

## 수중익과 자유표면의 비선형 상호작용 계산을 위한 고차 스펙트럴/경계적분법

김용직<sup>\*</sup>·하영록<sup>\*\*</sup>·권순홍<sup>\*\*\*</sup>·김동준<sup>\*\*\*\*</sup>

### **High-Order Spectral/Boundary-Integral Method for the Calculation of Nonlinear Interactions between Hydrofoil and Free-Surface**

Yong Jig Kim<sup>\*</sup>, Young Rok Ha<sup>\*\*</sup>, Sun Hong Kwon<sup>\*\*\*</sup> and Dong Joon Kim<sup>\*\*\*\*</sup>

**Key Words :** High-Order Spectral/Boundary-Integral Method(고차 스펙트럴/경계적분법), Free-Surface(자유표면), Hydrofoil(수중익), Numerical Calculation(수치계산), Velocity Potential(속도 포텐셜)

#### **Abstract**

Under the assumption of potential flow, free-surface flows around a 2-dimensional hydrofoil are calculated by high-order spectral/boundary-integral method. This method is one of the most efficient numerical methods by which the nonlinear interactions between hydrofoil and free-surface can be simulated in time-domain. Comparisons of the calculated free-surface profiles with other experimental results show relatively good agreements. As another example, free-surface flow generated by the heaving and translating hydrofoil is calculated and discussed.

#### **1. 서 론**

물체 내부의 자유표면 유동에 비해 물체 외부의 자유표면 유동은 상대적으로 넓은 계산영역을 필요로 한다. 이를 외부 자유표면 유동을 전산기를 이용하여 계산하는데 있어, 큰 어려움들 중의 하나가 이에 소요되는 과중한 계산시간과 이로 인해 초래되는 문제들이다. 따라서 보다 효율적이고 우수한 새로운 수치해법의 개발은 매우 중요한 과제라고 할 수 있다. 김[1]은 자유표면 유동을 다루는데 극히 효율적인 고차 스펙트럴법을 경계적분법과 결합하여 양력단면에 의한 자유표면 유동을 시간영역에서 다룬 바 있다.

본 논문에서는 균속전진하는 수중익에 의한 발생파형 계산결과를 Duncan[2]의 실험결과와 비교하였고, 전진하며 상하동요(heave)하는 수중익에 의한 자유표면파와 농유체력의 계산결과를 보이고 있다.

#### **2. 시간영역 경계치 문제의 정식화**

유체는 비점성, 비압축성이고 유체의 운동은 비회전성이라고 가정하며 표면장력은 무시한다. 좌표계는  $x$ -축을 정수면에 두고  $y$ -축은 상방향을 양으로 한다. 수심은 무한하다.

위의 가정으로부터 속도 포텐셜  $\Phi(x, y, t)$ 를 도입하면 유체의 연속 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \text{ in the fluid region, } t \geq 0. \quad (1)$$

자유표면상에서의 운동학적 경계조건과 동역학적 경계조건은 각각 다음과 같고,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi^s}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \left[ 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} + g\eta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi^s}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 = 0, \\ \text{on } y = \eta(x, t), t \geq 0, \quad (3)$$

여기에서  $y = \eta(x, t)$ 는 자유표면을 나타내며, 표면 포텐셜  $\phi^s(x, t)$ 는 자유표면에서의 속도 포텐셜값  $\Phi(x, \eta, t)$ 이고,  $g$ 는 중력 가속도이다.

날개의 후방에 생성되는 후류 보오텍스면(wake vortex sheet)에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{D(\Delta \Phi)}{Dt} = \frac{\partial(\Delta \Phi)}{\partial t} + V_m \cdot (\Delta \Phi) = 0, \quad (4) \\ \text{on the freely moving wake surface, } t \geq 0,$$

여기에서  $\Delta \Phi$ 는 무한히 얇은 후류면에서 윗면 포텐셜  $\Phi^+$ 와 아래면 포텐셜  $\Phi^-$ 의 차에 의한 포텐셜 도약이며,  $V_m$ 은 후류면 각 위치에서의 평균유속이다.

날개표면에서의 물체표면 경계조건은 다음과 같고,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = V(t) \cdot u, \text{ on the body surface, } t \geq 0, \quad (5)$$

\* 부경대학교 조선해양시스템공학과, yjkim@pknu.ac.kr

\*\* 부경대학교 대학원, yrha@mail1.pknu.ac.kr

\*\*\* 부산대학교 조선해양공학과, shkwon@pusan.ac.kr

\*\*\*\* 부경대학교 조선해양시스템공학과, djkim@pknu.ac.kr

여기에서  $\mathbf{n}$ 은 물체 밖으로 향한 단위 법선벡터이고,  $\mathbf{V}(t)$ 는 물체의 속도벡터이다.

날개뒷날에서의 Kutta 조건은 다음의 Morino Kutta 조건을 적용하였으며,

$$(\Delta\Phi)_{wake} = (\Phi^u - \Phi^l)_{body}, \text{ at the trailing edge, } t \geq 0, \quad (6)$$

여기에서  $u$ 와  $l$ 은 각각 날개의 윗면과 아랫면을 나타낸다.

무한원방 경계조건은 다음과 같고,

$$\begin{aligned} & \nabla \Phi \rightarrow 0 \\ & \Phi < \infty \end{aligned} \quad \text{as } R \rightarrow \infty, [R = (x^2 + y^2)^{1/2}], \quad (7)$$

물체의 운동이 항상 정지상태로부터 출발한다고 가정하면 초기 조건은 다음과 같다.

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \text{ on } y = 0, t = 0. \quad (8)$$

### 3. 고차 스펙트럴/경계적분법[1]

수면변위  $\eta$ 와 표면 포텐셜  $\phi^s$ 는 각각 자유표면 경계조건식(2)과 (3)을 시간적분하여 얻을 수 있다. 또한, 후류 보오텍스면(뒷날 제외)의 위치와 포텐셜 도약( $\Delta\Phi$ )은 시간의 진행에 따라서 식(4)의 조건으로부터 계산된다. 따라서, 각 순간에서 풀어야 하는 공간상의 경계치 문제는  $y = \eta$ 에서 Dirichlet 경계조건으로  $\phi^s$ 가 주어지고, 후류면(뒷날 제외)에서 포텐셜 도약이 주어졌을 때, 식(1)의 Laplace 방정식과 식(5), 식(6), 식(7)의 경계조건들을 만족하는 속도 포텐셜  $\Phi(x, y, t)$ 를 구하는 문제가 된다.

속도 포텐셜  $\Phi$ 를 다음과 같이 M항까지의 급수로 표현하며,

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \phi^{(m)}(x, y, t), \quad (9)$$

$\phi^{(m)}$ 을  $O(\epsilon^m)$ 이라 가정한다. 여기서  $\epsilon$ 은 작은 양으로서 파기울기(wave steepness) 정도의 척도이다. 이때,  $\phi^{(m)}$ 은 다음의 경계조건을  $y = 0$ 에서 만족하여야 한다.

$$\phi^{(m)}(x, 0, t) = \begin{cases} \phi^s(x, t), & m=1, \\ -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial y^k} \phi^{(m-k)} \right]_{y=0}, & M \geq m \geq 2. \end{cases} \quad (10)$$

임의의 물체운동을 포함하는 해를 구하기 위해  $\phi^{(m)}$ 을 다시 다음과 같이 파 포텐셜(wave potential)  $\phi_w^{(m)}$ 과 물체 포텐셜(body potential)  $\phi_b^{(m)}$ 의 합으로 나타낸다.

$$\phi^{(m)} = \phi_w^{(m)} + \phi_b^{(m)}. \quad (11)$$

$\phi_b^{(m)}$ 은 식(1)의 Laplace 방정식과 식(7)의 무한원방 경계조건 외에 다음의 경계조건들을 만족하는 포텐셜로 한다.

$$\phi_b^{(m)} = 0 \text{ on } y = 0. \quad (12)$$

$$\nabla \phi_b^{(m)} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} \mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{n} - \nabla \phi_w^{(m)} \cdot \mathbf{n}, & m=1, \\ -\nabla \phi_w^{(m)} \cdot \mathbf{n}, & M \geq m \geq 2, \end{cases} \text{ on the body surface.} \quad (13)$$

$$\Delta\phi_b^{(m)} = \begin{cases} \Delta\Phi, & m=1, \\ 0, & M \geq m \geq 2, \text{ on the wake surface except the trailing edge.} \end{cases} \quad (14)$$

$$(\Delta\phi_b^{(m)})_{wake} = [(\phi_b^{(m)})^u - (\phi_b^{(m)})^l]_{body}, \quad M \geq m \geq 1, \text{ at the trailing edge.} \quad (15)$$

$\phi_b^{(m)}$ 은 식(12)의 조건 때문에  $y = 0$ 에서  $\phi^{(m)}$ 의 값에 기여하지 못하므로,  $\phi^{(m)}$ 의 식(10)의 경계조건을 만족하기 위해서는  $\phi_w^{(m)}$ 은  $y = 0$ 에서 다음의 조건을 만족하여야 하며,

$$\begin{aligned} \phi_w^{(m)}(x, 0, t) = & \begin{cases} \phi^s(x, t), & m=1, \\ -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial y^k} (\phi_w^{(m-k)} + \phi_b^{(m-k)}) \right]_{y=0}, & M \geq m \geq 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

이외에  $\phi_w^{(m)}$ 은 식(1)의 Laplace 방정식과 식(7)의 무한원방 경계조건을 만족하여야 한다. 이  $\phi_w^{(m)}$ 은 날개와 후류면을 포함하는 모든 영역에서 연속이므로 식(14)과 식(15)의 포텐셜 도약에는 영향을 주지 않는다.

각 경계치문제에서  $\phi_b^{(m)}$ 과  $\phi_w^{(m)}$ 의 계산 순서는 다음과 같다.

- 1) 계산되어 있는  $\phi^s$ 로부터  $\phi_w^{(1)}$ 을 계산한다.
- 2)  $\phi_w^{(1)}$ 과 알고 있는 후류면에서의  $\Delta\Phi$ , 주어진  $\mathbf{V}(t)$ 로부터  $\phi_b^{(1)}$ 을 계산한다.
- 3)  $\phi_w^{(1)}$ 과  $\phi_b^{(1)}$ , 그리고 계산되어 있는  $\eta$ 로부터  $\phi_w^{(2)}$ 를 계산한다.
- 4)  $\phi_w^{(2)}$ 로부터  $\phi_b^{(2)}$ 를 계산한다.
- 5) 3)과 4)의 과정을 차수  $m$ 을 하나씩 증가시켜 가며 정해진 차수  $M$ 까지 반복 수행한다.

각 경계치 문제의 해로  $\phi_w^{(m)}$ 과  $\phi_b^{(m)}$ 이 구해지면 이들의 합으로  $m$ 차 포텐셜  $\phi^{(m)}$ 이 식(11)에 의해 얻어지고, 전체 포텐셜  $\Phi$ 는  $\phi^{(m)}$ 의 급수로 식(9)에 의해 얻어진다. 이렇게 얻어지는 속도 포텐셜  $\Phi$ 는 식(9)의 급수가 유효한 범위내에서 자유표면에 주어진 Dirichlet 경계조건과 후류면에 주어진 포텐셜 도약 및 식(1), 식(5), 식(6), 식(7)로 이루어진 각 순간의 경계치 문제의 해가 된다.

물체 포텐셜  $\phi_b^{(m)}$ 의 수치계산은 Green 정리에 기초한 경계적분법[1,3,4]을 이용한다. 수치해는 이미 잘 알려져 있는 수치해법들에 따라, 균일세기의 특이점 분포를 갖는 직선요소들로 이산화하여 계산하였다.

과 포텐셜  $\phi_w^{(m)}$ 의 수치계산은 고차 스펙트럴법[1,5]을 이용한다.  $\phi_w^{(m)}$ 을 eigen 함수 전개식(복소 Fourier 급수)으로 표현하고, 식(16)의 Dirichlet 경계조건을 만족하도록 eigen 함수의 복소진폭값을 잘 알려진 Fast-Fourier 변환법[6]을 써서 계산하였다.

$\eta$ 와  $\phi_s$ 의 시간에 따른 변화는 각각 식(2)와 (3)을 시간적분하여 계산하며, 후류면의 위치변화는 각 보오텍스위치에서의 유속(자신의 영향은 제외)을 시간적분하여 계산한다. 시간적분법으로 4차 Runge-Kutta 적분법을 이용할 때 선형 자유표면파 문제에서의 수치 안정성(numerical stability)조건이  $\Delta t^2 \leq 8\Delta x/g\pi$  ( $\Delta t$ 는 시간증분,  $\Delta x$ 는 자유표면 분할간격)임은 잘 알려져 있으며, 본 논문의 계산에서도 충분한 여유를 두고 이 조건을 만족하도록 하였다. 수록된 계산예들에서 수치적 불안정성은 나타난 바 없고, 별도의 자유표면 순정(smoothing) 기법도 필요치 않았다.

본 논문의 고차 스펙트럴법은 자유표면의 분할갯수가  $N$ 일 때 그 산술 계산량이  $N \log N$ 에 비례하는 Fast-Fourier 방법을 사용하므로, 자유표면의 취급에 있어 매우 효율적이다.

#### 4. 계산결과 및 고찰

계산은 12% 두께를 갖는 NACA0012 대칭형 날개단면을 대상으로 하였다. 규일속도로 전진하는 수중익에 의한 발생파형을 Duncan[2]의 실험결과와 비교하였고, 규일속도로 전진하며 상하동요하는 수중익에 의한 발생파형, 후류 보오텍스 모양과 날개에 작용하는 동유체력의 계산결과를 보인다. 수치 시뮬레이션에서 수중익은 정지상태에서 출발하여 점진적인 가속과정을 거쳐 규일속도  $U$ 에 도달한다. 수중익의 가속방법은 다음과 같다 ( $T_{acc}$ 는 가속시간).

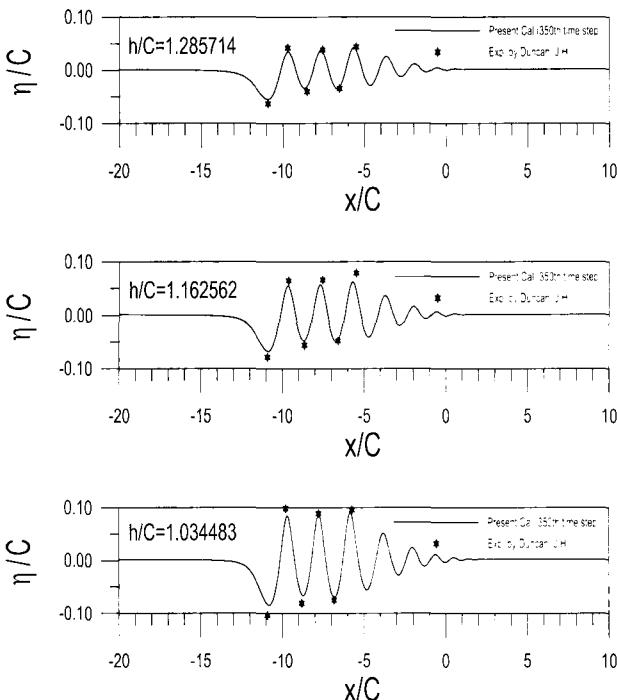


Fig.1 Comparison of the calculated free-surface profiles with Duncan's experimental results[2]. ( $\alpha=5^\circ$ ,  $Fn=0.566998$ ,  $M=3$ ,  $N=512$ ,  $\Delta x/C=0.08594$ ,  $U\Delta t/C=0.088779$ ,  $T_{acc}/\Delta t=200$ )

$$U_{inst}(t) = \begin{cases} -U * 0.5[1 - \cos(\pi t/T_{acc})], & 0 < t < T_{acc} \\ -U, & T_{acc} < t. \end{cases} \quad (17)$$

Fig.1에는 영각(attack angle)  $\alpha=5^\circ$  인 NACA0012 단면이  $x/C=11$  위치에서 출발하여 200스텝 점진 가속후  $Fn=U/(gC)^{0.5}=0.566998$  ( $C$ 는 코드길이)로 균속전진하는 경우, 세 가지 잠수깊이에 대한 발생파형을 Duncan[2]의 실험결과와 비교하고 있다. 잠수깊이  $h$ 는 정수면으로부터 날개 중심까지의 깊이이다. Duncan의 실험결과와 비교하여 본 수치계산 결과가 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. 잠수깊이가 가장 작은 경우는 다소 오차를 보이고 있으나, 이는 본 수치계산 조건과 Duncan의 실험 조건이 정확하게 일치하지 않음에 기인한 것으로 생각된다.

영각  $\alpha=5^\circ$  인 NACA0012 수중익이  $h/C=1.5$ 에서 200스텝 가속후  $Fn=1.0$ ,  $\omega^2 C/g=4.0$ ,  $A/C=0.05$  ( $\omega$ 는 동요원주파수,  $A$ 는 동요진폭)로 전진하며 상하동요하는 경우의 본 수치계산 결과가 Fig.2 ~ Fig.5에 보여지고 있다. 이러한 조화동요 문제에서도 동요진폭을 다음과 같이 점진적으로 증가시켰다.

$$A_{inst} = \begin{cases} A/T_{acc} * [t - T_{acc}/2\pi * \sin(2\pi*t/T_{acc})], & 0 < t < T_{acc} \\ A, & T_{acc} \leq t. \end{cases} \quad (18)$$

이 수치계산 예에서 수치수조의 길이는 날개길이의 약 77배이며, 자유표면에 약 500개 정도의 요소를 갖고 있다.

Fig.2에 보여진 동유체력에서 상하동요에 의한 진동현상을 볼 수 있고, 양력 평균은 양의 값을 갖고 모멘트 평균은 음의 값을 가짐을 알 수 있다. 양력계수는  $C_L = Lift/0.5\rho U^2 C$ , 항력계수는  $C_D = Drag/0.5\rho U^2 C$ , 모멘트계수는  $C_M = Moment/0.5\rho U^2 C^2$ 이다.  $\rho$ 는 유체밀도이고, 모멘트는 반시계 방향이 양이며 날개중앙에 대한 모멘트이다.

Fig.3에는 340스텝에서의 후류 보오텍스 모양이 보여지고 있다.  $\xi$ 는 날개 길이의 중앙에 중심을 둔 수평좌표이다. 실험 등에서 볼 수 있는 보오텍스가 감기며 넓게 확산되는 모습이 잘 나타나고 있다. 본 계산에서는 상부에 자유표면이 있으므로 보

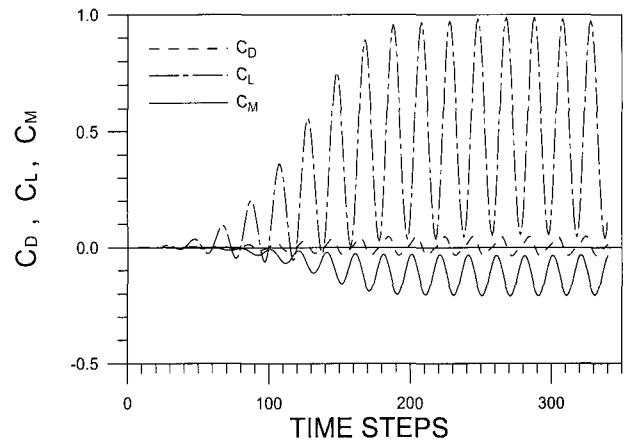


Fig.2 Time history of lift, drag and moment acting on the heaving and translating NACA0012 hydrofoil under the free-surface. ( $\alpha=5^\circ$ ,  $Fn=1.0$ ,  $h/C=1.5$ ,  $A/C=0.05$ ,  $\omega^2 C/g=4.0$ ,  $M=3$ ,  $N=512$ ,  $\Delta x/C=0.15$ ,  $U\Delta t/C=0.157086$ ,  $T_{acc}/\Delta t=200$ )

텍스의 상 방향 확산이 제한을 받아 보오텍스가 상하대칭이 아니다. Fig.4와 Fig.5에는 한주기 동안의 4 스텝에서 날개주위 표면파와 보오텍스 변화가 각각 보여지고 있다.

본 논문의 계산들에서 후류 보오텍스의 갯수는 매 계산스텝마다 하나씩 증가하며, 계산스텝이 증가할수록 이들 보오텍스의 영향계수 계산에 다소 많은 시간이 소요된다. Pentium4 1.7GHz 의 일반 PC를 사용하였고, 비선형 차수  $M = 3$ , 자유표면 요소 수  $N = 512$ , 날개 요소수  $N_b = 40$ 일 때 전체 340스텝 계산에 20분 정도의 시간이 소요되었다.

본 계산의 예들에서는 현상 그대로를 시뮬레이션하기 위해 매 스텝 발생하는 보오텍스를 그대로 유지하였다. 하지만, 날개 근처의 유동과 날개에 작용하는 유체력에만 중점을 둔다거나 혹은 균일속도 전진문제의 정상상태만을 얻고자 한다면, 이들 보오텍스를 그대로 유지할 필요는 없다. 즉 균일속도 전진문제의 정상상태만을 얻고자 한다면 후류요소를 충분히 긴 1개의 요소만 사용하여도 무방하며, 조화동요 문제에서도 날개로부터 충분히 떨어진 보오텍스들은 뭉쳐서 보다 적은 수의 보오텍스들로 대치하여도 날개주위 유동은 정확하게 계산할 수 있을 것이다. 단, 이러한 경우 과도구간 또는 날개에서 멀리 떨어진 후방에서의 유동은 실제현상과의 대응성을 상실한다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 2차원 수중익주위의 비선형/비정상 자유표면 유동을 다룰 수 있는 시간영역 수치해법으로, 고차 스펙트럴법

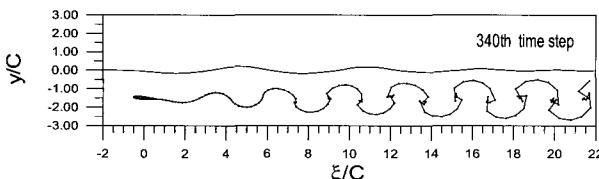


Fig.3 A view of the calculated vortex sheet for the heaving and translating NACA0012 hydrofoil under the free-surface.  
(Calculation parameters are the same as in Fig.2)

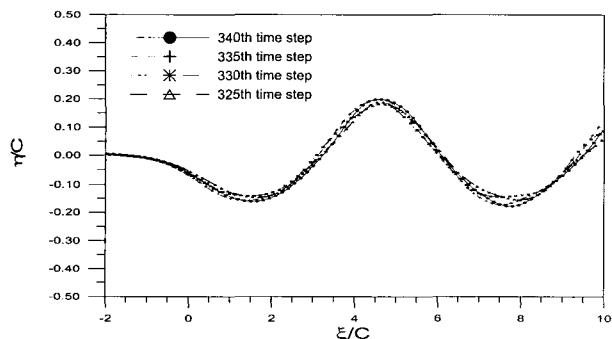


Fig.4 Free-surface elevations at 4 time steps during 1 period for the heaving and translating NACA0012 hydrofoil under the free-surface.(Calculation parameters are the same as in Fig.2)

과 경계적분법을 조합한 고차 스펙트럴/경계적분법을 적용하였다. 이 수치해법은 자유표면 유동의 시간영역 계산에 있어 매우 효율적이라 할 수 있다.

계산된 발생파형은 다른 실험결과와 비교적 좋은 일치를 보이고 있으며, 본 방법은 수중익주위 자유표면 유동의 다양한 문제들의 계산에 적용될 수 있다.

## 후 기

본 논문은 2000년 부경대학교 학술연구재단의 학술연구비에 의하여 지원되었음.

## 참고문헌

- [1] 김용직, “2차원 수중익주위 비선형 자유표면유동의 시간영역 시뮬레이션”, 대한조선학회 논문집, 제31권, 제2호 (1994).
- [2] Duncan, J.H. "The Breaking and Non-Breaking Wave Resistance of a Two-Dimensional Hydrofoil", J. of Fluid Mech., Vol.126 (1983), pp.507-520.
- [3] Suh, J.C., "Unsteady Analysis for a Two-Dimensional Foil in Uniformly Sheared Onset Flow", Ph.D.Thesis, Univ.of Michigan, USA (1990).
- [4] Lee, J.T., "A Potential Based Panel Method for the Analysis of Marine Propellers in Steady Flow", Ph.D.Thesis, MIT, USA (1987).
- [5] Dommermuth, D.G. and Yue ,D.K., "A High-Order Spectral Method for the Study of Nonlinear Gravity Waves", J. of Fluid Mech., Vol.184 (1987).
- [6] Brigham, E.O., The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall, Inc. (1988).

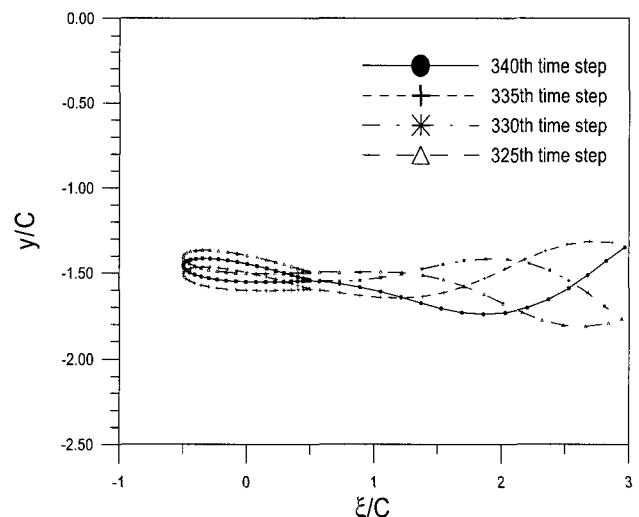


Fig.5 Shaded vortex sheets at 4 time steps during 1 period for the heaving and translating NACA0012 hydrofoil under the free-surface.(Calculation parameters are the same as in Fig.2)