

# 고장 노드를 갖는 토러스에서 병렬경로

이형옥\*, 김종석\*\*, 허영남\*\*

\*순천대학교 컴퓨터교육과

\*\*순천대학교 컴퓨터과학과

{rockhee,oklee,hyn}@sunchon.ac.kr

## Parallel Path in Torus with Faulty Nodes

Lee Hyeong-Ok\*, Kim Jong-Seok\*\*, Heo Yeong-Nam\*\*

\*Dept. of Computer Education, Sunchon National University

\*\*Dept. of Computer Science, Sunchon National University

### 요약

본 논문에서는 고장 노드를 갖는  $n \times k$  토러스(Torus)가 Strong Fault-Tolerance를 가짐을 보인다( $n \geq k$ ). 또한 그 결과를 이용하여  $n \times k$  토러스(Torus)에서 분지수-2, 즉 2개의 고장노드 발생시 임의의 두 노드 사이에 병렬경로 길이가  $n+2$  이하임을 보인다.

### 1. 서론

병렬처리를 위한 상호연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이의 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프로써 표현될 수 있다. 이러한 상호연결망으로 선형배열, 트리, 메쉬[1,4], 하이퍼큐브[1,2], 스타그래프[3] 등이 제안되었다. 상호연결망에서 메쉬 구조는 평면그래프로서 VLSI 회로 설계 같은 분야에서 많이 이용되는 구조로 현재까지 널리 이용되고 있으며 다양한 시스템으로 상용화되었다. 이러한 메쉬 구조에서 지름(diameter)과 고장허용도(fault tolerance)를 개선한 상호연결망이 토러스 구조인데, 토러스는 메쉬의 행과 열에 하나의 에지를 추가하여 각각의 행과 열이 링 형태를 갖는 연결망이다. 이러한 토러스 구조는 MPP(Goodyear Aerospace), MP-I(MASPAR), Victor(IBM), Paragon(Intel), T3D(Cray) 등에 상용화되어 사용되고 있다[1,4].

최근 상호연결망에서 고장허용도와 병렬경로에 대한 망 척도로 Strong Fault Tolerance 개념이 제안되었다[2,3]. 상호연결망  $G$ 가 Strong Fault Tolerance를 갖는다는 것은  $G$ 가  $d-2$ 개의 고장노드(fault node)를 가지더라도 임의의 두 노드  $u$ 와  $v$  사이에 노드  $u$ 와  $v$ 의 인접 노드 중 고장나지 않은 노드 개수만큼 병렬 경로가 존재함을 의미한다. 이와 관련하여 상호연결망으로 널리 알려진 하이퍼큐브와 Star 그래프에 대한 Strong Fault Tolerance 연구 결과가 발표되었다[2,3].

본 논문에서는 상호연결망으로 널리 사용되고 있는  $n \times k$  토러스 구조에서  $d-2$ 개 즉, 최대 2개의 노드가 고장이 발생했을 때, 임의의 두 노드  $u$ 와  $v$  사이에 병렬 경로를 구성하는 알고리즘을 보이고, 병렬 경로의 최대 길이가  $n+2$  이하임을 보인다( $n \geq k$ ).

### 2. 관련연구

낮은 차원의 메쉬는 설계하기 쉽고 알고리즘 관점에서 매우 유용하므로 병렬처리 컴퓨터의 연결망으로 많이 쓰이고 있으며, 높은 차원의 메쉬일수록 지름이 작아지고 여러 가지 병렬 알고리즘을 빨리 수행할 수 있지만, 비용이 많이 드는 단점이 있다. 이러한 메쉬의 지름을 개선한 연결망으로 토러스가 있다. 토러스는 메쉬의 행과 열에 하나의 에지를 추가하여 각각의 행과 열이 링(Ring) 형태를 갖는 연결망이다.  $k \times n$ 으로 표현되는 토러스는  $k \times n$ 개의 노드와  $2 \times k \times n$ 개의 에지로 구성되며, 분지수는 4, 지름은  $\lfloor k/2 \rfloor + \lfloor n/2 \rfloor$  이다[4].

상호연결망의 망 척도로 제안된 Strong Fault Tolerance란 분지수가  $d$ 인 연결망  $G$ 가  $d-2$ 개 이하의 고장노드를 가질 때, 연결망  $G$ 의 임의의 두 노드  $u$ 와  $v$  사이에  $\min\{\deg(u), \deg(v)\}$ 개의 노드중복 없는 경로(node disjoint path)가 존재함을 의미한다. 여기서  $\deg(u), \deg(v)$ 는 노드  $u$ 와  $v$ 의 인접 노드 중 고장이 발생하지 않은 노드의 개수를 말한다. 따라서 연결망  $G$ 가 Strong Fault Tolerance를 갖는다는 것은  $G$ 가

$d-2$ 개 이하의 고장노드(fault node)를 가질 때,  $\deg(u)$ 와  $\deg(v)$ 의 값 중 더 작은 값만큼의 병렬 경로가 존재함을 나타낸다. 상호연결망으로 널리 알려진 하이퍼큐브와 Star 그래프에 있어서 Strong Fault Tolerance 연구 결과가 발표되었다[2,3].

### 3. 토러스의 Strong Fault-Tolerance

$n \times k$  토러스 즉,  $n$ 개의 행과  $k$ 개의 열로 구성된 토러스에서 임의의 두 노드를  $S(s_x, s_y)$ 와  $T(t_x, t_y)$ 로 나타내고, 고장이 발생한 노드를  $F'(f'_x, f'_y)$ 와  $F''(f''_x, f''_y)$ 로 나타낸다. 또한, 노드  $S$ 와  $T$ 의 거리를  $\text{dist}(S, T)$ 로 나타낸다. 노드  $S(s_x, s_y)$ 가 위치한 행의 양 끝단 노드를 연결하는 wrap-around 에지를  $W_r(s_y)$ , 열의 양 끝단 노드를 연결하는 wrap-around 에지를  $W_c(s_x)$ 로 표현한다.

**보조정리 1.**  $n \times k$  토러스에서 노드  $S(s_x, s_y)$ 와  $T(s_i, s_j)$  사이에 경로길이  $\max(|y - j| + |i - x| + 2, (k - |y - j| + |i - x|))$  이하인, 노드 중복하지 않는 4개의 병렬경로를 설정할 수 있다.

**증명** 노드  $S(s_x, s_y)$ 와  $T(s_i, s_j)$ 의 위치에 따라 2가지 경우로 나누고, 각 경우에서 4개의 병렬경로를 구성할 수 있음을 보인다.

**경우 1.** 노드  $S$ 와  $T$ 가 동일한 행(또는 열)에 위치하고,  $|s_x - s_i| < k/2$ 인 경우

노드  $S(s_x, s_y)$ 와  $T(s_i, s_j)$ 가 동일한 행에 위치해 있으므로 노드  $S$ 와  $T$ 의 열의 위치  $y=j$ 이고, 노드  $S$ 와  $T$ 의 주소는 노드  $S$ 는  $(s_x, s_y)$ 이고, 노드  $T$ 는  $(s_i, s_y)$ 이다 ( $x < i$ ). 첫 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $X$ 축의 (+) 방향을 따라 이동하는 경로  $(s_x, s_y), (s_{x+1}, s_y), (s_{x+2}, s_y), \dots, (s_{i-2}, s_y), (s_{i-1}, s_y), (s_i, s_y)$ 이고, 경로길이는  $|i-x|$ 이다. 두 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $X$ 축의 (-) 방향으로 이동한 후, wrap-around 에지를 이용하여 구성하는 경로  $(s_x, s_y), (s_{x-1}, s_y), (s_{x-2}, s_y), \dots, (s_{i+2}, s_y), (s_{i+1}, s_y), (s_i, s_y)$ 이고, 경로길이는  $k - |i-x|$ 이다. 세 번째 경로는 노드  $S$ 와  $T$  각각에서  $Y$ 축의 (+) 방향으로 1 증가한 행을 따라 설정된 경로  $(s_x, s_y), (s_x, s_{y+1}), (s_{x+1}, s_{y+1}), \dots, (s_{i-2}, s_{y+1}), (s_{i-1}, s_{y+1}), (s_i, s_{y+1}), (s_i, s_y)$ 이고, 경로길이는  $|i-x| + 2$ 이다. 네 번째 경로는 노드  $S$ 와  $T$ 의 각각에서  $Y$ 축의 (-) 방향으로 1 감소한 행을 따라 설정된 경로  $(s_x, s_y), (s_x, s_{y-1}), (s_{x+1}, s_{y-1}), \dots, (s_{i-2}, s_{y-1}), (s_{i-1}, s_{y-1}), (s_i, s_{y-1}), (s_i, s_y)$ 이고, 경로길이는  $k - |i-x| + 2$ 이다.

노드  $S$ 와  $T$ 가 동일한 열에 위치한 경우는 노드  $S$ 와  $T$ 가 동일한 행에 위치한 경우와 유사한 방법으로

구성할 수 있다.

**경우 2.** 노드  $S(s_x, s_y)$ 와  $T(s_i, s_j)$ 가 서로 다른 행과 열에 위치한 경우( $i \neq j \neq x \neq y$ )

$n \times k$  토러스에서 노드  $S$ 와  $T$ 가 위치한 거리에 따라서 4가지의 경우로 나눌 수 있다. 첫째,  $|s_x - s_i| \geq k/2$  이고  $|s_y - s_j| \leq n/2$ 인 경우, 둘째,  $|s_x - s_i| \leq k/2$  이고  $|s_y - s_j| \leq n/2$ 인 경우, 셋째,  $|s_x - s_i| < k/2$  이고  $|s_y - s_j| > n/2$ 인 경우, 넷째,  $|s_x - s_i| > k/2$  이고  $|s_y - s_j| > n/2$ 인 경우이다. 이 경우에서 토러스의 특성상 첫 번째와 세 번째 경우는 서로 유사한 경우이고, 두 번째와 네 번째도 서로 유사한 경우이다. 본 논문에서는 노드  $S(s_x, s_y)$ 와  $T(s_i, s_j)$ 의 위치가  $X, Y$ 축을 중심으로 일사분면에 위치하고,  $x < i, y < j$  인 경우로 가정하고 분석한다.

**경우 2.1**  $|s_x - s_i| \geq k/2$  이고  $|s_y - s_j| \leq n/2$

첫 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $X$ 축의 (+)방향과 노드  $T$ 에서  $Y$ 축의 (-)방향을 따라 이동하는 경로  $(s_x, s_y), (s_{x+1}, s_y), (s_{x+2}, s_y), \dots, (s_{i-2}, s_y), (s_{i-1}, s_y), (s_i, s_y), (s_i, s_{y+1}), (s_i, s_{y+2}), \dots, (s_i, s_{j-1}), (s_i, s_j)$ 이고, 경로길이는  $|i-x| + |j-y|$ 이다. 두 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $Y$ 축의 (+)방향으로 진행하고, 노드  $T$ 에서  $X$ 축의 (-)방향으로 이동하는 에지와 연결되는 경로  $(s_x, s_y), (s_x, s_{y+1}), (s_x, s_{y+2}), \dots, (s_x, s_{j-2}), (s_x, s_{j-1}), (s_x, s_j), (s_{x+1}, s_j), (s_{x+2}, s_j), \dots, (s_{i-2}, s_j), (s_{i-1}, s_j), (s_i, s_j)$ 이고 경로길이는  $|j-y| + |i-x|$ 이다. 세 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $X$ 축의 (-)방향으로 이동하는 에지와 노드  $T$ 에서  $Y$ 축의 (+)방향으로 이동하는 에지와 wrap-around 에지가 연결된 경로  $(s_x, s_y), (s_{x-1}, s_y), (s_{x-1}, s_{y+1}), (s_{x-1}, s_{y+2}), \dots, (s_{x-2}, s_{y+1}), (s_{x-3}, s_{y+1}), (s_{x-4}, s_{y+1}), \dots, (s_{i+2}, s_{y+1}), (s_{i+1}, s_{y+1}), (s_i, s_{y+1}), (s_i, s_y)$ 이고 경로길이는  $|j-y| + (k - |i-x|)$ 이다. 네 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $Y$ 축의 (-)방향으로 이동하는 에지와 wrap-around 에지 그리고 노드  $T$ 에서  $X$ 축의 (+)방향 에지가 연결된 경로  $(s_x, s_y), (s_x, s_{y-1}), (s_{x-1}, s_{y-1}), (s_{x-2}, s_{y-1}), \dots, (s_k, s_{y-1}), (s_k, s_y), (s_k, s_{y+1}), \dots, (s_k, s_j), (s_{k-1}, s_j), (s_{k-2}, s_j), \dots, (s_{i-2}, s_j), (s_{i-1}, s_j), (s_i, s_j)$ 이고, 경로길이는  $(k - |j-y|) + |i-x|$ 이다.

**경우 2.2**  $|s_x - s_i| \leq k/2$  이고  $|s_y - s_j| \leq n/2$

첫 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $X$ 축의 (+)방향과 노드  $T$ 에서  $Y$ 축의 (-)방향을 따라 이동하는 경로  $(s_x, s_y), (s_{x+1}, s_y), (s_{x+2}, s_y), \dots, (s_{i-2}, s_y), (s_{i-1}, s_y), (s_i, s_y), (s_i, s_{y+1}), (s_i, s_{y+2}), \dots, (s_i, s_{j-1}), (s_i, s_j)$ 이고, 경로길이는  $|i-x| + |j-y|$ 이다. 두 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $Y$ 축의 (+)방향으로 진행하고, 노드  $T$ 에서  $X$ 축의 (-)방향으로 이동하는 에지와 연결되는 경로  $(s_x, s_y), (s_x, s_{y+1}), (s_x, s_{y+2}), \dots, (s_x, s_{j-2}), (s_x, s_{j-1}), (s_x, s_j), (s_{x+1}, s_j), (s_{x+2}, s_j), \dots, (s_{i-2}, s_j), (s_{i-1}, s_j),$

$(s_i, s_j)$ 이고 경로길이는  $|j-y| + |i-x|$ 이다. 세 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $X$ 축의 (-)방향으로 이동하는 에지와 노드  $T$ 에서  $Y$ 축의 (+)방향으로 이동하는 에지가 연결된 경로  $(s_x, s_y), (s_{x-1}, s_y), (s_{x-1}, s_{y+1}), (s_{x-1}, s_{y+2}), \dots, (s_{x-1}, s_{j-1}), (s_{x-1}, s_j), (s_{x-1}, s_{j+1}), (s_x, s_{j+1}), (s_{x+1}, s_{j+1}), (s_{x+2}, s_{j+1}), \dots, (s_{i-2}, s_{j+1}), (s_{i-1}, s_{j+1}), (s_i, s_{j+1}), (s_i, s_j)$ 이고 경로길이는  $|j-y| + |i-x| + 2$ 이다. 네 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $Y$ 축의 (-)방향으로 이동하는 에지와 노드  $T$ 에서  $X$ 축의 (+)방향 에지가 연결된 경로  $(s_x, s_y), (s_x, s_{y-1}), (s_{x+1}, s_{y-1}), (s_{x+2}, s_{y-1}), \dots, (s_{i-1}, s_{y-1}), (s_i, s_{y-1}), (s_{i+1}, s_{y-1}), (s_{i+1}, s_y), (s_{i+1}, s_{y+1}), \dots, (s_{i+1}, s_{j-2}), (s_{i+1}, s_{j-1}), (s_{i+1}, s_j), (s_i, s_j)$ 이고 경로길이는  $|j-y| + |i-x| + 2$ 이다. □

**보조정리 2.** 보조정리 1에서 노드  $S(s_x, s_y)$ 와  $T(s_t, s_y)$  사이에 경로길이가  $n$ 인 경로 상의 한 노드가 고장이 발생했을 때, 고장노드를 우회하면서 경로 길이가  $n+2$ 인 경로를 설정할 수 있다.

**증명** 노드  $S(s_x, s_y)$ 에서  $T(s_t, s_y)$ 로 라우팅을 위한 경로가  $(s_x, s_y), (s_{x+1}, s_y), (s_{x+2}, s_y), \dots, (s_{i-1}, s_y), (s_i, s_y), (s_{i+1}, s_y), \dots, (s_t, s_y)$ 이고, 경로길이가  $|t-x|$ 이라 하자. 이때 라우팅 경로상의 노드  $(s_i, s_y)$ 이 고장인 경우 노드  $S(s_x, s_y)$ 에서  $T(s_t, s_y)$ 로의 라우팅은 다음과 같다. 노드  $S(s_x, s_y)$ 에서  $T(s_t, s_y)$ 로의 경로 상에 고장노드  $(s_i, s_y)$ 가 위치하고 있으므로 이를 우회할 수 있는 경로를 다음과 같이 설정할 수 있고,  $(s_x, s_y), (s_{x+1}, s_y), (s_{x+2}, s_y), \dots, (s_{i-1}, s_y), (s_{i-1}, s_{y+1}), (s_i, s_{y+1}), (s_{i+1}, s_{y+1}), (s_{i+1}, s_y), \dots, (s_t, s_y)$  경로의 길이는 본래의 경로길이 보다 2 증가한  $|t-x| + 2$ 이다. □

**정리 1.**  $n \times k$  토러스는 Strong Fault Tolerance를 갖는다( $n, k \geq 3$ ).

**증명**  $n \times k$  토러스에서 고장노드와 노드  $S, T$ 가 위치한 관계 및 거리에 따라 다음의 경우로 나눌 수 있다. 첫째, 노드  $S$ (또는  $T$ )에만 고장노드 2개가 인접한 경우 둘째, 노드  $S$ 와  $T$ 에 고장 노드가 각각 1개씩 인접한 경우, 셋째, 노드  $S$ 와  $T$ 에 고장 노드 2개가 동시에 인접한 경우, 넷째 노드  $S$ (또는  $T$ )에만 고장 노드 1개가 인접한 경우, 다섯째, 노드  $S$ 와  $T$ 에 고장 노드가 인접하지 않은 경우이다. 위의 5가지 경우에서 첫 번째 경우와 다섯 번째 경우만 증명하고 나머지는 보조정리 1, 2에 의해 알 수 있다.

**경우1.** 노드  $S$ (또는  $T$ )에만 고장노드 2개가 인접

고장노드 2개가 노드  $T$ 에만 인접한 경우도 노드  $S$ 에만 인접한 경우와 유사하므로 노드  $S$ 의 경우만 분석한다.

1-1.  $\text{dist}(S, T) \geq 1$  이고, 노드  $S$ 와  $T$ 가 동일한 행에 위치 노드  $S(s_x, s_y)$ 와  $T(t_x, t_y)$ 가 동일한 행에 위치해 있고, 노드  $T$ 의 행과 열의 위치가  $t_x = s_{x+i}$ 과  $t_y = s_y$  즉,  $T(s_{x+i}, s_y)$ 이라 하자( $1 \leq i \leq k$ ). 고장노드  $F'(f'_x, f'_y)$ 와  $F''(f''_x, f''_y)$ 가 노드  $S$ 에 인접하여 있는 경우이므로, 고장노드  $F'$ 와  $F''$ 의 노드 주소는  $\{(s_{x-1}, s_y), (s_x, s_{y+1}), (s_x, s_{y-1})\}$ 중의 2개이다. 노드  $S(s_x, s_y)$ 에 인접한 2개 노드가 고장이므로 노드  $S$ 에서  $T$ 로 구성할 수 있는 경로는 2개이다. 첫 번째 경로는 노드  $S$ 와  $T$ 가 동일한 행에 있으므로  $(s_x, s_y), (s_{x+1}, s_y), (s_{x+2}, s_y), \dots, (s_{x+i-2}, s_y), (s_{x+i-1}, s_y), (s_{x+i}, s_y)$ 이고, 경로길이는  $|x-i|$ 이다. 두 번째 경로는 고장노드  $F'$ 와  $F''$ 의 위치에 따라 2가지로 나눌 수 있다. ① 고장노드  $F'$ 와  $F''$ 가  $\{(s_{x-1}, s_y), (s_x, s_{y+1})\}$ 일 때, 경로는  $(s_x, s_y), (s_x, s_{y-1}), (s_{x+1}, s_{y-1}), (s_{x+2}, s_{y-1}), \dots, (s_{x+i-2}, s_{y-1}), (s_{x+i-1}, s_{y-1}), (s_{x+i}, s_{y-1}), (s_{x+i}, s_y)$ 이고, 경로의 길이는  $|x-i| + 2$ 이다. ② 고장노드  $F'$ 와  $F''$ 가  $\{(s_x, s_{y+1}), (s_x, s_{y-1})\}$ 일 때, 노드  $S$ 에서  $T$ 로의 라우팅 경로는  $(s_x, s_y), (s_{x-1}, s_y), (s_{x-2}, s_y), \dots, (s_{x+i-2}, s_y), (s_{x+i-1}, s_y), (s_{x+i}, s_y)$ 이고, 경로의 길이는 노드  $S$ 와  $T$ 가 위치해 있는 행의 에지 개수이므로  $k - |x-i|$ 이다.

1-2.  $\text{dist}(S, T) = 2$ ,  $S$ 와  $T$ 가 서로 다른 행(또는 열)에 위치 노드  $S(s_x, s_y)$ 와  $T(t_x, t_y)$ 의 거리가 2이고, 노드  $S$ 와  $T$ 가 서로 다른 행(또는 열)에 위치해 있으므로 노드  $T$ 의 위치는  $T = \{(s_{x-1}, s_{y-1}), (s_{x+1}, s_{y+1}), (s_{x-1}, s_{y+1}), (s_{x+1}, s_{y-1})\}$ 중의 한 위치로 나타낼 수 있다. 여기서  $T$ 의 위치를  $(s_{x+1}, s_{y-1})$ 이라 할 때, 고장노드  $F'$ 와  $F''$ 의 주소는 노드  $T$ 의 위치에 따라  $\{(s_{x-1}, s_y), (s_x, s_{y+1})\}$ 이다. 노드  $S(s_x, s_y)$ 에 인접한 2개 노드가 고장이므로 노드  $S$ 에서  $T$ 로 구성할 수 있는 경로는 2개이다. 첫 번째 경로는  $(s_x, s_y), (s_{x+1}, s_y), (s_{x+1}, s_{y-1})$ , 두 번째 경로는  $(s_x, s_y), (s_x, s_{y-1}), (s_{x+1}, s_{y-1})$ 이고, 경로길이는 최대 2이다.

1-3.  $\text{dist}(S, T) = 3$ ,  $S$ 와  $T$ 가 서로 다른 행(또는 열)에 위치 노드  $S(s_x, s_y)$ 와  $T$ 의 거리가 3이고, 서로 다른 행에 위치하고 있으므로 노드  $T$ 가 위치할 수 있는 곳은  $\{(s_{x-1}, s_{y+2}), (s_{x-2}, s_{y+1}), (s_{x-1}, s_{y-2}), (s_{x-1}, s_{y-2}), (s_{x+1}, s_{y-2}), (s_{x+2}, s_{y-1}), (s_{x+2}, s_{y+1}), (s_{x+1}, s_{y+2})\}$  중의 하나이다. 메쉬 구조는 노드 및 에지 대칭적이므로 노드  $T$ 가  $(s_{x+1}, s_{y-2})$ 인 경우만 보인다. 노드  $S(s_x, s_y)$ 와  $T(s_{x+1}, s_{y-2})$ 에서 2개의 고장노드가 노드  $S$ 에만 인접한 경우 고장이 발생한 고장노드  $F'$ 와  $F''$ 의 주소는  $\{(s_{x+1}, s_y), (s_x, s_{y+1}), (s_{x-1}, s_y), (s_x, s_{y-1})\}$ 이다. 이때 고장노드의 위치에 따라 4가지 경우만 고려한다. ① 고장노드  $F'$ 와  $F''$ 가 노드  $S$ 와 동일한 행에 위치한  $\{(s_{x+1}, s_y), (s_{x-1}, s_y)\}$ 인 경우, 첫 번째 경로는  $(s_x, s_y), (s_x, s_{y-1}),$

$(S_{x+1, S_y-1}, S_{x+1, S_y-2})$ 이고, 경로길이는 3이다. 두 번째 경로는  $(S_x, S_y), (S_x, S_y+1), (S_x, S_y+2), \dots, (S_x, S_y-3), (S_x, S_y-2)$ 이고, 경로길이는  $n-3$ 이다. ② 고장노드  $F'$ 와  $F''$ 가 노드  $S$ 와 동일한 열에 위치한  $\{(S_x, S_y+1), (S_x, S_y-1)\}$ 인 경우, 첫 번째 경로는  $(S_x, S_y), (S_{x+1, S_y}), (S_{x+1, S_y-1}), (S_{x+1, S_y-2})$ 이고, 경로길이는 3이다. 두 번째 경로는  $(S_x, S_y), (S_{x-1, S_y}), (S_{x-1, S_y-1}), (S_{x-1, S_y-2}), (S_x, S_y-2), (S_{x+1, S_y-2})$ 이고, 경로길이는 5이다. ③ 고장노드  $F'$ 와  $F''$ 가  $\{(S_x, S_y+1), (S_{x-1, S_y})\}$ 인 경우, 첫 번째 경로는  $(S_x, S_y), (S_{x+1, S_y}), (S_{x+1, S_y-1}), (S_{x+1, S_y-2})$ 이고, 경로길이는 3이다. 두 번째 경로는  $(S_x, S_y), (S_x, S_y-1), (S_x, S_y-2), (S_{x+1, S_y-2})$ 이고, 경로길이는 3이다. ④ 고장노드  $F'$ 와  $F''$ 가  $\{(S_{x+1, S_y}), (S_x, S_y-1)\}$ 인 경우, 첫 번째 경로는  $(S_x, S_y), (S_{x-1, S_y}), (S_{x-2, S_y-1}), \dots, (S_{x+2, S_y}), (S_{x+2, S_y-1}), (S_{x+2, S_y-2}), (S_{x+1, S_y-2})$ 이고, 경로길이는  $k+1$ 이다. 두 번째 경로는  $(S_x, S_y), (S_x, S_y+1), (S_x, S_y+2), \dots, (S_x, S_y-3), (S_x, S_y-2), (S_{x+1, S_y-2})$ 이고, 경로길이는  $n-1$ 이다.

1-4.  $\text{dist}(S, T) \geq 4$

노드  $S(S_x, S_y)$ 에 고장노드 2개가 인접하고, 노드  $T$ 와 거리가 4이상인 경우에서 고장노드  $F'$ 와  $F''$ 가 동일한 행 또는 열에 위치한 경우는 위의 1-1과 유사한 방법으로 경로를 설정할 수 있다. 노드  $S$ 와  $T$ 가 동일한 행 또는 열에 위치하지 않은 경우 라우팅은 위의 보조정리에 의한 라우팅 방법을 적용한다.

경우5. 고장노드가 노드  $S$ 와  $T$ 에 인접하지 않은 경우

5.1 노드  $S$ 와  $T$ 가 동일한 행(또는 열)에 위치

노드  $S$ 와  $T$ 가 동일한 행(또는 열)에 있을 때, 노드  $S$ 와  $T$ 에 인접한 노드들이 고장이 발생하지 않은 경우 보조정리 1과 보조정리 2에 의해 4개의 병렬경로를 구성할 수 있다.

5.2 노드  $S$ 와  $T$ 가 서로 다른 행과 열에 위치하는 경우

이 경우는  $\text{dist}(S, T)$ 에 따라 거리가 2인 경우와 2 이상인 경우로 나눌 수 있다. 먼저 거리가 2인 경우는 다음과 같다. 노드  $S(S_x, S_y)$ 와  $T(t_x, t_y)$ 의 거리가 2이고, 노드  $S$ 와  $T$ 가 서로 다른 행(또는 열)에 위치해 있으므로 노드  $T$ 의 위치는  $T = \{(S_{x+1, S_y-1}), (S_{x+1, S_y+1}), (S_{x-1, S_y+1}), (S_{x-1, S_y-1})\}$ 중의 한 위치로 나타낼 수 있다. 여기서 노드  $S$ 와  $T$ 에 인접한 노드  $\{(S_x, S_y-1), (S_{x+1, S_y}), (S_{x-1, S_y}), (S_x, S_y+1), (S_{x+1, S_y+2}), (S_{x+2, S_y+1})\}$ 들은 고장이 발생할 수 없으므로 고장노드  $F'$ 와  $F''$ 의 주소는 위의 8개 노드를 제외한 노드들에서만 발생 가능하다. 이때 고장노드  $F'$ 와  $F''$ 의 주소가  $\{(S_x, S_y+2), (S_{x+1, S_y+3})\}$ 인 경우 최대의 라우팅 경로를 갖는다. 첫 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $Y$ 축의 (+) 방향 예지와 노드  $T$ 에서  $X$ 축의

(-) 방향 예지에 의해 연결되는 경로  $(S_x, S_y), (S_x, S_y+1), (S_{x+1, S_y+1})$ 이고, 경로의 길이는 2이다. 두 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $X$ 축의 (+) 방향 예지와 노드  $T$ 에서  $Y$ 축의 (-) 방향 예지에 의해 연결되는 경로  $(S_x, S_y), (S_{x+1, S_y}), (S_{x+1, S_y+1})$ 이고, 경로의 길이는 2이다. 세 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $X$ 축의 (-) 방향 예지와 노드  $T$ 에서  $X$ 축의 (+) 방향 예지에 의해 연결되는 경로  $(S_x, S_y), (S_{x-1, S_y}), (S_x, S_y+1), (S_{x-1, S_y+1}), (S_{x-2, S_y+1}), \dots, (S_{x+3, S_y+1}), (S_{x+2, S_y+1}), (S_{x+1, S_y+1})$ 이고, 경로의 길이는  $k - |x-i| + 1$ 이다. 네 번째 경로는 노드  $S$ 에서  $Y$ 축의 (-) 방향 예지, 랩어라운드 예지를 경유하고 노드  $T$ 에서  $Y$ 축의 (+) 방향 예지에 의해 연결되는 경로  $(S_x, S_y-1), (S_x, S_y-2), (S_x, S_y-3), \dots, (S_x, S_y+3), (S_{x-1, S_y+3}), (S_{x-2, S_y+3}), (S_{x-3, S_y+3}), \dots, (S_{x+2, S_y+3}), (S_{x+2, S_y+2}), (S_{x+1, S_y+2}), (S_{x+1, S_y+1})$ 이고, 경로의 길이는  $n+2$ 이다.

따라서 위의 증명에 의해  $n \times k$  토러스에서 임의의 두 노드 사이에 Strong Fault Tolerance한 병렬 경로가 존재함을 알 수 있고, 그 경로 길이는  $n+2$  이하임을 알 수 있다. □

4. 결론

본 논문에서는 상호연결망으로 널리 사용되고 있는  $n \times k$  토러스에서 고장 노드가 있을 때, 노드 중복하지 않는 병렬 경로를 구성하기 위해 최근에 개념이 제안된 Strong Fault Tolerance에 대해 분석하였다.  $n \times k$  토러스의 분지수가 4인 정규 연결망에서 고장 노드의 개수가 매우 적은 조건이지만, 고장 노드의 개수와 위치에 따라 두 노드간에 메시지 전송을 위한 병렬경로의 길이가 토러스의 지름보다 크다는 사실을 알 수 있으며, 노드 고장시에도 적절한 라우팅 경로를 구성할 수 있음을 알 수 있다.

참고문헌

- [1] J. Bruck, R. Cypher and C.-R. Ho, "Wildcard Dimensions, Coding Theory and Fault-Tolerant Meshes and Hypercubes," IEEE Trans. on Computers, vol. 44, no. 1, pp. 150-155, 1995.
- [2] E-S. OH and J. Chen, "Parallel Routing in Hypercube Networks with Faulty Nodes," ICPADS, pp. 338-345, 2001.
- [3] E-S. OH and J. Chen, "Strong Fault-Tolerance : Parallel Routing in Star Networks with Faults," Technical Reports, Dept. Computer Science, Texas A&M Univ. 2001.
- [4] J. G. Peters and M. Syska, "Circuit-Switched Broadcasting in Torus Networks," IEEE Trans. parallel Distributed system., vol. 7, no. 3, pp. 246-255, March 1996.