Proceedings of Joint Conference of Korean Data And Information Science Society and Korean Data Analysis Society, June 21-22, 2002, pp. 97-106

Simultaneous Optimization for Robust Design Using Desirability Function to the Combined Array

Yong-Man Kwon[1], *Yeon-Woong Hong*[2]

Abstract

Taguchi parameter design, the product-array approach using orthogonal arrays is mainly used. However, it often requires an excessive number of experiments. An alternative approach, which is called the combined-array approach, was suggested by Welch et. al. and studied by others. In these studies, only single quality characteristic was considered. We propose how to simultaneously optimize multiple quality characteristics using desirability function when we used the combined-array approach to assign control and noise factors. An example is illustrated to the combined-array approach.

1. 서론

다구찌 품질공학(Taguchi [1986])은 제품의 설계단계에서부터 품질관리의 전 분야에 걸쳐서 품질을 개선하는데 있어서 큰 기여를 하였다. 이전의 실험계획법에서는 단지 품질특성치의 평균를 개선하는데 초점을 두고 최적조건을 찾는 경향이 있었으나 다구찌 품질공학에서는 품질특성의 평균뿐만 아니라 변동을 가능한 줄이는 것을 목적으로 한다는 점에서 차이가 있다. 다구찌 파라미터 설계에서 직교배열표를 이용한 교차배열(product array)은 제어인자와 잡음인자의 모든 교호작용을 고려한 실험배치를 하여 자료분석을 하였다. 교차배열에서 잡음인자는 품질특성치의 품질변동을 유발시키는 역할을 함으로써 변동에 둔감하면서 동시에 품질특성치의 평균을 목표치에 접근하는 제어인자의 최적조건을 찾을 수 있는 로버스트 설계를 가능하게 한다.

파라미터 설계에서 교차배열은 제어인자와 잡음인자의 모든 교호작용을 고려함으로써 실험수가 지나치게 많을 뿐 아니라 축차실험을 고려하지 않는 등 많은 단점을 가지고 있다. 따라서 실험수를 줄일 수 있을 뿐 아니라 기존의 잘 정립된 실험계획법 이론을 이용한 대체방안이 연구되고 있다. 그 중에서 통합배열접근법(combined array approach)이 Welch, Yu, Kang, 와 Sacks(1990)에 의해

[1]Associate Professor, Dept. of Computer Science and Statistics, Chosun University, Kwangju, 501-759, Korea.

[2]Associate Professor, Dept. of Industrial Engineering, Dongyang University Yongju, Kyungpook, 750-012, Korea

처음으로 제안되었다. 그 이후로 Vining와 Myers (1990) 그리고 Box와 Jones(1992)등에 의하여 연구되었다. 통합배열이란 잡음인자를 제어인자와 같이 하나의 실험배열에 배치하는 실험방법을 말한다.

대부분의 실험계획에서는 품질특성이 한 개인 경우 설계인자들의 최적조건을 찾고 있으나 실제 실무에서는 어떤 경우의 실험계획에 관한 문제이든 동시에 고려하여야 할 품질특성이 여러 개인 경우 즉, 다특성(multiple quality characteristics)인 경우가 대부분이다. 다특성에서 설계인자의 최적조건을 찾는 방안은 Derringer와 Suich(1980), Khuri와 Conlon(1981)등에 의하여 이루어졌다. Derringer와 Suich(1980)는 기대함수를 이용한 다특성 동시 최적화 방안을 그리고 Khuri와 Conlon(1981)은 거리함수(distance function)을 이용한 다특성 동시 최적화 방안을 제시하였다. 그러나 앞서 제시된 방안들은 품질변동을 고려하지 않은 동시 최적화 방안이다. 또한 다구찌 파라미터 설계에서 다특성에 관한 연구는 거의 되어있지 않는 실정이다.

본 논문의 목적은 Derringer와 Suich(1980)가 제시한 기대함수를 이용하여 통합배열에 의한 실험배치에서 로버스트 설계를 위한 다특성 동시 최적화 방안을 제안하고 다구찌 방법론과 비교하여 새로이 제안한 방법이 보다 효율적임을 보이는데 있다. 2절에서는 새로운 다특성 동시 최적화 방안을 제안하고 3절에서는 본 논문에서 제안한 최적화 방안에 대한 예를 들었고 4절에서는 본 논문의 이점을 제시하였다.

2. 로버스트 설계를 위한 동시 최적화

2.1 다변량선형모형에서 추정된 평균모형과 분산모형

품질특성 y는 제어인자들($\underline{x}$)과 잡음인자들($\underline{z}$)에 의해 값이 정해진다고 가정하자. 제어인자들과 잡음인자들을 각 각 $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_l)'$와 $\underline{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)'$로 나타내기로 하자. 실험수는 N이고 종속변수들의 개수를 r 이라고 하면 i 번째 품질특성의 이차회귀모형은 다음과 같다.

$$y_i(\underline{x}, \underline{z}) = \beta_{i0} + \underline{x}'\underline{\beta}_i + \underline{x}'B_i\underline{x} + \underline{z}'R_i\underline{z} + \underline{z}'\underline{\gamma}_i + \underline{z}'D_i\underline{x} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, r, \tag{2.1}$$

여기서 $\underline{\beta}_i$는 $l \times 1$, $\underline{\gamma}_i$는 $m \times 1$, $B_i' = B_i$는 $l \times l$, $R_i' = R_i$는 $m \times m$, D_i는 $m \times l$인 모집단의 회귀계수들의 벡터 혹은 행렬이고 ε_i는 i번째 품질특성에서의 실험오차이다. 식(2.1)을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\underline{y}_i = X\underline{\theta}_i + \underline{\varepsilon}_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, r, \tag{2.2}$$

여기서 $\underline{y}_i$는 i 번째 품질특성에서의 측정치의 $N \times 1$ 벡터이고, X는 $N \times p$ 행렬인 계획행렬(design matrix)이고 계수는 p, i번째 품질특성에서의 $\underline{\theta}_i$ 는 $p \times 1$인 모집단의 회귀계수들의 벡터이고 $\underline{\varepsilon}_i$는

실험오차의 벡터이다. 식 (2.2)와 관련된 가정으로

$$E(\underline{\varepsilon}_i) = \underline{0},\ Var(\underline{\varepsilon}_i) = \sigma_{ii} I_N,\ Cov(\underline{\varepsilon}_i, \underline{\varepsilon}_j) = \sigma_{ij} I_N \qquad i,j = 1,2,\cdots,r,\quad i \neq j \tag{2.3}$$

이 성립된다고 하자. 다변량선형회귀모형식 (2.2)로부터 식(2.3)의 가정이 성립되는 경우에는 보통최소제곱(ordinary least squares(OLS))추정과 일반최소제곱(generalized least squares(GLS))추정과 동일하다(Huang (1970, p.188)을 보시오). 따라서 최소제곱법에 의하여 회귀계수를 추정하면 적합된 2차회귀모형은 다음과 같다.

$$\hat{y}_i(\underline{x},\underline{z}) = b_{i0} + \underline{x}'\underline{b}_i + \underline{x}'\hat{B}_i\underline{x} + \underline{z}'\hat{R}_i\underline{z} + \underline{z}'\underline{r}_i + \underline{z}'\hat{D}_i\underline{x}, \qquad i = 1,2,\cdots,r. \tag{2.4}$$

식(2.4)에 대하여 Box와 Jones(1992)는 통합배열접근법에서 제어인자와 잡음인자의 함수로 되어있는 하나의 품질특성에서 평균모형과 분산모형을 분리하였다. 그러나 본 논문에서는 품질특성이 여러 개인 경우에 추정된 평균모형과 분산모형을 정의하기로 한다. 잡음인자들 $\underline{z}$는 실험할 때는 제어할 수 있으나 실제로는 제어할 수 없는 확률변수들이다. $\underline{z}$에 관한 다른 지식이 없는 경우 흥미영역 R_z에서 일양분포를 한다고 가정하자. 우리는 잡음인자 $\underline{z}$의 범위에서의 어떤 $\underline{x}$에서 평균을 $\widehat{m}_i(\underline{x})$로 나타내기로 하고 이를 " i번째 추정된 평균모형"이라 하면 다음과 같다.

$$\widehat{m}_i(\underline{x}) = \int_{R_z} \hat{y}_i(\underline{x},\underline{z})p(\underline{z})d\underline{z}, \qquad i = 1,2,\cdots,r,$$

여기서 $p(\underline{z})$는 $\underline{z}$의 확률밀도함수이며 $\underline{z}$는 $R_z(-1 \le z \le 1)$에서 일양분포를 한다. Box와 Jones(1992)는 평균모형식은 다음과 같다고 하였다.

$$\widehat{m}_i(\underline{x}) = b_{i0} + \underline{x}'\underline{b}_i + \underline{x}'\hat{B}_i\underline{x} + (tr\,\hat{R}_i)/3, \qquad i = 1,2,\cdots,r, \tag{2.5}$$

여기서 $tr(\hat{R}_i)$는 행렬 $\hat{R}_i$의 대각선 원소들의 합이다. 한편, 우리는 i번째 품질특성의 추정된 평균모형에 대한 평균제곱변동(mean square variation)을 $\hat{v}_i(\underline{x})$라 하면 다음과 같다.

$$\hat{v}_i(\underline{x}) = \int_{R_z} (\hat{y}_i(\underline{x},\underline{z}) - \widehat{m}_i(\underline{x}))^2 p(\underline{z})d\underline{z}, \qquad i = 1,2,\cdots,r.$$

Box와 Jones(1992)는 평균제곱변동은 다음과 같다고 하였다.

$$\hat{v}_i(\underline{x}) = (\underline{r}_i + \hat{D}_i\underline{x})'(\underline{r}_i + \hat{D}_i\underline{x})/3 + \hat{A}_i, \qquad i = 1,2,\cdots,r, \tag{2.6}$$

여기서 $\hat{A}_i = [4\Sigma_{j=1}^{m}(r^i_{jj})^2 + 5\Sigma_{j=1}^{m-1}\Sigma_{k=j+1}^{m}(r^i_{jk})^2]/45$이고 $\gamma_{jk}{}^i$는 $\hat{R}_i$의 j번째 행과 k번째 열

의 원소이다. 우리는 $\hat{v}_i(\underline{x})$를 " i번째 추정된 분산모형"이라고 하자.

2.2 품질평균에 대한 최적화 방안

2.1절에서는 통합배열에 의한 실험배치에서 품질의 평균을 품질특성의 개수만큼 추정할 수 있었다. 우리는 Derringer와 Suich(1980)가 제시한 기대함수를 이용하여 품질의 평균을 망목특성, 망소특성 그리고 망대특성으로 변환하여 새로운 최적화 방안을 제안하고자 한다.

추정된 평균모형 $\widehat{m}_i(\underline{x})$를 기대함수 $d_i(\underline{x})$ $(0 \le d_i(\underline{x}) \le 1)$로 변형시킨 다음 r개의 평균모형들에 대한 총기대함수를 기하평균을 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$D_m(\underline{x}) = (d_1(\underline{x}) \times d_2(\underline{x}) \times \cdots \times d_r(\underline{x}))^{1/r} \tag{2.7}$$

따라서 r개의 평균모형 대한 최적화 방안을 다음과 같이 제안한다.

$$\max_{\underline{x} \in R_x} D_m(\underline{x}) = \max_{\underline{x} \in R_x} (d_1(\underline{x}) \times d_2(\underline{x}) \times \cdots \times d_r(\underline{x}))^{1/r}. \tag{2.8}$$

여기서 R_x는 제어인자들 $\underline{x}$의 흥미영역을 나타낸다. 우리는 식(2.8)로부터 품질평균만을 고려하였을 때 제어인자들의 집합 $\underline{x} = (x_1, x_2 \cdots, x_l)'$에 대한 최적점을 구할 수 있게 된다.

모든 품질특성은 크게 망목특성, 망소특성 그리고 망대특성과 같이 세 가지 종류로 분류되고 추정한 평균모형도 역시 세 가지 종류로 분류할 수 있다. 따라서 우리는 평균모형에 대한 세 가지 종류의 기대함수 $d_i(\underline{x})$를 다음과 같이 제안하고자 한다.

2.2.1 망대특성의 기대함수

품질특성이 망대특성인 경우 추정된 회귀모형식을 식(2.4)과 같이 정의한다면 i번째 품질특성의 추정된 평균모형 $\widehat{m}_i(\underline{x})$의 값도 또한 클 수록 좋은 망대특성이 된다. 따라서 평균모형 $\widehat{m}_i(\underline{x})$가 클수록 기대함수 $d_i(\underline{x})$값도 커진다. $\widehat{m}_i(\underline{x})$를 최대로 하여야 할 경우에는 $d_i(\underline{x})$를 다음과 같이 단측변환 할 수 있다.

$$d_i(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \widehat{m}_i(\underline{x}) \le m_{i*} \\ \left[\dfrac{\widehat{m}_i(\underline{x}) - m_{i*}}{m_i^* - m_{i*}} \right]^q & m_{i*} \le \widehat{m}_i(\underline{x}) < m_i^* \\ 1 & m_i^* \le \widehat{m}_i(\underline{x}) \end{cases} \tag{2.9}$$

여기서 m_{i*}는 $\min_{\underline{x} \in R_x} \widehat{m}_i(\underline{x})$, m_i^*는 $\max_{\underline{x} \in R_x} \widehat{m}_i(\underline{x})$ 그리고 q는 임의의 실수값을 나타낸다. 망대특성에서 m_i^*는 $\widehat{m}_i(\underline{x})$의 목표치가 된다. 따라서 $\widehat{m}_i(\underline{x})$가 m_i^*일 때 $d_i(\underline{x})$값이 1로 최대로

바람직한 상태가 된다. 목표치 $\widehat{m}_i(\underline{x})$ 가 m_{i*}에서 급속하게 증가하는 것이 바람직하다면 q 에 큰 가중치를 주고 그렇지 않으면 q에 작은 가중치를 준다.

2.2.2 망소특성의 기대함수

품질특성이 망소특성인 경우 품질특성의 추정된 평균모형의 값도 또한 작을 수록 좋은 망소특성이 된다. $\widehat{m}_i(\underline{x})$의 값이 작을 수록 d_i가 커질 경우, 즉 $\widehat{m}_i(\underline{x})$을 최소로 하여야 할 경우에는 $d_i(\underline{x})$를 다음과 같이 단측변환 한다.

$$d_i(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & m_i^* \le \widehat{m}_i(\underline{x}) \\ \left[\dfrac{m_i^* - \widehat{m}_i(\underline{x})}{m_i^* - m_{i*}}\right]^p & m_{i*} \le \widehat{m}_i(\underline{x}) \le m_i^* \\ 1 & \widehat{m}_i(\underline{x}) \le m_{i*} \end{cases} \tag{2.10}$$

여기서 p는 임의의 실수값를 나타낸다. 망소특성에서 m_{i*}는 $\widehat{m}_i(\underline{x})$의 목표치가 된다. 따라서 $\widehat{m}_i(\underline{x})$가 m_{i*}일 때 $d_i(\underline{x})$값이 1로 최대로 바람직한 상태가 된다. $\widehat{m}_i(\underline{x})$ 가 목표치 m_{i*}에서 급속하게 증가하는 것이 바람직하다면 p 에 큰 가중치를 주고 그렇지 않으면 p에 작은 가중치를 부여하면 된다.

2.2.3 망목특성의 기대함수

품질특성이 망목특성인 경우 품질특성의 추정된 평균모형 $\widehat{m}_i$의 값도 또한 특정한 값 즉, 목표치 τ_i가 좋은 망목특성이 된다. $\widehat{m}_i$는 목표치 τ_i에서 d_i가 커질 경우 다음과 같이 $d_i(\underline{x})$를 양측변환 한다.

$$d_i(\underline{x}) = \begin{cases} \left[\dfrac{\widehat{m}_i(\underline{x}) - m_i^*}{\tau_i - m_i^*}\right]^s & m_i^* \le \widehat{m}_i(\underline{x}) \le \tau_i \\ \left[\dfrac{\widehat{m}_i(\underline{x}) - m_i^*}{\tau_i - m_i^*}\right]^t & \tau_i \le \widehat{m}_i(\underline{x}) \le m_i^* \\ 0 & \widehat{m}_i(\underline{x}) \le m_{i*} \text{ 또는 } \widehat{m}_i(\underline{x}) \ge m_i^* \end{cases} \tag{2.11}$$

여기서 s와 t는 임의의 실수이다. 망목특성에서 s는 망대특성에서의 q와 망목특성에서 t는 망소특성에서 p의 값과 같은 성질을 가지고 있다,

2.3 품질변동에 대한 최적화 방안

모든 품질특성의 품질변동은 작으면 작을 수록 좋기 때문에 망소특성의 성질을 가지고 있다고 할 수 있다. 따라서 반응함수의 i번째 추정된 분산모형의 값도 또한 작을수록 좋은 망소특성이 된

다. 우리는 품질변동의 망소특성을 이용하여 품질변동에 대한 새로운 최적화 방안을 제안하고자 한다. 먼저 i번째 추정된 분산모형 $\widehat{v_i}(\underline{x})$를 i번째 기대함수 $d_i^*(\underline{x})$ $(0 \le d_i^*(\underline{x}) \le 1)$로 단측변환을 한 다음 r개의 분산모형에 대한 총 기대함수를 기하평균을 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$D_v(\underline{x}) = (d_1^*(\underline{x}) \times d_2^*(\underline{x}) \times \cdots \times d_r^*(\underline{x}))^{1/r} \tag{2.12}$$

따라서 식(2.12)에서 r개의 분산모형에 대한 최적화 방안을 다음과 같이 제안한다.

$$\max_{\underline{x} \in R_x} D_v(\underline{x}) = \max_{\underline{x} \in R_x} (d_1^*(\underline{x}) \times d_2^*(\underline{x}) \times \cdots \times d_r^*(\underline{x}))^{1/r} \tag{2.13}$$

식(2.13)으로부터 품질변동만을 고려할 때 제어인자에 대한 최적점을 구할 수 있게 된다.

한편, 품질변동은 망소특성이므로 $\widehat{v_i}(\underline{x})$의 값이 작을수록 $d_i^*(\underline{x})$의 값이 커질 경우, 즉 $\widehat{v_i}(\underline{x})$를 최소로 하여야 할 경우에는 다음과 같이 단측변환 한다.

$$d_i^*(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & v_i^* \le \widehat{v_i}(\underline{x}) \\ \left[\dfrac{v_i^* - \widehat{v_i}(\underline{x})}{v_i^* - v_{i*}} \right]^w & v_{i*} \le \widehat{v_i}(\underline{x}) \le v_i^* \\ 1 & \widehat{v_i}(\underline{x}) \le v_{i*} \end{cases} \tag{2.14}$$

여기서 v_{i*}는 $\min_{\underline{x} \in R_x} \widehat{v_i}(\underline{x})$, v_i^*는 $\max_{\underline{x} \in R_x} \widehat{v_i}(\underline{x})$ 그리고 w는 임의의 실수값을 나타낸다. 우리는 제어인자 $\underline{x}$의 값들이 주어질 때 $\widehat{v_i}$는 $\widehat{v_i}(\underline{x})$의 값을 나타내고 d_i^*는 $d_i^*(\underline{x})$의 값을 나타내기로 하자.

2.4 동시최적화 방안과 최적화 수법

품질특성이 여러 개인 경우 로버스트 설계를 하기 위한 동시최적화 방안으로 앞서 우리가 제안한 품질평균에 대한 총기대함수 $D_m(\underline{x})$과 품질변동에 대한 총기대함수 $D_v(\underline{x})$를 동시에 고려한 동시최적화 방안을 생각해 볼 수 있을 것이다. 로버스트 설계를 위한 다특성 동시최적화 방안을 다음과 같이 제안하고자 한다.

$$S_M = \max_{\underline{x} \in R_x} S_M(\underline{x}) = \max_{\underline{x} \in R_x} [\lambda D_m(\underline{x}) + (1 - \lambda) D_v(\underline{x})] \tag{2.15}$$

여기서 λ는 0과 1사이의 실수이다. λ는 품질평균에 대한 총 기대함수 $D_m(\underline{x})$과 품질변동에 대한 총기대함수 $D_v(\underline{x})$에 대한 가중치이다. λ가 클수록 품질평균에 대한 중요성이 커지는 것이며 λ가 작을수록 품질변동에 대한 중요성이 커지는 것이다.

본 논문에서 제안한 최적화 공식에 의한 제어인자들의 최적해를 찾는 방법으로 MATLAB 5.3 for Windows의 최적화 도구상자에서 함수 constr을 이용하였다. 자세한 최적화 과정은 다음 장에서 살펴보도록 하자.

3. 예 제

로버스트 설계를 위한 다특성 동시 최적화 방안에서 우리가 2절에서 제안한 통합배열접근법에 의한 최적화 방안을 예제를 통하여 비교 연구하고자 한다. <표 1>은 통합배열에 의한 실험자료인데 제어인자 x_1, x_2 그리고 x_3와 잡음인자 z를 하나의 직교배열 $L_{18}(2^1\times3^7)$에 실험배치 한다. 직교배열 $L_{18}(2^1\times3^7)$에서 교호작용은 1열과 2열에서 추정이 가능하나 다른 열에서는 고르게 교락되어 있어 주효과만을 고려한 실험배치이므로 잡음인자는 5열부터 8열까지 어디에 배치해도 문제가 없으므로 일단 여기에서는 8열에 배치하기로 하자. 아울러 강도 자료 y_1, 마모 자료 y_2와 치수 자료 y_3에 대한 가상적인 자료가 있다.

<표 1> 통합배열에 의한 실험자료

Source	e	A	B	C	e	e	e	Z	y_1	y_2	y_3
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	222	32	174
2	-1	-1	0	0	0	0	0	0	181	25	170
3	-1	-1	1	1	1	1	1	1	262	28	164
4	-1	0	-1	-1	0	0	1	1	187	31	88
5	-1	0	0	0	1	1	-1	-1	222	22	103
6	-1	0	1	1	-1	-1	0	0	303	28	92
7	-1	1	-1	0	-1	1	0	1	211	16	206
8	-1	1	0	1	0	-1	1	-1	190	27	185
9	-1	1	1	-1	1	0	-1	0	290	21	169
10	1	-1	-1	1	1	0	0	-1	195	30	126
11	1	-1	0	-1	-1	1	1	0	212	30	139
12	1	-1	1	0	0	-1	-1	1	296	19	142
13	1	0	-1	0	1	-1	1	0	193	19	115
14	1	0	0	1	-1	0	-1	1	168	31	83
15	1	0	1	-1	0	1	0	-1	312	27	112
16	1	1	-1	1	0	1	-1	0	210	35	181
17	1	1	0	-1	1	-1	0	1	165	29	202
18	1	1	1	0	-1	0	1	-1	317	26	228
SUM									4136	476	2679

식(2.4)을 이용하여, <표 1>로부터 추정된 2차 회귀모형은 각 각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\widehat{y_1}(\underline{x}) = \; & 194.42 - 0.30x_1 + 59.18x_2 + 2.18x_3 - 2.28x_1^2 + 65.63x_2^2 \\ & - 12.73x_3^2 - 3.33x_1x_2 + 18.68x_1x_3 - 1.32x_2x_3 - 10.75z \\ & + 13.76x_1z - 0.85x_2z - 3.18x_3z + 23.33z^2\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\widehat{y_2}(\underline{x}) = \ & 20.61 - 1.55x_1 - 1.45x_2 + 1.33x_3 + 1.35x_1^2 - 1.21x_2^2 \\ & + 8.28x_3^2 + 1.24x_1x_2 + 1.02x_1x_3 + 0.42x_2x_3 - 0.06z \\ & - 0.81x_1z - 1.90x_2z + 0.52x_3z + 0.32z^2\end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}\widehat{y_3}(\underline{x}) = \ & 102.36 + 24.45x_1 - 5.54x_2 - 4.55x_3 + 86.84x_1^2 - 3.54x_2^2 \\ & - 13.26x_3^2 - 7.90x_1x_2 - 11.77x_1x_3 + 16.53x_2x_3 - 14.61z \\ & - 1.33x_1z - 8.72x_2z + 13.38x_3z - 0.32z^2\end{aligned} \quad (3.3)$$

식(3.1), 식(3.2) 그리고 식(3.3)으로부터 식(2.5)와 식(2.6)를 이용하면, 다음과 같은 추정된 평균모형식과 분산모형식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\widehat{m_1}(\underline{x}) = \ & -0.30x_1 + 59.18x_2 + 2.18x_3 - 2.28x_1^2 + 65.63x_2^2 \\ & - 12.73x_3^2 - 3.33x_1x_2 + 18.68x_1x_3 - 1.32x_2x_3 + 195.23\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{m_2}(\underline{x}) = \ & -1.55x_1 - 1.45x_2 + 1.33x_3 + 1.35x_1^2 - 1.21x_2^2 \\ & + 8.28x_3^2 + 1.24x_1x_2 + 1.02x_1x_3 + 0.42x_2x_3 + 20.72\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{m_3}(\underline{x}) = \ & 24.45x_1 - 5.54x_2 - 4.55x_3 + 86.84x_1^2 - 3.54x_2^2 \\ & - 13.26x_3^2 - 7.90x_1x_2 - 11.77x_1x_3 + 16.53x_2x_3 + 102.25\end{aligned}$$

$$\widehat{v_1}(\underline{x}) = (2.67x_1 - 10.79x_2 - 0.55x_3 + 11.22)^2/3 + 48.36$$

$$\widehat{v_2}(\underline{x}) = (-0.81x_1 - 1.90x_2 + 0.52x_3 - 0.06)^2/3 + 0.01$$

$$\widehat{v_3}(\underline{x}) = (-1.33x_1 - 8.72x_2 + 13.38x_3 - 14.61)^2/3 + 0.01$$

흥미영역 R_x는 $-1 \le x_1, x_2 . x_3 \le 1$의 범위에서 움직이며, R_x 상에서 평균모형에 대해서 최대값과 최소값을 구해보면 다음과 같은 결과가 나온다. $\widehat{m_1}(\underline{x})$는 $m_{1*} = 145.393$에서 최소값을 가지며, $m_1^* = 331.042$에서 최대값을 갖게 됨을 알 수 있다. $\widehat{m_2}(\underline{x})$와 $\widehat{m_3}(\underline{x})$에 대해서도 마찬가지 방법으로 최소값과 최대값을 구하면 다음과 같다.

$$m_{1*} = 145.393 \le \widehat{m_1}(\underline{x}) \le m_1^* = 331.042$$

$$m_{2*} = 17.943 \le \widehat{m_2}(\underline{x}) \le m_2^* = 33.490$$

$$m_{3*} = 70.131 \le m_3(\underline{x}) \le m_3^* = 223.781$$

또한 분산모형에 대해서도 같은 방법으로 구해보면 $\widehat{v_1}(\underline{x})$에서 $v_{1*} = 0.519$는 최소값이며 $v_1^* = 271.965$는 최대값이다. $\widehat{v_2}(\underline{x})$와 $\widehat{v_3}(\underline{x})$에 대해서도 마찬가지 방법으로 최대값과 최소값을 구하면 다음과 같다.

$$v_{1*} = 0.519 \le \widehat{v_1}(\underline{x}) \le v_1^* = 271.965$$

$$v_{2*} = 0.009 \le \widehat{v_2}(\underline{x}) \le v_2^* = 3.612$$

$$v_{3*} = 2.741 \le \widehat{v_3}(\underline{x}) \le v_3^* = 207.585$$

한편 강도 자료 y_1은 망대특성, 마모 자료 y_2는 망소특성이며 치수 자료 y_3는 망목특성이며 목표치 τ는 150으로 설정되었으므로 평균모형에 관한 기대함수는 y_1은 식(2.9), y_2는 식(2.10) 그리고 y_3는 식(2.11)을 적용하며 분산모형에 관한 기대함수는 식(2.14)를 적용한다. <표 2>은 우리가 제안한 동시 최적화 방안 S_M에서 품질평균과 품질변동에 대한 기대함수 식(2.9), 식(2.10), 식(2.11) 그리고 식(2.14)에서 지수 q, s, t, 그리고 w는 각 각 1을 사용하여 즉, 선형변환 하여 제어인자의 최적조건을 찾은 결과이다. <표 2>에서 λ가 0.3 일 때는 품질변동의 가중치는 0.7이며 이 때 제어인자의 최적조건은 x_1=-1.00, x_2=1.00, x_3=-0.37, S_M값은 0.62, 평균모형의 기대함수 값은 y_1에서 0.98, y_2에서 0.83, y_3에서 0.98 이고 분산모형의 기대함수 값은 y_1에서 0.72, y_2에서 0.17 그리고 y_3에서 1.00이다.

<표 2> 동시 최적화 방안 S_M

						평 균			분 산		
λ	1- λ	x_1	x_2	x_3	S_M	d_1	d_2	d_2	d_1*	d_2*	d_2*
0.1	0.9	-1.00	1.00	-0.37	0.54	0.98	0.83	0.98	0.72	0.17	1.00
0.3	0.7	-1.00	1.00	-0.37	0.62	0.98	0.83	0.98	0.72	0.17	1.00
0.5	0.5	-1.00	1.00	-0.36	0.71	0.98	0.83	0.99	0.72	0.17	0.99
0.7	0.3	-1.00	1.00	-0.33	0.80	0.98	0.84	1.00	0.73	0.16	0.96
0.9	0.1	-0.96	1.00	-0.12	0.90	0.96	0.89	1.00	0.73	0.14	0.77

4. 결론

본 논문에서는 기대함수를 이용하여, 품질평균에 대해서 망대, 망소특성의 단측변환과 망목특성의 양측변환을 새로이 정의하고 또한 품질변동을 망소특성으로 제안하고 분석하였다. 평균모형에 대한 최적화 방안과 분산모형의 최적화 방안와 두 모형에 대한 최적화 방안을 이용하여 품질변동과 품질평균을 동시에 고려한 다특성 동시 최적화 방안을 제안하였다. 다구찌의 동시 최적화 방안은 제어인자의 수준만을 택하여야 하기 때문에 하나의 제어인자가 서로 다른 수준에서 두 개 이상의 품질특성치에서 동시에 유의한 경우 타협조건을 찾을 수 없었으나 우리가 제안한 방법은 흥미영역 내에서 최적조건을 찾기 때문에 타협조건 찾기가 용이한 장점이 있다. 로버스트 설계에서 실험배치 방법은 크게 교차배열과 통합배열이 있는데 새로이 제안한 최적화 방안은 통합배열을 이용함으로써 기존의 잘 정립된 실험계획법 이론을 활용할 수 있어 다구찌 파라미터 설계에서 단점으로 지적된 제반 문제점을 해결할 수 있는 대체방안이 될 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] Box, G. E. P. and Jones, S. P. (1992). "Designing Products That Are Robust to the Environment," *Total Quality Management*. Vol. 3, pp. 265-282

[2] Derringer, G. and Suich, R. (1980). "Simultaneous Optimization of Several Response Variable s," *Journal of Quality Technology*, Vol. 12, pp. 214-219.

[3] Huang, D. S. (1970). *Regression and Econometrics Methods*, John Wiley & Sons, New York.

[4] Khuri, A. I. and Conlon, M. (1981). "Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Functions," *Technometrics*. Vol. 23, pp. 363-375.

[5] Taguchi, G. (1986). *Introduction to Quality Engineering : Designing Quality Into Products and Process*, UNIPUB / Kraus International, White Plains, NY.

[6] Vining, G. G. and Myers, R. H. (1990). "Combining Taguchi and Response Surface Philosophies : A Dual Response Approach," *Journal of Quality Technology*, Vol. 22, pp. 38-45.

[7] Welch, W. J., Yu, T .K. Kang, S. M. and Sacks, J. (1990). "Computer Experiments for Quality Control by Parameter Design," *Journal of Quality Technology*, Vol. 22, pp. 15-22.