제 18 회 한국정보처리학회 추계학술발표대회 논문집 제 9 권 제 2 호 (2002.11)

$2^{2n-k} \times 2^k$ 토러스와 HFN(n,n)의 상호 임베딩

강민식*, 김종석*, 이형옥**, 허영남*
*순천대학교 컴퓨터과학과
**순천대학교 컴퓨터교육과
e-mail : {blacksun,rockhee,oklee,hyn}@sunchon.ac.kr

Embedding Algorithms among $2^{2n-k} \times 2^k$ Torus and HFN(n,n)

Min-Sik Kang*, Jong-Seok Kim*, Hyeong-Ok Lee**, Yeong-nam Heo*
*Dept. of Computer Science, Sunchon National University
**Dept. of Computer Education, Sunchon National University

요 약

임베딩은 어떤 연결망이 다른 연결망 구조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 어떤 특정한 연결망을 다른 연결망에 사상하는 것으로, 특정한 연결망에서 사용하던 여러가지 알고리즘을 다른 연결망에서 효율적으로 이용할 수 있도록 한다. 본 논문에서는 $2^{2n-k} \times 2^k$ 토러스를 HFN(n,n)에 연장율 3, 밀집율 4 로 임베딩 가능함을 보이고, HFN(n,n)을 $2^{2n-k} \times 2^k$ 토러스에 연장율 $O(N)$으로 임베딩됨을 보인다(N=2^n).

1. 서론

최근 다양한 연결망 구조에서 여러 가지 문제들을 풀기 위해 많은 병렬 알고리즘들이 설계되고 있는데 이러한 알고리즘들을 다른 연결망 구조에서 적은 비용으로 실행시킬 수 있는지는 병렬처리에서 중요한 문제가 되고 있다. 이러한 방법 중에서 널리 쓰이는 것에 임베딩이 있다. 그래프의 임베딩은 어떤 그래프 G가 다른 그래프 H에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 어떤 그래프 G를 다른 그래프 H에 사상하는 것이다. G의 H에 대한 임베딩의 연장율은 G의 어떤 두 인접한 노드를 H에 사상했을 때 사상된 H의 두 노드사이의 최대 거리를 나타내며, 밀집율은 사상된 H에서의 특정 에지의 최대 사용빈도를 나타낸다[1,7].

메쉬 구조는 평면 그래프로서 VLSI 회로 설계 같은 분야에서 많이 이용되는 구조로 현재까지 널리 이용되고 있으며 MPP(Goodyear Aerospace), MP-I(MASPAR), Victor(IBM), Paragon(Intel), T3D(Cray) 등에서 상용화 되어 있다[2]. 이러한 메쉬의 지름을 개선한 연결망 중 대표적인 연결망이 토러스인데 토러스는 메쉬의 행과 열들을 링형태를 띄게 한 wraparound 에지라고 불리우는 에지를 추가하여 구성한 연결망이다[4].

하이퍼큐브는 노드 및 에지 대칭이고, 임베딩 관점에 있어서 링, 트리, 메쉬 등과 같은 다른 연결망 구조들이 효율적으로 임베딩 될 수 있다는 장점이 있지만, 노드 개수의 증가에 따른 분지수의 증가로 인해 네트워크의 망비용이 증가하는 단점이 있다[5,6]. 이러한 단점을 개선하고자 하이퍼큐브의 장점을 가지면서 망비용을 개선한 folded hypercube[3]가 제안되었으며 folded hypercube[3]를 기본 모듈로 사용한 HFN(hierarchical folded-hypercube network)[9]이 나오게 되었다.

본 논문에서는 $2^{2n-k} \times 2^k$ 토러스를 HFN(n,n)에 연장율 3 과 밀집율 4 로 임베딩 가능함을 보인다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2 장에서는 관련연구에 대하여 논하고 3 장에서는 $2^{2n-k} \times 2^k$ 토러스와 HCN(n,n)의 상호 임베딩을 보이며 4 장에서 결론을 맺는다.

2. 관련연구

본 논문에서는 $2^{2n-k} \times 2^k$ 토러스의 각 노드의 주소를 그레이코드를 이용하여 표현하겠다. 2^{2n-k} 는 행을 2^k 는 열을 나타낸다. 각 노드의 주소는 행의 주소 다음에 열의 주소를 연결하여 연속된 $2n$ 개의 비트스트링으로 표현한다.

그레이코드는 연속된 2 진수 사이에 오직 한 개의 비트만 변화하도록 하는 코딩 방식의 하나로 G(i)에

대하여 $0 \le i \le 2^n - 1$ 일 때 G(0), G(1), G(2), ..., G(2^n - 1)까지의 2^n 개의 코드들은 정확히 한 개의 비트만 변화된 n-bit 순차이며 순환적인 방법으로 확장될 수 있다. G(0), G(1), G(2), ..., G(2^n - 1) 이 n 비트 그레이코드를 구성한다면 0G(0), 0G(1), 0G(2), ..., 0G(2^n - 1) 1G(2^n - 1), ..., 1G(2), 1G(1), 1G(0) 과 같이 $n+1$ 비트 그레이코드를 구성할수 있다. 예를 들면 2bit 그레이코드는 00, 01, 11, 10 이고 확장된 3bit 그레이코드는 0(00), 0(01), 0(11), 0(10), 1(10), 1(11), 1(01), 1(00) 이다[9].

2.1 토러스

낮은 차원의 메쉬는 설계하기 쉽고 알고리즘 관점에서도 매우 유용하므로 병렬처리 컴퓨터의 연결망으로 많이 쓰이고 있으며, 높은 차원의 메쉬일수록 지름이 작아지고 여러 가지 병렬 알고리즘을 빨리 수행할 수 있지만, 비용이 많이 드는 단점이 있다. 이러한 메쉬의 지름을 개선한 연결망으로 토러스가 있다.

토러스는 메쉬의 행과 열들을 링형태를 띄게한 wraparound 에지라고 불리우는 에지를 추가하여 구성한 연결망이다. $k \times n$ 으로 표현되는 토러스는 $k \times n$ 개의 노드와 $2kn$ 개의 에지로 구성되며, 분지수는 4, 지름은 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 이다.

본 논문에서는 $2^{2n-k} \times 2^k$ 토러스 T 의 노드를 $T(t_1 t_2 \cdots t_n t_{n+1} t_{n+2} \cdots t_{2n})$와 같은 연속된 $2n$ 개의 비트스트링으로 표현하고, 1 부터 n 번째 까지 비트스트링이 같은 노드들을 하나의 그룹으로 설정하겠다. 예를 들어 n=3 이고 k=2 인 $2^4 \times 2^2$ 토러스에서는 한 노드의 주소 길이가 6 이며 000,001,011,010,110,111,101,100 의 2^3개의 그룹으로 나눌수가 있다. 그림 1 은 $2^4 \times 2^2$ 토러스의 각 노드 주소를 그레이코드로 표현 하였고 처음 3 비트가 같은 노드들의 그룹을 분류하였다.

2.2 HFN(n,n)

하이퍼큐브는 2^n 개의 노드와 $n2^{n-1}$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n 비트 이진수로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드의 주소가 정확히 1 비트만 다를 때 그들 사이에 에지가 존재하며, 분지수와 지름이 각각 n 이고, 망비용은 n^2 이다. 이러한 하이퍼큐브는 노드 및 에지 대칭성을 갖고, 간단한 라우팅 알고리즘, 최대 고장 허용도 및 재귀적 구조를 갖지만, 노드 개수의 증가에 따른 분지수의 증가로 인해 네트워크의 망비용이 증가하는 단점이 있다. 이러한 단점을 극복하고자 하이퍼큐브의 노드중 서로 보수관계인 노드에 에지를 추가하여 망비용을 개선한 상호연결망인 foled hypercube[3]가 제안되었으며 2^n 개의 노드와 $(n+1)2^{n-1}$ 개의 에지로 구성된다. 분지수는 n+1 이며 지름과 망비용이 하이퍼큐브의 절반 정도이다. HFN(n,n)은 folded hypercube[3]를 기본 모듈로 사용하고 2^n *개의* 기본 모듈로 구성되어 있고 각 노드는 (I,J)와 같이 두개의 주소로 구성이 되며, 각 노드는 각각에 연결된 n+2 개의 에지를 갖는다.(I/O 채널은 n+1 개의 에지를 갖는다.)

I 는 기본 모듈을 인식하고, J 는 기본 모듈 내의 노드를 인식한다. 기본 모듈 안의 에지들은 내부 에지라고 말한다. 두 개의 기본 모듈사이의 에지들은 외부 에지라고 한다. 외부에지들는 두 노드가 각각 (I,J)와(J,I)로 구성되어 있을 때 생성 된다. HFN(n,n)은 2^{2n} 의 노드와$(n+2)$ 2^{2n-1}-2^{n-1} 개 의 에지로 구성되며 분지수는 n+2 (I/O 채널의 degree 는 n+1)이다.

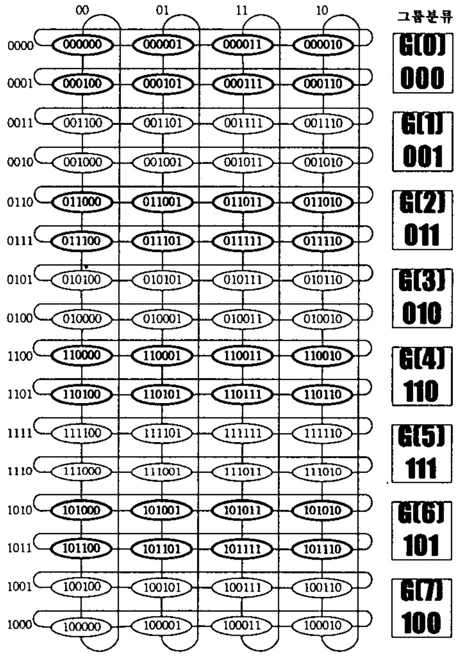

그림 1. $2^4 \times 2^2$ 토러스

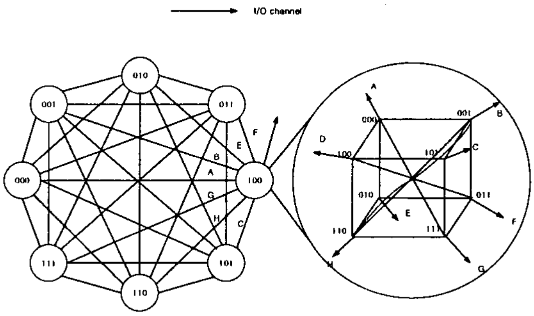

그림 2. HFN(3,3)

3. $2^{2n-k} \times 2^k$ 토러스와 HFN(n,n)의 상호 임베딩

본 논문에서의 임베딩 개요는 다음과 같다. $2^{2n-k} \times 2^k$ 토러스의 하나의 그룹은 HFN(n,n)의 하나의 모듈로 대응되고, 그룹과 그룹을 연결하는 에지의 두 노드가

사상된 HFN(n,n)의 두 노드를 연결하는 에지의 수로 연장율을 분석하고, 특정 에지의 최대 사용빈도를 통하여 밀집율을 분석한다..

정리 1. $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스는 HFN(n,n)에 연장율 3 과 밀집율 4 로 임베딩 될수 있다.

증명. n 비트 그레이코드의 구성은 G(i)가 $0 \le i \le 2^n - 1$ 일때 G(0), G(1), G(2), ... , G(2^n - 1)과 같이 표현할수 있다[9] . 이와 같은 표현법을 이용하여 $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스 $T(t_1t_2\cdots t_nt_{n+1}t_{n+2}\cdots t_{2n})$의 비트스트링에서 1 부터 n 번째 까지 비트스트링이 같은 노드들인 $t_1t_2\cdots t_n$을 그룹으로 분류하여 G(I)라 하고, 그룹 내부의 $t_{n+1}t_{n+2}\cdots t_{2n}$ 비트스트링은 G(J)로 각각 구분하여 표기할수 있다. 따라서 $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스의 임의의 노드 $T(t_1t_2\cdots t_nt_{n+1}t_{n+2}\cdots t_{2n})$는 그림 3 과 같이 T(G(I)G(J))와 같이 표현할수 있다($0\le I\le 2^n-1, 0\le J\le 2^n-1$). 또한 HFN($n,n$)의 임의의 노드 S 는 HFN 의 정의에 의해 S(G(I),G(J))라 표현 할수 있다($0\le I\le 2^n-1, 0\le J\le 2^n-1$).

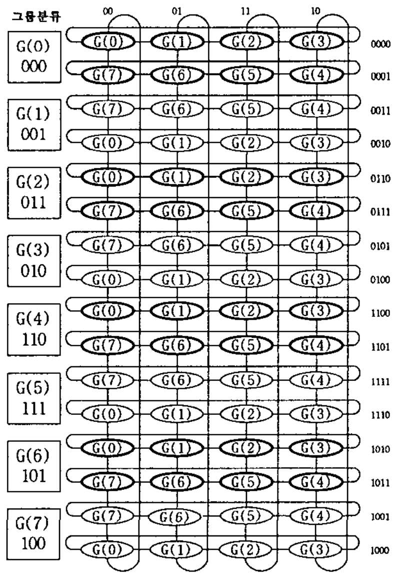

그림 3. $2^4\times 2^2$ 토러스

토러스를 HFN(n, n)에 임베딩 했을때의 경우를 아래와 같이 나누어서 각각의 연장율을 분석하겠다.

경우 1. (T(G(I)G(J)),T(G(I)G(J+1))) 일 때 : $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스에서 두 노드는 같은 그룹 안에서 에지가 존재하는 경우이며 또한 1 비트 다른 그레이코드로 연결되어 있는 노드들임을 알수 있다. 따라서 HFN 의 정의에 의해 HFN(n,n)의 동일한 모듈 내부에 있는 노드임을 알수 있고, 서로 인접한 노드이므로 연장율 1 에 임베딩 가능함을 알수 있다.

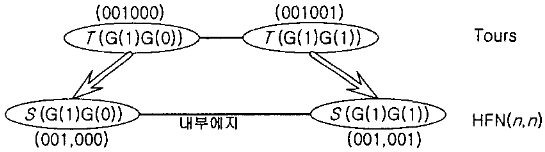

그림 4. 경우 1 의 예

경우 2. (T(G(I)G(J)),T(G(I+1)G(J))) 일 때 : $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스에서 두 노드는 서로 다른 그룹안에 존재하는 노드들로 HFN(n,n)에 임베딩 했을 때 지나가는 노드의 경로는 S(G(I),G(J))→ S(G(J), G(I))→ S(G(J),G(I+1))→ S(G(I+1),G(J))와 같은 경로로 연결 되므로 연장율 3 에 임베딩 가능함을 알수 있다.

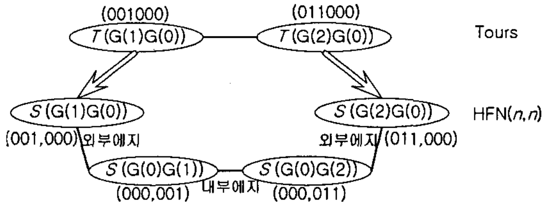

그림 5. 경우 2 의 예

경우 2.1 경우 2 에서 G(I)=G(J) 일 때 :
두 노드는 S(G(I),G(J))→ S(G(I),G(J+1))→ S(G(J+1),G(I)) (=S(G(I+1),G(I))) 와 같은 경로로 연결 되거나 S(G(I),G(J)) → S(G(J),G(I))→ S(G(J),G(I+1))(= S(G(I+1),G(J))) 와 같은 경로로 연결이 되므로 연장율 2 에 임베딩 가능함을 알수 있다.

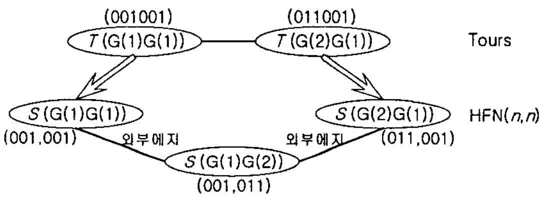

그림 6. 경우 2.1 의 예

이상의 경우에서 증명한 바와 같이 토러스를 HFN(n, n)에 임베딩하기 위해 필요한 연장율은 3 이하 이다.

다음으로 임베딩된 HFN(n, n)의 에지 e 를 아래와 같은 경우로 나누어서 각 에지 e가 사용된 빈도수에 의해 밀집율을 분석하겠다.

경우 1. 에지 e 에 연결된 두 노드가 같은 모듈안에 있으며 서로 보수 일때 :
위의 연장율의 증명에서 연결되는 경로를 보면 보수인 두 노드를 연결하는 에지는 존재하지 않는다. 그러므로 에지 e는 밀집율이 0 이다.

경우 2. 에지 e가 (S(G(I),G(J)),S(G(I),G(J+1))) 일

때 e 는 같은 모듈안에 있으며 각각 1-bit 다른 노드들을 연결하는 내부 에지 이다. 토러스의 하나의 그룹이 HFN(n,n) 내의 하나의 모듈로 임베딩 되기 때문에 내부 에지의 밀집율이 1 이하임을 알수 있다.

경우 3. 에지 e가 $(S(G(I),G(J)),S(G(J),G(I)))$일 때 : e 는 서로 다른 모듈에 속해 있는 두 노드를 연결하는 외부 에지이다.

토러스의 두 노드 $(T(G(I),G(J)),T(G(I+1),G(J)))$를 HFN 으로 임베딩했을 때 e 가 몇번 사용되었는지를 분석 함으로써 밀집율을 알수있다. 이는 토러스에서 다음과 같이 노드를 설정함으로서 알수 있다.

1) $(T(G(I-1),G(J)),T(G(I),G(J)))$
2) $(T(G(I+1),G(J)),T(G(I),G(J)))$
3) $(T(G(J-1),G(I)),T(G(J),G(I)))$
4) $(T(G(J+1),G(I)),T(G(J),G(I)))$

이와 같은 노드를 HFN 에 사상하면 e를 포함하는 경로는 최대 4 개가 존재 함을 알수 있으며 이 4 개의 경로는 다음과 같다.

1) $S(G(I-1),G(J)) \rightarrow S(G(J),G(I-1)) \rightarrow S(G(J),G(I)) \xrightarrow{e} S(G(I),G(J))$
2) $S(G(I+1),G(J)) \rightarrow S(G(J),G(I+1)) \rightarrow S(G(J),G(I)) \xrightarrow{e} S(G(I),G(J))$
3) $S(G(J-1),G(I)) \rightarrow S(G(I),G(J-1)) \rightarrow S(G(I),G(J)) \xrightarrow{e} S(G(J),G(I))$
4) $S(G(J+1),G(I)) \rightarrow S(G(I),G(J+1)) \rightarrow S(G(I),G(J)) \xrightarrow{e} S(G(J),G(I))$

와 같이 설정할 수 있으며 이러한 결과로 밀집율은 4 임을 알수 있다.

정리 2. HFN(n,n)는 $2^{2n-k} \times 2^k$ 토러스에 연장율 $\alpha(N)$ 으로 임베딩 할 수 있다($N=2^n$).

증명. HFN(n,n)의 임의의 노드 S는 $S(G(I),G(J))$으로 표현 하고, $2^{2n-k}\times 2^k$ 토러스의 노드 T는 $T(G(I)G(J))$ 으로 표현 하겠다($0\le I\le 2^n-1, 0\le J\le 2^n-1$).

HFN(n,n)의 노드 $S(G(I),G(J)),S(G(J),G(I))$ 와 같은 인접한 외부 에지들을 토러스로 사상했을 때 사상된 토러스에서의 두 노드사이의 최대 거리를 통하여 각각의 연장율을 살펴보겠다.

$2^{2n-k} \times 2^k$ 토러스의 인접한 두 노드는 1 비트 다른 노드로 연결이 되어있으며 두 노드의 거리가 최대가 될 경우는 토러스의 정의에 따라 두 노드의 행과 열의 거리가 각각 $|\frac{2n-k}{2}|,|\frac{k}{2}|$가 될 때 이다. 다시 말해서 G(0)부터 $G(2^n-1)$까지의 비트스트링으로 구성된 $2^{2n-k} \times 2^k$토러스에서 I,J,I',J' 가 0 부터 2^n-1까지인 임의의 두 노드를 $T(G(I)G(J))$와 $T(G(I')G(J'))$라 했을 때 두 노드의 행과 열에서 $|T(G(I))-T(G(I'))|$ 와 $|T(G(J))-T(G(J'))|$의 값이 각각 $G(2^{n-1})$일때 최대 거리를 갖는다($I\neq I', J\neq J'$).

HFN(n,n)의 $S(G(I),G(J)),S(G(J),G(I))$의 외부 에지들을 $2^{2n-k} \times 2^k$토러스 $T(G(I)G(J)),T(G(J)G(I))$로 사상했을 때 최대 연장율이 될 경우는 위에서 언급한 토러스에서의 최대 거리에 의하여 $T(G(0),G(2^{n-1}))$, $T(G(2^{n-1}),G(0))$의 노드와 같이 $|T(G(I))-T(G(I'))|$ 와 $|T(G(J))-T(G(J'))|$ 의 값이 각각 $G(2^{n-1})$일때 이다. 그러므로 토러스의 정의에 따라 행과 열의 각각의 거리는 2^{n-1} 이 되며 이때의 두 노드의 거리는 2^n 이된다. 따라서 HFN(n,n)을 $2^{2n-k} \times 2^k$ 토러스에 임베딩하기 위해 필요한 연장율은 2^n 이고 $2^{2n-k} \times 2^k$ 토러스의 노드 수 2^n에 비례 하므로 $\alpha(N)$이 됨을 알수 있다($N=2^n$).

4. 결 론

상호 연결망의 임베딩은 어떤 연결망이 다른 연결망에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 어떤 특정한 연결망을 다른 연결망에 사상하는 것이다.

본 논문에서는 상호 연결망으로 널리 사용되고 있는 토러스를 HFN(n,n)에 연장율 3 과 밀집율 4로 임베딩 가능함을 분석했다. 이러한 토러스와 HFN(n,n) 사이의 임베딩 결과는 토러스에서 이미 개발된 여러 가지 알고리즘을 HFN(n,n)에서 효율적으로 이용할 수 있음을 의미한다.

참고문헌

[1] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, "A Group-Theoretic Model for Symmertric Interconnection Network," IEEE Trans. Comput., Vol. 38, No. 4, pp. 555-565, 1989.

[2] J. Bruck, R Cypher and C.-R. Ho, "Wildcard Dimensions, Coding Theory and Fault-Tolerant Meshes and Hypercubes," IEEE Trans. on Computers, Vol. 44, No. 1, pp. 150-155, 1995.

[3] A. El-Amawy and S. Latifi, "Properites and Performance of Folded Hypercubes," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol. 2, No. 1, pp.31-42,1991

[4] J. G. Peters and M. Syska, "Circuit-Switched Broadcasting in Torus Networks," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol. 7, No. 3, pp. 246-255, March 1996.

[5] Y. Saad and M. H. Schutltz, "Topological Properties of Hypercubes," IEEE Trans. Comput., Vol.37, pp.867-872, 1988.

[6] A. S. Vaidya, P. S. N. Rao and S. R. Shankar, "A Class of Hypercube_like Networks," Proc. of the 5th IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing, pp. 800-803, Dec. 1993.

[7] A. Y. Wu, "Embedding of Tree Networks into Hypercubes," J. Parallel and Distributed Compyting, Vol. 2, pp. 238-249, 1985.

[8] S-K. Yun and K-H. Park, "Comments on 'Hierarchical Cubic Networks'," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol. 9, No. 4, pp. 410-414, 1998.

[9] D. R. Duh, G. H. Chen, and J. F. Fang,"Algorithms and properties of a new two level network with fold ed hypercubes as basic modules," IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, vol.6, no.7, pp.7 14-723, Jul. 1995.