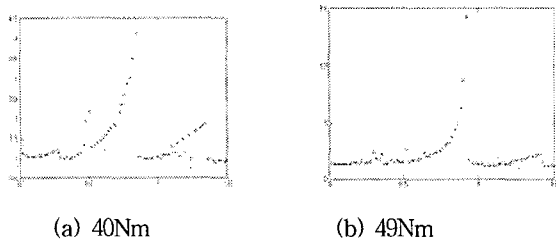
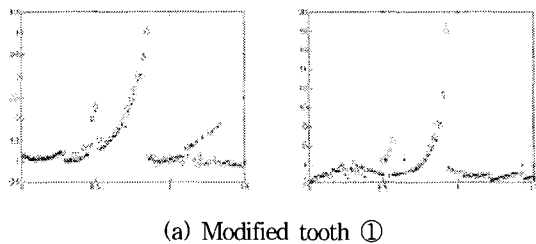
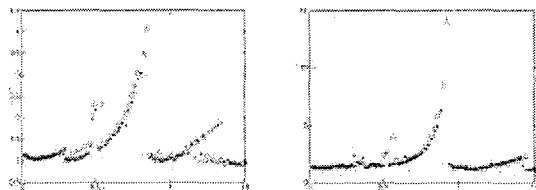


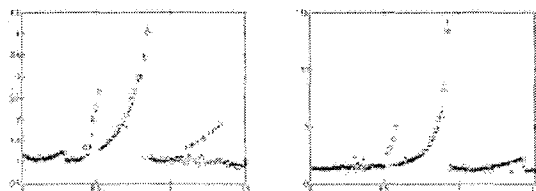
Fig. 9 Dynamic responses of original spur gear with different torques



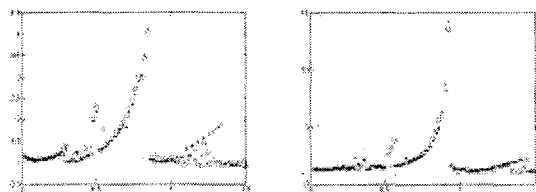
(a) Modified tooth ①



(b) Modified tooth ②



(c) Modified tooth ③



(d) Modified tooth ④

Fig. 10 Dynamic responses of modified tooth (T=40Nm / T=49Nm)

#### 4. 결론

기어의 치형수정 방법에 따른 기어구동계의 응답특성을 살펴본 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 치형수정을 통하여 전달오차와 물림강성 변화를 살펴본 결과 치형수정을 적용한 치형이 전달오차가 작게 나타남을 알 수 있고, 치변형과 profile error를 고려한 치형수정인 ①번과 ①번의 하한계로 치형수정한 ②번의 방법이 가장 작은 전달오차값을 갖는다는 것을 확인하였다.

(2) 치형수정 결과 치형수정량이 많아질수록 불안정 영역이 높아지며, 치형수정 후 불안정 영역의 폭은 감소함을 알 수 있었다. 또한 ①, ②의 방법보다 ③, ④의 방법과 같이 이끝 부분만을 치형수정한 형태가 불안정 영역이 더 감소함을 확인할 수 있었다.

(3) 적용한 4가지 치형수정 방법 중 ①, ②번의 방법과 같이 이끝과 이뿌리 부분을 동시 치형수정 하는 것이 전달오차의 감소 측면에서는 좋은 결과를 얻을 수 있으나 가공성과 안정성 측면에서는 ③, ④번 방법과 같이 이끝 부분만을 치형수정 하는 것이 적절한 방법임을 확인할 수 있었다.

(4) 본 연구에 적용된 치형수정 방법은 기어치의 피치점에서의 치형수정량이 없으므로, 기어구동계의 백래쉬에는 영향을 미치지 않음을 확인할 수 있다.

#### 참 고 문 헌

(1) Tavakoli. M. S. and Houser. D. R., 1986, "Optimum Profile Modifications for the Minimization of Static Transmission Error of Spur Gears," ASME, Journal of Mechanis, Transmissions, and Automation in Design, Trans., Vol. 108, pp. 86-95.

(2) Houser, D. R., 1982, "Research in the Gear Dynamic and Gear Noise Reseach Laboratory," SAE 821066.

(3) 이봉현, 1997, "기어 구동계의 진동, 소음저감을 위한 치형수정에 관한 연구," 성균관대학교 석사학위논문

(4) 배명호, 박노길, 1998, "기어 변속기의 소음저감을 위한 치형수정 설정방법에 관한 고찰," SAE 98370144.

(5) A. Kahraman, G. W. Blankenship, 1999, "Effect of Involute Tip Relief on Dynamic Response of Spur Gear Pairs," Journal of Mechanical Design, Vol. 121, pp. 313-315.

(6) Tavakoli. M. S., 1983, "Optimization of Spur Gear Transmission Error Using Profile Modification," M. Sc. Thesis. The Ohio State University