충격파에서의 물성치 진동현상에 대한 분석

Analysis of Oscillatory Behaviors in Shock Waves

김규홍[1], 김종암[1], 노오현[1]
Kyu-Hong Kim, Chongam Kim and Oh-Hyun Rho

The M-AUSMPW+ scheme that can capture shock waves exactly with monotonic characteristics is modifided from AUSMPW+ by analyzing the cause of oscillation in shock regions. Firstly shock-capturing characteristics of general FVS including the AUSM-type schemes are investigated in detail, according to the difference between a cell-interface and a sonic transition position. The cause of oscillation is the improper numerical dissipation that could not represent the real physics. The M-AUSMPW+ could capture shocks exactly without oscillatory behaviors in considering the sonic transition position and an cell-interface position.

1. 서 론

수치기법의 단조성에 대한 연구는 수치기법 개발에 있어 주요 관심사 중의 하나다. 연속적으로 변하는 영역을 수치해석을 하는 것은 수치적 안정성 측면에서 볼 때 별 어려움 없이 계산이 가능하다. 그러나 충격파와 같은 불연속면 영역에서는 진동현상과 같은 수치적으로 불안정한 모습이 나타나게 되어 계산을 수행하는데 많은 어려움이 있다. 이러한 불연속면을 포착하는데 있어 중요한 것은 수치진동현상 없이 단조성을 유지하면서 동시에 정확하게 포착할 수 있느냐는 것이다. AUSM 계열 수치기법의 단조성에 대해 살펴보면, 초기의 AUSM 수치기법은 충격파 불연속면과 접촉불연속면을 구분해 줄 수 있는 유동정보가 전혀 없기 때문에 충격파나 접촉불연속면에서의 각각에 알맞은 수치점성이 적용되지 못해 두가지 불연속면에서 모두 진동현상을 유발하였으나 AUSMPW+수치기법에서는 압력가중함수를 도입함으로써 이를 해결할 수 있었다. 그러나 AUSMPW+ 수치기법 역시 충격파 불연속면에서 음속천이점 위치에 따라 약간의 진동현상을 보여주는 문제점을 안고 있다. 이는 AUSMPW+에서 사용된 음속은 제어면이 아음속에 위치해 있는지 혹은 초음속에 위치해 있는지에 대한 정보는 주지만 음속천이점이 제어면과 어느 정도 떨어져 있는지에 대한 정보가 부정확하기 때문에 생긴 결과이다. M-AUSMPW+는 수치기법의 단조성을 평가할 수 있는 수학적 방법을 유도하고 이를 통해 단조성을 확보할 수 있는 관계식을 도출하여 마하수 전 영역에서 단조성을 확보할 수 있었다. 또한 유도된 수학적 방법을 통해 AUSMPW 계열 압력가중함수에 대한 타당성을 확보하였다.

2. 각 수치기법의 단조성 증명

AUSM계열 수치기법을 이용한 제어면에서 플럭스는 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$\boldsymbol{F}_{\frac{1}{2}} = \overline{M_L^+} c_{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Phi}_L + \overline{M_L^-} c_{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Phi}_R + P_L^+ \boldsymbol{P}_L + P_R^- \boldsymbol{P}_R \quad (1)$$

아래첨자 L,R은 제어면을 기준으로 좌우 물성치를 나타내고 위첨자 +와 - 는 물성치 전달 방향을 의미한다.

2.1 AUSM+

1) 서울대학교 기계항공공학부 (151-742 서울시 관악구 신림동 Tel : 02-880-7380)

i) $m_{\frac{1}{2}} = M_L^+ + M_R^- \geq 0$

$$\overline{M_L^+} = M_L^+ + M_R^-, \quad \overline{M_R^-} = 0 \tag{2}$$

ii) $m_{\frac{1}{2}} = M_L^+ + M_R^- < 0$

$$\overline{M_L^+} = 0, \quad \overline{M_R^-} = M_R^- + M_L^+, \tag{3}$$

좌우 마하수는 AUSM계열의 수치기법과 같이 다음과 같이 정의된다.

$$M_{L,R} = \frac{U_{L,R}}{c_{\frac{1}{2}}} \tag{4}$$

제어면에서의 음속은 다음과 같이 정의된다.

$$c_{\frac{1}{2}} = \min\left(\frac{c^{*2}}{\max(|U_L|, c^*)}, \frac{c^{*2}}{\max(|U_R|, c^*)}\right) \tag{5}$$

critical 음속은 $c^* = \sqrt{2(\gamma-1)/(\gamma-1)H}$ 이다.

2.2 AUSMPW+ 과 M-AUSMPW+

i) $m_{\frac{1}{2}} \geq 0$

$$\overline{M_L^+} = M_L^+ + M_R^- \cdot [(1-\omega)\cdot(1+f_R) - f_L], \quad \overline{M_R^-} = M_R^- \cdot \omega \cdot (1+f_R) \tag{6}$$

ii) $m_{\frac{1}{2}} < 0$

$$\overline{M_L^+} = M_L^+ \cdot \omega \cdot (1+f_L), \quad \overline{M_L^-} = M_L^- + M_R^+ \cdot [(1-\omega)\cdot(1+f_L) - f_R], \tag{7}$$

압력가중함수 f와 w는 다음과 같다.

$$\omega(p_L, p_R) = 1 - \min\left(\frac{p_L}{p_R}, \frac{p_R}{p_L}\right) \tag{8}$$

$$f_{L,R} = \left(\frac{p_{L,R}}{p_s} - 1\right) \times \min\left(1, \frac{\min(p_{1,L}, p_{1,R}, p_{2,L}, p_{2,R})}{\min(p_l, p_R)}\right), \quad p_s \neq 0 \tag{9}$$

여기서 $p_s = P_L^+ p_L + P_R^- p_R$ [3]

AUSMPW+

AUSMPW+의 음속은 다음과 같다.

i) $\frac{1}{2}(U_L + U_R) > 0 : \; c_{\frac{1}{2}} = \frac{c^{*2}}{\max(|U_L|, c^*)}$

ii) $\frac{1}{2}(U_L + U_R) < 0 : \; c_{\frac{1}{2}} = \frac{c^{*2}}{\max(|U_R|, c^*)}$ (10)

M-AUSMPW+

M-AUSMPW+에서는 압력가중함수는 다음과 같다.

$$\omega = \min\left[1, \max\left(|M_L|\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, |M_R|\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right)\right] \tag{11}$$

$$f_{L,R} = \left(\frac{P_{L,R}}{P_s} - 1\right) \times (1-w) \tag{12}$$

그리고, AUSMPW+의 충격파 포착 특성을 분석한 결과 $M_L^* > 1$, $M_R^* < 1$, $M_L^* M_R^* < 1$ 인 경우 단조성을 만족하지 못하는 것으로 나타났다. 본 논문에서는 단조성 확보를 위해 문제의 영역 $M_L^* > 1$, $M_R^* < 1$, $M_L^* M_R^* < 1$ 에서 압력 분할 함수를 다음과 같이 보정한다.

i) $M_L^* > 1$, $M_R^* < 1$, $M_L^* M_R^* < 1$

$$P_R^- = \frac{1 - (\rho_L u_L (u_L - u_R) + p_L}{p_R} \tag{13}$$

ii) $M_L^* > -1$, $M_R^* < -1$, $M_L^* M_R^* < 1$

$$P_R^+ = \frac{1 - (\rho_R u_R (u_R - u_L) + p_R}{p_L} \tag{14}$$

3. 충격파 주위의 진동현상 분석

다음은 수치 해석 과정에서 충격파 내부를 도식화 한 그림이다.

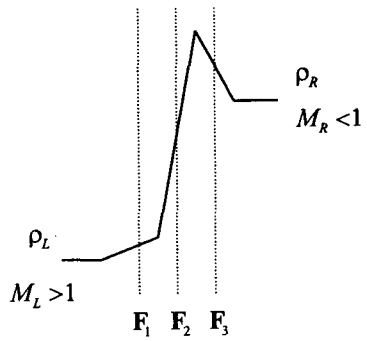

Fig. 1 수치해석 단계에서의 충격파 내부 개략도.

수렴된 해가 단조성을 유지하기 위해서는 충

격파를 거쳐서 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$M_L \geq M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq M_R \tag{15}$$

우선 마하수 조건 식(14)이 만족한다고 가정하면, critical 음속으로 사용한 특성마하수 역시 다음과 같이 단조성을 가진다.

$$M_L^* \geq M_1^* \geq M_2^* \geq M_3^* \geq M_R^* \tag{16}$$

위 조건을 이용하여 AUSM+, AUSMPW+와 M-AUSMPW+수치기법의 단조성을 살펴보자.

일반적으로 엔탈피가 보존되는 FVS형태의 수치기법을 적용하여 제어면에서 플럭스를 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
F_L &= U_L\Phi_L + P_L \\
F_1 &= \overline{M}_{LL}c_{LL}\Phi_L + \overline{M^-}_{1R}c_{1R}\Phi_1 \\
&\quad + P_L + P^-_{1R}P_1 \\
F_2 &= \overline{M^+}_{1L}c_{1L}\Phi_1 + \overline{M^-}_{2R}c_{2R}\Phi_2 \\
&\quad + P_{1L}{}^+P_1 + P_{2R}{}^-P_2 \\
F_3 &= \overline{M^+}_{2L}c_{2L}\Phi_2 + \overline{M^-}_{RR}c_{RR}\Phi_R \\
&\quad + P_{2L}{}^+P_2 + P_{RR}{}^-P_R \\
F_R &= U_R\Phi_R + P_R
\end{aligned} \tag{17}$$

수렴해가 존재한다고 가정하면, 각 제어면에서의 플럭스는 모두 같게 된다.

i) $F_1 = F_2$

mass flux :

$$\rho_1(\overline{M^+}_{1L}c_{1L} - \overline{M^-}_{1R}c_{1R}) + \rho_2\overline{M^-}_{2R}c_{2R} - \rho_L M_{LL}c_{LL} = 0$$

momentum flux :

$$\begin{aligned}
f_{12} &= \rho_1 M_1^* c^*(\overline{M^-}_{1L}c_{1L} - \overline{M^-}_{1R}c_{1R}) \\
&\quad + \rho_2 M_2^* C^* \overline{M^-}_{2R}c_{2R} \\
&\quad - \rho_L M_L^* C^* M_{LL}c_{LL} + p_1(P^+_{1L} - P^-_{1R}) \\
&\quad + p_2 P^-_{2R} - p_L = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

energy flux :

$$\rho_1 H_1(\overline{M^+}_{1L}c_{1L} - \overline{M^-}_{1R}c_{1R}) + \rho_2 H_2\overline{M^-}_{2R}c_{2R} - \rho_L H_L M_{LL}c_{LL} = 0$$

ii) $F_2 = F_3$

mass flux :

$$\rho_2(\overline{M^+}_{2L}c_{2L} - \overline{M^-}_{2R}c_{2R}) + \rho_R\overline{M^-}_{RR}c_{RR} - \rho_1\overline{M^+}_{1L}c_{1L} = 0$$

momentum flux :

$$\begin{aligned}
f_{23} &= \rho_2 M_2^* c^*(\overline{M^+}_{2L}c_{2L} - \overline{M^-}_{2R}c_{1R}) \\
&\quad + \rho_R M_R^* C^* \overline{M^-}_{RR}c_{RR} \\
&\quad - \rho_1 M_1^* C^* M_{1L}c_{1L} + p_2(P^+_{2L} - P^-_{2R}) \\
&\quad + p_R P^-_{RR} - p_L P^+_{1L} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{19}$$

energy flux :

$$\rho_2 H_2(\overline{M^+}_{2L}c_{2L} - \overline{M^-}_{2R}c_{2R}) + \rho_R H_R\overline{M^-}_{RR}c_{RR} - \rho_1 H_1\overline{M^+}_{1L}c_{1L} = 0$$

연속방정식을 연립하여 밀도를 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{\left(\rho_L M_{LL}c_{LL} + \dfrac{\rho_R\overline{M^-}_{RR}c_{RR}\overline{M^-}_{2R}c_{2R}}{\overline{M^+}_{2L}c_{2L} - \overline{M^-}_{2R}c_{2R}}\right)}{\left(\dfrac{\overline{M^+}_{1L}c_{1L}\overline{M^+}_{2L}c_{2L}}{\overline{M^+}_{2L}c_{2L} - \overline{M^-}_{2R}c_{2R}} - M^-_{1R}c_{1R}\right)} \\
&= \rho_1(M_L^*, M_R^*)
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1\overline{M^+}_{1L}c_{1L} - \rho_R\overline{M^-}_{RR}c_{RR}}{\overline{M^+}_{2L}c_{2L} - \overline{M^-}_{2R}c_{2R}} = \rho_2(M_L^*, M_R^*)$$

mass flux와 energy flux로 부터 전엔탈피를 구해보면,

$$H_L = H_1 = H_2 = H_R \tag{21}$$

임을 알 수 있다. 식(1)로 표현되는 모든 FVS 형태의 수치기법은 충격파를 통해 전엔탈피를 보존하는 것을 알 수 있다.

마지막으로 상태방정식으로부터 압력을 구해보면,

$$p_1 = \rho_1\frac{\gamma-1}{2\gamma}[2H_1 - (M_1^*c^*)^2] = p_1(M_1^*, M_2^*) \tag{22}$$

$$p_2 = \rho_2\frac{\gamma-1}{2\gamma}[2H_2 - (M_2^*c^*)^2] = p_2(M_1^*, M_2^*)$$

최종적으로 함수 f_{12}와 f_{23}을 살펴보면, 셀 1과 2의 마하수에 대한 함수임을 알 수 있다.

즉, $f_{12} = f_{12}(M_L^*, M_R^*) = 0$, $f_{23} = f_{23}(M_L^*, M_R^*) = 0$

각 수치기법에 대해 위 방정식의 해가 단조성을 가지는 마하수 조건을 만족하게 되면 수치기

법은 충격파 포착시 단조성을 유지하게 된다. 위 식은 에 대해 외재적으로 표현이 불가능하기 때문에 수치적으로 해를 구하였다.

AUSM+

그림 2는 AUSM+ 수치기법 분석 결과이다. 함수 f_{12}과 f_{23}과 0과 만나는 점이 즉, $f_{12}=f_{12}(M_L^*, M_R^*)=0$, $f_{23}=f_{23}(M_L^*, M_R^*)=0$ 의 해가 셀 2에서의 마하수이다. 셀 2에서의 마하수가 M_R보다 작은 경우는 충격파를 지난 뒤 과도하게 압축된 경우로 식(16)로 주어진 단조성 조건을 만족하지 못하는 해이다. M_R보다 큰 경우는 물성치 진동현상 없이 단조성을 가지고 충격파를 포착함을 의미한다. AUSM+수치기법의 경우 M_1이 M_L과 같을 경우 즉, 음속천이점이 정확하게 $i+3/2$ 제어면 위에 위치해 있을 경우만 $M_2=M_R$이고 다른 모든 경우에 대해서는 모두 M_R보다 작은 값을 가지는 것을 볼 수 있다. 특히 $1<M_1<M_L$인 경우, 진동현상이 매우 심한 수렴해를 보여준다.

i) $1\le M_1<M_L$

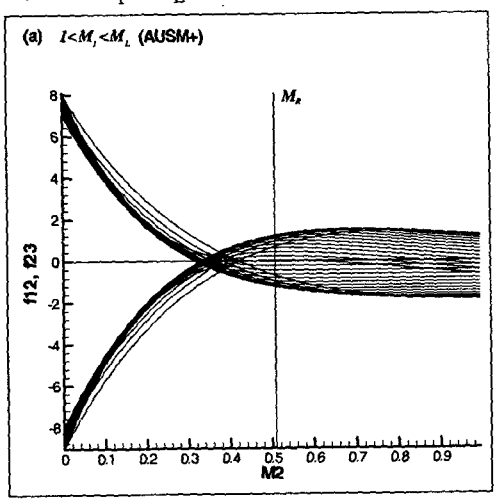

Fig. 2(a) AUSM+의 함수 f_{12}와 f_{23}
($M_L=3, 1<M_1<M_L$)

그림 2(b)역시 M_1이 M_R과 같을 경우 즉, 음속천이점이 정확하게 $i+1/2$ 제어면 위에 위치해 있을 경우만 $M_2=M_R$이고 다른 모든 경우에 대해서는 모두 M_R보다 작은 값을 가지는 것을 볼 수 있다. 즉, AUSM+는 항상 진동현상을 나타낸다.

ii) $M_R\le M_1<1$

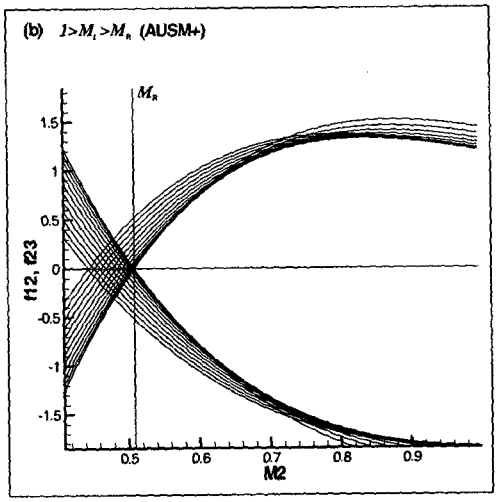

Fig. 2(b) AUSM+의 함수 f_{12}와 f_{23}
($M_L=3, 1>M_1>M_R$)

AUSMPW+

i) $1\le M_1<M_L$

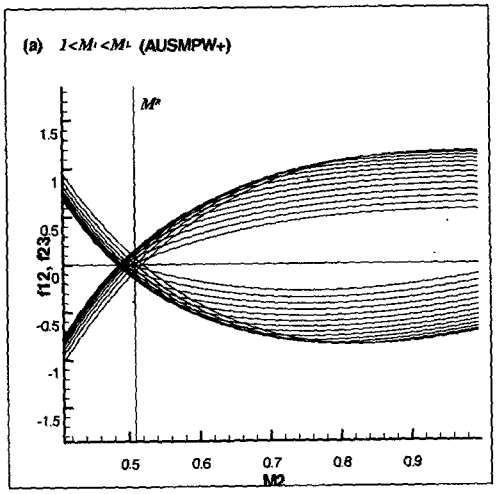

Fig. 3(a) AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23}
($M_L=3, 1<M_1<M_L$)

ii) $M_R \le M_1 < 1$

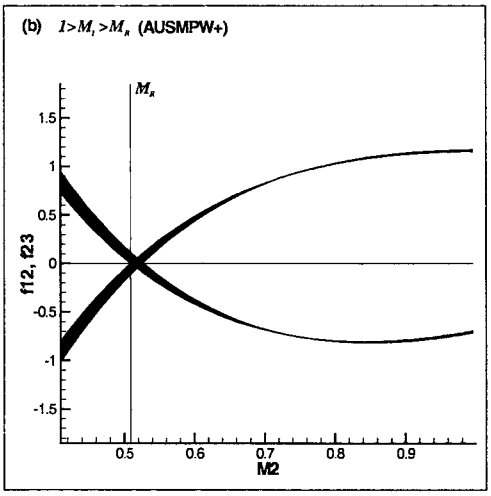

Fig. 3(b) AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23}
($M_L=3, 1>M_1>M_R$)

그림 3(a)에서 $1<M_1<M_L$ 경우에는 M_2이 항상 M_R보다 작은 것을 볼 수 있다. 이는 AUSMPW+ 수치기법은 위의 마하수 영역에서 단조성을 만족시키지 못한다는 것을 의미한다. 즉, AUSMPW+ 수치기법 역시 M_1이 초음속일 경우 진동현상이 존재하는 것을 알 수 있다. 다만 AUSM+ 수치기법과 비교하여 볼 때 진동현상이 매우 작은 적을 알 수 있다. $1>M_1>M_R$ 경우 M_2가 M_R보다 크고 이는 단조성을 만족하는 것을 알 수 있다.

M-AUSMPW+

i) $1 \le M_1 < M_L$

AUSMPW+ 결과와 비교해 볼 때 AUSMPW+ 결과가 수치 점성이 약간 많은 것을 알 수 있는데 이는 함수 f 에 의한 영향을 M-AUSMPW+는 마하수가 커짐에 따라 f 를 제거함으로써 충격파 포착 정확도를 높였다. 그림 4(a)는 거의 중간셀 하나를 충격파를 포착하고 있음을 보여준다.

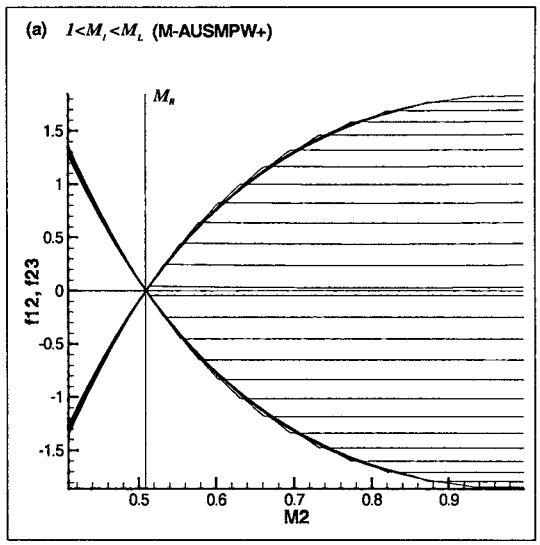

Fig. 4(a) M-AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23}
($M_L=3,\ 1<M_1<M_L$)

ii) $M_R \le M_1 < 1$

식(17)와 (18)은 모두 M_1과 M_2의 함수로 아래첨자 2가 충격파 뒤의 상태를 나타낸다고 가정하면 M_1에 따라 상태 2가 결정된다. 만약 식이 M_1에 관계없다면 식은 M_2만의 함수가 된다.

식(17)에 연속방정식을 적용하면, 아래와 같이 표현된다.

$$f_{12}(M_1, M_2) = \rho_1 u_1 (u_1 - u_2) + p_1 + p_2(P_{2R}^- - 1) + \rho_L u_L (u_2 - u_L) + p_2 - p_L = 0 \quad (23)$$

여기서 M_1에 관한 항은 다음과 같다.

$$\rho_1 u_1 (u_1 - u_2) + p_1 + p_2(P_{2R}^- - 1) = 0 \quad (24)$$

식(23)을 M_1에 대해 독립이라고 가정하면, M_2는 $\rho_L u_L (u_2 - u_L) + p_2 - p_L = 0$에 의해 결정된다. 그런데 충격파 관계식에서 이미 $\rho_L u_L (u_R - u_L) + p_R - p_L = 0$ 을 만족하기 때문에 $M_2 = M_R$이고 결국 2 상태는 R 상태를 나타내게 된다. 그러므로 $M_L^* > 1$, $M_R^* < 1$, $M_L^* M_R^* < 1$ 인 영역에서 식(13,14)와 같이 압력분할 함수를

보정한다면 충격파를 하나의 중간셀을 통해 포착할 수 있다.

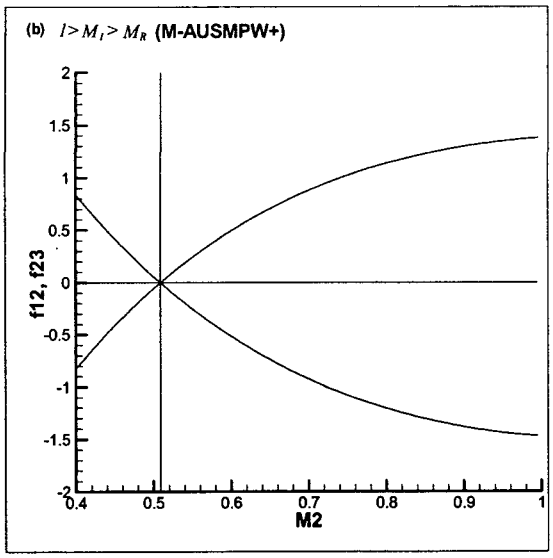

Fig. 4(b) M-AUSMPW+의 함수 f_{12}와 f_{23}
(M_L=3, $1>M_1>M_R$)

4. 결 론

AUSM계열 수치기법이 가지는 진동현상에 대해 수학적, 수치적 방법을 이용하여 이를 증명하였다. 정성적으로 알려진 내용을 수학적 측면에서 접근 이를 확인할 수 있었고, 각 수치기법의 진동 크기에 대한 직접적인 비교 역시 가능하였다. 이를 통해 M-AUSMPW+수치기법은 어떠한 유동 조건에서도 충격파 포착시 단조성을 유지하는 것을 확인할 수 있었다. 참고로 AUSM+는 음속천이점이 제어면 위에 있는 경우를 제외하고는 모든 경우 진동현상을 보여주었고 AUSMPW+는 음속천이점이 제어면 앞쪽에 있는 경우에 진동현상을 유발하는 것을 확인 할 수 있었다. AUSM계열 수치기법에서 advection 특성을 유지하고서는 단조성을 유지하면서 충격파를 포착하는 것이 불가능하다. 충격파 진동현상을 제거하면서 동시에 접촉불연속면을 포착하기 위해서는 단순한 마하수 분할 함수와 압력분할 함수만으로는 불가능하며 압력가중함수와 같은 유동현상에 대한 정보를 줄 수 있는 새로운 변수의 도입이 필요하고 AUSMPW+수치기법과 같이 advection성질을 유동상태에 따라 적절히 조절하는 것이 필수적이라 할 수 있다.

5. 참고문헌

[1] Gressier, J., Villedieu, P., and Moshetta, J. M., "Positivity of Flux Vector Splitting Schemes," J. of Computational Physics, 155, (1999), pp. 199-220.

[2] Liou, M. S., "A Sequel to AUSM: AUSM+," J. of Computational Physics, 129, (1996), pp. 364-382.

[3] Kim, K. H., Kim, C., and Rho, O. H., "Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows, PART I: AUSMPW+ Scheme," J. of Computational Physics, 174, (2001) pp. 38-80.

[4] Yee, H. C., Kolpfer, G. H., and Montague, J. L., "High-Resolution Shock Capturing Schemes for Inviscid and Viscous Hypersonic Flows," NASA TM 101088, 1989.

[5] Harten, A., "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," J. of Computational Physics, 49, (1983), pp. 357-393.

[6] Sweby, P. K., "High Resolution TVD Schemes Using Flux Limiters," Lectures in Applied Mathematics, 22, (1985), pp. 289-309.

[7] Hirsh, C., Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 1,2, (John Wiley & Sons, 1990).