

저주파필터를 이용한 Theodorsen 방정식 해법의 수렴성에 관한 연구

송은지
남서울대학교 컴퓨터학과

A study on the convergence of method for Theodorsen equation by low frequency pass filter

Eun-Jee Song
Dep. of Computer Science, Nam Seoul University

요 약

저자는 등각사상을 구하기 위한 기존의 여러 Theodorsen 방정식의 해법 중 가장 유효한 해법으로 알려져 있는 Wegmann의 방법을 다룬바 있다. Wegmann의 방법으로 수치실험을 한 결과 난이도가 높다고 예상되는 문제에 있어 수렴했다가 발산을 하는 불안정현상이 나타났으며 수렴하지 않는 불안정현상의 원인을 분석하여 저주파필터를 적용한 새로운 반복법을 제안하여 Wegmann 방법으로는 발산하는 모든 문제에 있어서 수렴하는 수치실험 결과를 얻었다[1]. 본 논문에서는 저주파필터를 적용한 해법에 의해 수치적으로 수렴한 결과를 이론적으로 증명한다.

1. 서 론

등각사상은 함수론의 기본적인 문제의 하나로 물리학, 공학등에 응용되고 있으며 특히 최근에는 grid에 관한 문제가 대두되면서 주목을 받고 있다[2]. 일반적으로 등각사상은 수치계산법에 의해 구할 수 있으며 표준영역에서 문제영역으로의 사상과 표준영역에서 문제영역으로의 사상을 구하는 것으로 대별되어 각각 독립된 분야로서 연구되고 있다.

여기서는 표준영역인 단위원의 내부에서 문제영역인 Jordan영역 내부에로의 수치등각사상을 다루는데 이 사상의 결정은 경계대응함수에 관한 비선형 적분방정식인 Theodorsen방정식을 푸는 것으로 귀착된다[6]. 저자는 등각사상을 구하기 위한 기존의 여러 Theodorsen 방정식의 해법 중 가장 유효한 해법으로 알려져 있는 Wegmann의 방법을 다룬바 있다. Wegmann의 방법으로 수치실험을 한 결과 난이도가 높다고 예상되는 문제에 있어 수렴했다가 발산을 하는 불안정현상이 나타났으며 논문1에서는 수렴하지 않는 불안정현상의 원인을 분석하여 반복법의 안정화를 위해 저주파필터를 적용한 새로운 반복법

을 제안하여 Wegmann 방법으로는 발산하는 모든 문제에 있어서 수렴하는 수치실험 결과를 얻었다[1]. 본 논문에서는 저주파필터를 적용한 해법에 의해 수치실험적으로 수렴한 결과를 이론적으로 증명한다.

2. Wegmann의 방법

Φ 는 단위원에서 문제영역인 Jordan 영역으로의 등각사상으로 다음과 같은 정규화 조건을 만족하는 사상이라 하자.

$$\Phi(0)=0, \quad \Phi'(0)>0 \quad \text{-----} (1)$$

2π 주기함수 $\eta(t)$ 를 사용하여 등각사상 Φ 원주상에서 $\Phi(e^{it}) := \eta(s(t))$ 로 표현하기로 하고

여기서는 문제영역이 $\eta(t) = \rho(t)e^{it}$ 로 극좌표 표현되는 영역만을 취급하기로 한다. 또한 함수 G 를 도입하여

$$G(\tau(t)) := \log \rho(\tau(t) + t) + i\tau(t) \quad \text{-----} (2)$$

와 같이 정의하면

$$\text{Re } G\tau(t) = \log \rho(\tau(t) + t), \quad \text{Im } G\tau(t) = \tau(t)$$

이 되며 Φ 가 등각사상이라는 조건하에

$$\Psi\tau(t) = \tau(t) - K \log \rho(\tau(t) + t) = 0 \quad \text{---} (3)$$

과 같은 Theodorsen방정식을 얻을 수 있으며 등각사상 \mathcal{D} 구하는 문제는 이방정식을 푸는 문제로 귀착된다. K 는 공역작용소(共役作用素)라 불리우며 함수 f 가

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikt} \quad \hat{f}_k : f \text{의 } k\text{-번째 Fourier계수}$$

로 전개되었을 때

$$Kf \sim -i \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sign}(k) \hat{f}_k e^{ikt}$$

로 정의되는 작용소이다. Wegmann은 비선형 방정식(3)를 다음과 같은 Newton법으로 풀었다.

$$\begin{aligned} \Psi \tau_k(t) + \Psi_{\tau_k} \delta_k(t) &= 0 \\ \tau_{k+1}(t) &= \tau_k(t) + \delta_k(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Ψ_{τ_k} : τ_k 에서 Ψ 의 미분

$k=0, 1, 2, \dots$ (반복횟수)

수치계산을 하기 위해 이산화를 하는데 편의상 짝수 표본점 $N=2n$ 을 사용하여

$$t_j = 2\pi j/N, \quad t = (t_0, t_1, \dots, t_{N-1})^T$$

로 하고 t 의 함수인 f 를 t_j 상에서 표본화한 것을

$$f_j := f(t_j), \quad f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T$$

로 한다. 또한 어떤 스칼라 함수 $\sigma(y)$ 와 벡터

$y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^T$ 에 대하여

$\sigma(y) = (\sigma(y_0), \sigma(y_1), \dots, \sigma(y_{N-1}))^T$ 로 정의한다

공역작용소(共役作用素) K 는 다음과 같이 이산화한다[7].

$$x \rightarrow F_N (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n; \quad b_1, b_2, \dots, b_{n-1})^T$$

$$y \rightarrow F_N^{-1} (0, -b_1, \dots, -b_{n-1}, 0; \quad a_1, a_2, \dots, a_{n-1})^T$$

F_N : 이산형 Fourier 변환

F_N^{-1} : 이산형 Fourier 역변환,

\hat{K}_N : 공역작용소에 의한 Fourier계수 변환

즉, 이산화된 공역작용소는

$$K_N := F_N^{-1} K \hat{K}_N F_N$$

이 된다. Wegmann의 반복법은 간단히 다음과 같다[1,7]. 다음에서 τ 에 대하여 $s = \tau + t$ 이다.

<반복법>

$s_0 \in R^N$: 초기치 $m \geq 0$ 에 대하여

$$v := \theta(s_m) - t$$

$$w := K_N v$$

$$\alpha := \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} \nu_{\mu}, \quad \beta := \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} (-1)^{\mu} \nu_{\mu}$$

$$q := \text{Im}(\exp(w - i\theta(s_m)) \cdot \eta(s_m))$$

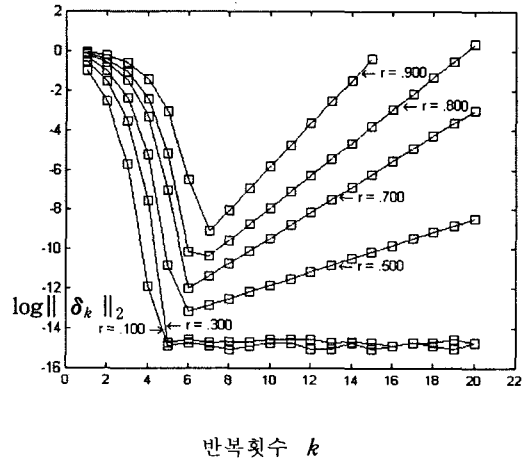
$$p := K_N q$$

$$\hat{q} := \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} q_{\mu}$$

$$s_{k+1} := s_k - \text{Re} \frac{\eta'(s_k)}{\eta(s_k)} - \frac{p + \hat{q} \cot \alpha + \beta \cos n t}{r(s_k) \exp(w)}$$

----- (5)

위의 Wegmann의 반복법(5)로 수치실험한 결과 그림1에서와 같이 난이도가 높은 문제에 있어 발산하는 문제가 발견되었다.



(그림1) Wegmann 방법에 의한 수정량

3. 저주파 필터에 의한 방법

Wegmann 반복법이 수렴하지 않는 원인은 반복법(5)를 간단히

$$s_{k+1} = W(s_k) \quad k \geq 0 \quad (6)$$

로 했을 때 W 의 s 에서의 미분 W_s 의 고주파 성분 때문임을 알아내고 다음에 정의하는 저주파 필터(low frequency pass filter)에 의해 수렴성을 개선할 수 있었다[1]. 어떤 함수 $f(t) \in C_R(T)$ 가

($C_R(T)$: 미분 가능한 주기 2π 인 연속 실함수)

$$f(t) \approx a_0/2 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (a_{\mu} \cos \mu t + b_{\mu} \sin \mu t)$$

로 Fourier 전개 되어있다고 하고 저주파 필터 $L_m(m < n)$ 을

$$L_m f(t) := a_0/2 + \sum_{\mu=1}^m (a_{\mu} \cos \mu t + b_{\mu} \sin \mu t) \quad (7)$$

로 정의한다. 이산반에서의 저주파필터의 적용은 다

음과 같이 된다. 어떤 함수 $x(t) \in C_R(T)$ 을

$\{t_\nu\}_{\nu=0}^{N-1}$ 상에 표본화인 것을

$$x_\nu := x(t_\nu), \mathbf{x} := (x_0, \dots, x_{N-1})^T$$

로 하고

$$\mathbf{x} \rightarrow F_N(a_0, \dots, a_{n-1}, a_n; b_1, \dots, b_{n-1})^T$$

↓ \hat{L}_m : 저주파필터

$$\mathbf{y} \leftarrow F_N^{-1}(a_0, \dots, a_m, 0, \dots, 0; b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0)^T$$

로 한다. 즉 이산반에서의 저주파 필터의 작용소는

$$L_m := F_N^{-1} \hat{L}_m F_N \quad \text{----- (8)}$$

로 한다. (6)의 반복법에 (8)의 저주파필터 L_m 을 이용하여 새로운 반복법을

$$s_{k+1} = W^m(s_k) := L_m(W(s_k) - t) + t \quad \text{-- (9)}$$

로 정의하고 실제로 새로 제안한 반복법(9)에 의해 수치실험한 결과 그림2에서와 같이 기존의 Wegmann의 반복법 (6)에 의해서는 발산하던 문제가 수렴하는 결과를 얻었다.

4. 저주파 필터에 의한 방법의 수렴성

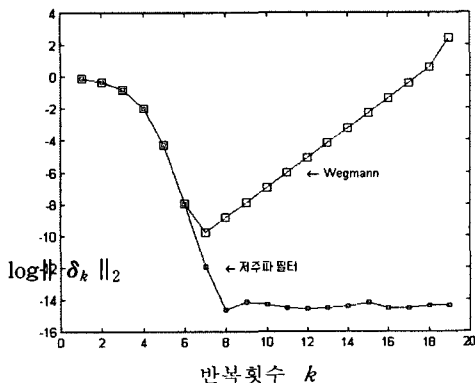
새로 제안된 반복법 (9)가 수렴함을 이론적으로 분석해 보기로 한다. k 회 반복후의 수정량을

$$\delta_k = s_{k+1} - s_k \text{로 하면}$$

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} &= s_{k+2} - s_{k+1} = W^m(s_{k+1}) - s_{k+1} \\ &= W^m(s_k + \delta_k) - s_{k+1} \approx W^m(s_k) + W_{s_k}^m \delta_k - s_{k+1} \\ &= W_{s_k}^m \delta_k \approx W_s^m \delta_k \end{aligned}$$

$$\text{----- (10)}$$

로 근사한다. 여기서 $W_{s_k}^m$ 는 W 의 s_k 에서의 미



(그림2) $r=0.85$ 일 때 Wegmann 과 저주파필터 방법에 의한 수정량 비교

분이며 W_s^m 는 참값 s 에서의 미분이다. 결국 반복횟수 k 이 커짐에 따라 $\|\delta_{k+1}\|/\|\delta_k\|$ 는 W_s^m 의 스펙트럼 반경에 근접해 간다. 그러므로 이 스펙트럼반경이 1보다 작으면 수정량이 점점 감소하여 수렴하게 된다. (9)의 새로운 해법의 수렴성을 이론적으로 분석하기 위해 문제영역이 단위원에 가까울 때 W_s^m 의 스펙트럼반경을 평가해 보자.

문제영역의 경계가

$$\eta(t) = (1 + \xi(t))e^{it} \quad \text{----- (11)}$$

($C^2_R(T)$: 2회 미분 가능한 주기 2π 연속실함수)로 표현되는 영역이라 하자.

W_s^m 를 계산하면

$$W_s^m = (L_m W)_s = L_m W_s = -L_m Y + O(\xi^2) \quad \text{--(12)}$$

$$\begin{aligned} Y(u) &= \xi(u) \cdot K_N u + u \cdot K_N \xi(t) \\ &+ K_N((K_N \xi(t)) \cdot K_N u - \xi(t) \cdot u) + J_0(\xi(t))J_0(u) \\ &- ((I + K_N^2)\xi(t)) \cdot u - K_N(((I + K_N^2)\xi(t)) \cdot K_N u) \end{aligned}$$

$$J_0(f) := \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} f_\mu \quad J_n(f) := \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} (-1)^\mu f_\mu$$

이 된다 [7]. 노름(norm)은

$$\|\xi\| := \|\xi\|_\infty + \|\dot{\xi}\|_\infty + \|\ddot{\xi}\|_\infty$$

로 정의하고 (11)식에서의 $\|\xi(t)\|$ 은 충분히 작다고 가정한다. (12)식 W_s^m 의 근사치인 $L_m Y$ 의 스펙트럼 반경을 Fourier 전개 수법으로 평가해 보자.

$\xi \in C^2_R(T)$ 이므로 ξ 와 $\dot{\xi}$ 의 Fourier 전개

$$\xi(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{ilt}, \quad \dot{\xi} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l e^{ilt} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} l c_l e^{ilt} \quad \text{----- (13)}$$

은 모두 절대 수렴한다.

여기서 $\xi, \dot{\xi}$ 의 Fourier 계수(14)로부터 다음의 양

$$D_0 := |c_0| + 4 \sum_{k=1}^{\infty} |d_k|$$

$$D_\mu := 2|d_\mu| + 4 \sum_{k=\mu+1}^{\infty} |d_k|, \quad 1 \leq \mu < \infty \quad \text{---- (14)}$$

를 정의한다. $\dot{\xi}$ 의 Fourier계수의 절대 수렴성으로부터 D_μ 는 존재하며

$\lim_{\mu \rightarrow \infty} D_\mu = 0$ 이 된다. 또한 D_μ 가 μ 에 관련한 단조 감소임을 쉽게 알 수 있다.

공간 P_m 의 벡터 $v = \sum_{l=-m}^m u_l e^{ilt}$ 로부터

$$L_m Y(\xi, u) = \sum_{l=-m}^m v_l e^{ilt} \text{ 에로의 계수의}$$

변환행렬을

$$Y = (y_{i,\nu})_{-m \leq i, \nu \leq m}$$

로 하고 $r_\nu := \sum_{i=-m}^m |y_{i,\nu}|$ 로 하면

$L_m Y$ 의 스펙트럼 반경 $\rho(L_m Y)$ 은 $D_\mu (\mu \geq 0)$ 의 단조성을 이용하여

$$\begin{aligned} \rho(L_m Y) &= \rho(Y) \leq \|Y\|_1 \\ &= \max_{0 \leq \nu \leq m} r_\nu \leq \max_{0 \leq \nu \leq m} D_{n-\nu} = D_{n-m} \end{aligned} \quad \text{----(15)}$$

이 된다. 여기서 $lf := n - m$ 을 뒤로부터 몇 개의 고주파성분을 제거할까를 나타내는 필터파라미터로 정한다. (15)식에 필터파라미터로 lf 를 사용하면 $D_{n-m} = D_{lf}$ 가 되며 $\xi(t)$ 의 Fourier 전개는 절대 수렴하므로 $\lim_{lf \rightarrow \infty} D_{lf} = 0$ 이다. 이상을 요약하면 다음의 정리를 얻을 수 있다.

[정리]

$\xi \in C_R^2(T)$ 로 하여 저주파필터 L_m 의 파라미터 $lf = n - m$ 을 적당히 크게 하면 부등식

$$\rho(L_m Y) \leq D_{lf} < 1$$

은 항상 성립한다.

따라서 필터의 파라미터 lf 를 충분히 크게 하면 반복법 (9)는 수렴한다.

5. 결론

본 논문에서는 표준영역인 단위원 내부로부터 문제영역인 Jordan영역 내부로의 수치등각사상을 구하기 위한 해법 중 가장 유효하다고 알려진 Newton법을 이용한 Wegmann방법을 다루었다. 수치실험한 결과 처음에는 수렴했다가 발산하여 결국 해를 구할 수 없는 치명적인 문제점이 발견되어 이산화한 Wegmann의 반복법을 이론적으로 분석하여 발산하는 현상의 원인을 찾아 저주파필터를 적용하여 수치실험결과를 보고한바 있다[1]. 본 연구에서는 새롭게 제안된 반복법을 이론적으로 분석하여 수렴성을 증명하였다.

참고문헌

[1] 송은지, "저주파 필터를 이용한 Wegmann방법의 개량에 관한 연구", 한국정보처리학회 논문집제8-A권 제4호, pp503-508, 2001.

[2] 최도형외, "Grid Generation and Laminar Flow Analysis", 한국항공우주학회지 Vol.22 No.2, pp2001-2012, 1994.

[3] 송은지, "등각사상에 있어 Theodorsen방정식의 고속해법", 한국정보처리학회 논문집 5권2호, pp.372-379, 1998.

[4] 송은지, "Hübner 방법에 기초한 수치등각사상의 자동화 알고리즘", 한국정보처리학회 논문집 제6권 제 10호, pp.2716-2722, 1999

[5] 天野 要, "代用電荷法に基づく双方向的な數値等角寫像の方法" 日本情報處理學會論文集 Vol.31, No.5, pp.623-632, 1990

[6] Gutknecht, M.H. "Numerical conformal Mapping Methods Based on FunctionConjugation." J. Comput. Appl. Math. 14, No.1,2, pp.31-77, 1986.

[7] Wegmann, R. "Discretized versions of Newton type iterative methods for conformal mapping." J. Comput. Appl. Math. 29, No.2, pp.207-224, 1990.

[8] Gutknecht, M. H. "Fast Algorithm for the conjugate Periodic Function", J. Computing No.22, pp79-91, 1979.

[10] Wegmann, R. "Convergence proofs and error estimates for an iteration method for conformal mapping, Numer. Math. 44, pp.435-461, 1984