Proceedings of Joint Conference of Korean Data And Information Science Society and Korean Data Analysis Society, June 21-22, 2002, pp. 141-149

Control Charts for Constant Failure Rate of System*

Gyo-Young Cho[1] *and Ok Hee Lee*[2]

Abstract

In this paper, we propose EWMA control charts using the life time data for the system with the constant failure rate, which were drawn from the fixed sampling interval without replacement (with replacement), and investigate the power of detection of EWMA by comparing ARL of EWMA control charts with one of Shewhart control charts.

KEY WORDS : EWMA Control Chart, Shewhart Control Chart, ARL

1. 서론

컴퓨터, 발전시스템, 통신시스템, 측정시스템 등의 노화에 따른 성능 변화를 정량적으로 측정할 수 있는 측도 중에 하나가 고장률이다. 고장률은 t시각 현재 작동된다는 조건하에 시스템의 단위시간당 고장확률로 정의되는 가동시간 t의 함수로 시스템의 분석을 가능하게 해준다. 일반적으로 시스템의 고장률은 가동시간에 따라 고장률이 감소하는 초기고장기간, 고장률이 비교적 낮고 일정한 우발고장기간, 마지막으로 고장률이 증가하는 마모고장기간을 거치는 욕조곡선의 형태를 띄는 경우가 많다.

생산된 시스템은 판매나 초기사용에 앞서 인위적으로 노화를 촉진시킴으로써 초기의 높은 고장률 부분을 제거시켜 안정화하는 번인(burn-in)과정을 거치는 경우가 많다. 이렇게 안정된 고장률은 마모고장기간에 이르기까지 증감이 거의 없는 상태를 유지하게 된다. 이렇게 고장률이 일정수준 이하로 유지되는 기간을 시스템의 내용수명기간으로 볼 수 있다. 내용수명기간은 대체로 우발고장기간으로 이루어진다고 할 수 있다. 따라서 시스템의 고장률관리는 시스템의 보전정책에 중요한 정보를 제공해 준다. 그러므로 관리도를 이용하여 고장률을 관리한다.

관리도의 형태는 슈하르트(Shewhart), 누적합(CUSUM), 지수가중이동평균(EWMA)등이 있다.

슈하르트관리도는 현재의 관측값만을 사용하여 공정의 상태를 판단하기 때문에 효율이 좀 떨어지지만 실제 적용이 단순하여 사용하기 쉽다.

---

*This paper was supported by Kyungpook National University Research Fund, 2000.

[1]Associate Professor, Department of statistics, Kyungpook National University, Daegu, 702-701, Korea
E-mail : gycho@knu.ac.kr

[2]Part-time Instructor, Department of Statistics, Kyungpook National University, Daegu, 702-701, Korea

Roberts (1959)에 의해 시작된 지수가중이동평균관리도는 최근의 측정치에다 더 큰 가중치를 주게 함으로써 공정의 작은 변화를 빨리 감지할 수 있다. Crowder (1987a, 1989)와 Lucas, Saccucci (1990)는 가중치와 관리한계값의 범위에 따라 평균런길이를 제공하여 가중치와 관리한계의 최적설정에 대한 연구를 하였다.

본 연구에서는 수명시험대상 시스템의 고장여부를 일정구간별로 관찰하여 얻은 수명자료를 이용하여 시스템의 고장률관리를 위한 지수가중이동평균관리도 즉 일종의 계수형 관리도를 제안하고 평균런길이를 이용하여 슈하르트관리도와 비교하여 그 탐지능력을 알아보고자 한다.

2. 수명관측모형

고장률관리도는 구간의 크기가 T로 일정한 구간별로 고장률이 λ인 시스템 중에서 랜덤 추출한 크기 n인 표본을 비복원 수명시험으로 관찰한 수명자료를 이용하는 경우와 고장발생 즉시 복원하는 방법의 복원 수명시험으로 관찰한 수명자료를 이용하는 경우로 나누어 고려하기로 하자.

비복원 수명시험의 경우 하나의 구간에서 관찰된 고장 시스템의 수를 r이라고 하자. 관측중단 시점 T에서 신뢰도 $R(T)$는 비모수적 추정량 $\widehat{R(T)} = \frac{n-r}{n}$을 이용하여 추정할 수 있다. 고장률 λ와 신뢰도 $R(T)$의 관계 $R(T) = \exp(-\lambda T)$ 를 이용하면 고장률의 추정량 $\hat{\lambda}$은

$$\hat{\lambda} = \frac{-\ln \frac{n-r}{n}}{T}, \quad r = 0, 1, \cdots, n \tag{2.1}$$

이 된다.

복원 수명시험의 경우는 T시간 동안 관찰되는 고장 시스템의 수 r은 평균이 $\lambda n T$인 포아송분포를 따른다. 즉 고장 시스템의 수 r은 포아송모수 $\lambda n T$의 최우추정량이다. 그러므로 고장률 λ의 추정량 $\hat{\lambda}$은

$$\hat{\lambda} = \frac{r}{nT}, \quad r = 0, 1, \cdots, n \tag{2.2}$$

이 된다.

3. 상수형 고장률에 대한 슈하르트관리도

슈하르트관리도는 목표값을 중심으로 관리상한선과 관리하한선을 가진 도표상에 시간이 경과하면서 관측된 관리통계량의 값을 표시해 나가는 통계적 절차이다.

3.1 비복원 수명시험

Grosh, Doris Lloyd (1989)의 부록 5D에 의하면 신뢰도 $R(T)$의 $100(1-2\alpha)\%$ 신뢰구간은

$$(R_L(2\alpha, n, r), R_U(2\alpha, n, r))$$

이다. 여기서

$$R_L(2\alpha, n, r) = \frac{1}{1+\frac{r+1}{n-r}F_\alpha(2r+2, 2n-2r)}$$

$$R_U(2\alpha, n, r) = \frac{F_\alpha(2n-2r+2, 2r)}{F_\alpha(2n-2r+2, 2r)+\frac{r}{n-r+1}}$$

이고 $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$는 F분포의 $100(1-\alpha)\%$ 백분위수이다.

우리는 상단측 슈하르트관리도만 고려하므로 고장률과 신뢰도의 관계로부터 고장률 λ의 $100(1-2\alpha)\%$ 신뢰구간은

$$\left(0, \frac{-\ln R_L(2\alpha, n, r)}{T}\right)$$

로 구해진다.

따라서 비복원 수명시험의 경우 식(2.1)에서 정의된 관리통계량을 사용하는 관리도의 관리중심선과 α확률한계선을 이용한 관리상한선, 관리하한선을 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$UCL = -\frac{\ln R_L(2\alpha, n, r_0)}{T}$$

$$CL = \lambda_0$$

$$LCL = 0 .$$

제안된 고장률관리도가 고장률의 변화를 탐지할 수 있는 능력을 알아보기 위해 평균런길이를 계산하면

$$\text{평균런길이}(ARL) = \frac{1}{1-L(\lambda)} \tag{3.1}$$

이 된다. 여기서

$$L(\lambda) = P(0 \le \hat{\lambda} \le UCL \mid \lambda) = P\left(-T \cdot UCL \le \ln\frac{n-r}{n} \le 0 \mid \lambda\right)$$

$$= P\left(e^{-T \cdot UCL} \le 1-\frac{r}{n} \le 1 \mid \lambda\right) = P\left(0 \le \frac{r}{n} \le 1-e^{-T \cdot UCL} \mid \lambda\right)$$

$$= P(0 \le r \le n[1-e^{-T \cdot UCL}] \mid \lambda) .$$

그리고 r은 고장률이 λ일 때 시행회수가 n이고 성공의 확률이 $1-e^{-\lambda T}$인 이항분포를 따르는 확률변수이다.

3.2 복원 수명시험

포아송분포와 감마분포의 관계를 이용하면 고장률 λ의 $100(1-2\alpha)\%$ 신뢰구간은

$$\left(0\,,\ \frac{\chi^2_{\alpha}(2r+2)}{2nT}\right)$$

으로 구해진다.

따라서 복원 수명시험의 경우 식 (2.2)에서 정의된 관리통계량을 사용하는 관리도의 관리중심선과 α확률한계선을 이용한 관리상한선, 관리하한선을 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned} UCL &= \frac{\chi^2_{\alpha}(2r_0+2)}{2nT} \\ CL &= \lambda_0 \\ LCL &= 0\ . \end{aligned}$$

3.1절에서와 같이 식(3.1)을 이용하여 평균런길이를 계산한다. 여기서

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= P(0 \le \hat{\lambda} \le UCL \mid \lambda) \\ &= P(0 \le r \le nT \cdot UCL \mid \lambda)\ . \end{aligned}$$

그리고 r은 고장률이 λ일 때 평균이 $n\lambda T$인 포아송분포를 따르는 확률변수이다.

제안된 관리도가 고장률의 변화를 탐지할 수 있는 능력을 구체적으로 알아보기 위하여 관리상태에 있을 때 시스템의 고장률λ가 0.05이고 각 관측구간의 관측시간 T가 10일 때 각 부분군의 크기 n이 50, 100, 200인 경우에 제안된 두 종류의 관리상한선과 관리도의 평균런길이를 계산한다. 관리상한선은 고장률 λ를 모르는 경우에는 예비표본으로부터 관찰된 $\bar{r}$를 이용하여 설정하지만 여기서는 편의상 r의 기대값을 이용하여 설정하였다. 각 관리도의 $L(\lambda)$는 IMSL STAT/LIBRARY의 BINDF, POIDF함수를 이용하여 계산한다. 평균런길이는 시스템이 관리상태에 있을 때 200이 되도록 목표값을 정하는데 두 종류 모두 관리통계량의 분포가 이산형이기 때문에 평균런길이를 정확하게 200이 되도록 맞출 수가 없다. 그러므로 r을 다음과 같이 두가지 경우로 나누어 평균런길이를 계산한다. 그 결과는 <표1>-<표6>과 같다.

표 1. **비복원 수명시험에 대한 슈하르트관리도의 평균런길이**(n=50)

λ	r=28	r=29
0.05	171.8213	400.0000
0.06	21.7391	40.8163
0.07	5.7723	9.0777
0.08	2.5404	3.4551
0.09	1.5751	1.9111
0.10	1.2204	1.3623

표 2. **비복원 수명시험에 대한 슈하르트관리도의 평균런길이**(n=100)

λ	r=51	r=52
0.05	144.5087	257.7320
0.06	9.9900	14.4259
0.07	2.4477	3.0017
0.08	1.3093	1.4330
0.09	1.0593	1.0899
0.10	1.0084	1.0143

표 3. **비복원 수명시험에 대한 슈하르트관리도의 평균런길이**(n=200)

λ	r=96	r=97
0.05	188.3239	285.7143
0.06	5.3573	6.6194
0.07	1.3833	1.4844
0.08	1.0273	1.0379
0.09	1.0008	1.0013
0.10	1.0000	1.0000

표 4. **복원 수명시험에 대한 슈하르트관리도의 평균런길이**(n=50)

λ	r=38	r=39
0.05	175.7469	290.6977
0.06	15.4226	21.6216
0.07	3.6907	4.5494
0.08	1.7124	1.9193
0.09	1.1997	1.2632
0.10	1.0497	1.0690

표 5. **복원 수명시험에 대한 슈하르트관리도의 평균런길이**(n=100)

λ	r=68	r=69
0.05	160.2564	230.9469
0.06	7.2998	8.9445
0.07	1.7756	1.8129
0.08	1.1073	1.1346
0.09	1.0095	1.0129
0.10	1.0004	1.0007

표 6. 복원 수명시험에 대한 슈하르트관리도의 평균런길이(n=200)

λ	$r=126$	$r=127$
0.05	191.5709	251.2563
0.06	3.6605	4.0947
0.07	1.1441	1.1695
0.08	1.0031	1.0040
0.09	1.0000	1.0000
0.10	1.0000	1.0000

비복원 수명시험보다는 복원 수명시험의 경우가 고장률 변화에 대한 탐지 능력이 높고, 부분군의 크기가 커질수록, 고장률의 변화가 커질수록 탐지 능력이 높아짐을 알 수 있다.

4. 상수형 고장률에 대한 지수가중이동평균관리도

관측시점 i에서 고장률의 추정량을 $\widehat{\lambda}_i \ (i=1,2,\cdots)$이라 할 때 지수가중이동평균 Y_i는 다음과 같다.

$$Y_i = (1-w)Y_{i-1} + w\widehat{\lambda}_i$$

$$Y_0 = \lambda_0 ,$$

여기서 w는 가중치(weight)를 나타내며 $0<w\le 1$이다. Y_0는 지수가중이동평균의 시작값으로서 고장률의 목표값 λ_0를 사용한다.

3절에서와 같이 제안된 고장률관리도가 고장률의 변화를 탐지할 수 있는 능력을 구체적으로 알아보기 위해 평균런길이를 계산한다. 런길이는 양의 정수값을 취하는 이산확률변수이므로 일반적으로 그 확률함수의 정확한 표현이 알려지지 않고 있으며 따라서 평균런길이도 정확한 값이 알려지지 않고 있다. 그러므로 우리는 모의실험을 통해 평균런길이를 계산한다.

모의실험 설계

- $\lambda_0 = 0.05$: 관리상태 일때
- h : 관리한계
- $n = 50, \ 100, \ 200$: 부분군의 크기
- $w = 0.1, \ 0.3, \ 0.5$: 가중치

상단측 지수가중이동평균관리도의 h값은 슈하르트관리도와 비교하기 위해 시스템이 관리상태에 있을 때 평균런길이가 200이 되도록 목표값을 정하였다.

먼저, 우리는 비복원 수명시험 일 경우에는 시행회수가 n이고 성공의 확률이 $1-e^{-\lambda T}$인 이항분포로부터, 복원 수명시험 일 경우에는 평균이 $\lambda n T$인 포아송분포로부터 난수를 생성한다. 그리

고 신호를 줄 때까지 조사한다. 만약 관리통계량이 주어진 관리한계 h**보다 크면 우리는 난수생성을 멈추고 런길이를 계산한다. 여기서** 10,000**을 반복한 후, 평균런길이를 계산한다. 이 모의실험 결과는** <**표**7>-<**표**12>**와 같다.**

표 7. **비복원 수명시험에 대한 지수가중이동평균관리도의 평균런길이**(n=50)

shift(λ)	ω=0.1 h=0.056486	ω=0.3 h=0.063601	ω=0.5 h=0.069641
0.05	200.0473	199.9983	199.9877
0.06	9.3957	10.2702	13.1157
0.07	4.2509	3.6915	3.8656
0.08	2.8628	2.2959	2.1935
0.09	2.2288	1.7068	1.5745
0.10	1.8853	1.3831	1.2749

표 8. **비복원 수명시험에 대한 지수가중이동평균관리도의 평균런길이**(n=100)

shift(λ)	ω=0.1 h=0.054351	ω=0.3 h=0.059148	ω=0.5 h=0.063141
0.05	200.0199	199.9931	199.9931
0.06	5.9352	5.6769	6.4264
0.07	2.9316	2.3995	2.2905
0.08	2.0510	1.5920	1.4362
0.09	1.6151	1.2217	1.1239
0.10	1.2856	1.0621	1.0257

표 9. **비복원 수명시험에 대한 지수가중이동평균관리도의 평균런길이**(n=200)

shift(λ)	ω=0.1 h=0.052993	ω=0.3 h=0.056274	ω=0.5 h=0.059002
0.05	199.9419	199.9659	200.0323
0.06	4.0186	3.422	3.5101
0.07	2.1224	1.6025	1.4296
0.08	1.5243	1.1153	1.0509
0.09	1.1243	1.0061	1.0014
0.10	1.0101	1.0000	1.0000

표 10. **복원 수명시험에 대한 지수가중이동평균관리도의 평균런길이**(n=50)

shift(λ)	ω=0.1 h=0.054941	ω=0.3 h=0.060636	ω=0.5 h=0.065347
0.05	200.0929	199.9921	199.9488
0.06	7.2791	7.4901	9.0057
0.07	3.4015	2.8707	2.8398
0.08	2.3074	1.8288	1.6871
0.09	1.8203	1.3752	1.2689
0.10	1.4866	1.1461	1.0870

표 11. 복원 수명시험에 대한 지수가중이동평균관리도의 평균런길이(n=100)

shift(λ)	ω=0.1 h=0.053472	ω=0.3 h=0.057480	ω=0.5 h=0.060734
0.05	199.8730	199.8905	199.9497
0.06	4.8565	4.4733	4.8076
0.07	2.4247	1.9296	1.7627
0.08	1.7293	1.2820	1.1780
0.09	1.2861	1.0478	1.0245
0.10	1.0544	1.0044	1.0018

표 12. 복원 수명시험에 대한 지수가중이동평균관리도의 평균런길이(n=200)

shift(λ)	ω=0.1 h=0.052450	ω=0.3 h=0.055226	ω=0.5 h=0.057491
0.05	199.9613	199.9837	199.9314
0.06	3.3378	2.8070	2.7091
0.07	1.8181	1.8884	1.1938
0.08	1.1811	1.0179	1.0050
0.09	1.0087	1.0001	1.0000
0.10	1.0001	1.0000	1.0000

비복원 수명시험보다는 복원 수명시험의 경우가 고장률 변화에 대한 탐지 능력이 높고, 부분군의 크기가 커질수록, 고장률의 변화가 커질수록 탐지 능력이 높아짐을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 시스템의 고장여부를 일정구간별로 관찰하여 얻은 수명자료를 이용하여 시스템의 고장률 관리도를 위한 계수형 관리도를 제안하고 평균런길이를 이용하여 탐지능력을 연구하였다.

두 관리도 모두 비복원 수명시험보다는 복원 수명시험의 경우가 고장률 변화에 대한 탐지 능력이 높고, 부분군의 크기가 커질수록, 고장률의 변화가 커질수록 탐지 능력이 높아짐을 알 수 있다. 또한 고장률의 변화가 작을 때에는 지수가중이동평균 관리도가 더 효율적이고, 고장률의 변화가 클 때에는 슈하르트 관리도가 더 효율적임을 알 수 있다.

참고문헌

[1]. Crowder, S. V. (1987a). A simple Method for studying Run-Length Distributions of Exponentially Weighted Moving Average Charts, *Technometrics*, Vol. 29

[2]. Crowder, S. V. (1989). Design of Exponentially Weighted Moving Average Schemes. *Journal of Quality Technology*, 21, 155-162.

[3]. Grosh, Doris Lloyd(1989). *A PRIME OF RELIABILITY THEORY*, John Wiey & Sons, Inc., New York.

[4]. Hunter, J. S. (1986). The Exponentially Weighted Moving Average. *Journal of Quality Technology*, 18, 203-210

[5]. *IMSL STAT/LIBRARY MANUAL* (1990). IMSL Inc.

[6]. Lucas, J. M. and Saccucci, M. S. (1990). Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements. *Technometrics*, 32, 1-12.

[7]. Roberts, S. W. (1959). Control chart Test, Based on Geometric Moving Averages, *Technometrics*, 1, 239-250.