

예조건화된 압축성유동 수치기법에서의 풍상차분법의 수치특성 검토

길재흥^{*1}, 이두환^{*1}, 최윤호^{*2}, 권장혁^{*3}, 이승수^{*4}

Numerical Characteristics of Upwind Schemes for Preconditioned Compressible Navier-Stokes Equations

J. H. Gill, D. H. Lee, Y. H. Choi, J. H. Kwon and S. S. Lee

Studies of the numerical characteristics of implicit upwind schemes, such as upwind ADI, Line Gauss-Seidel(LGS) and Point Gauss-Seidel(LU) algorithms, for preconditioned Navier-Stokes equations are performed. All the algorithms are expressed in approximate factorization form and Von Neumann stability analysis and convergence studies are made. Preconditioning is applied for efficient convergence at low Mach numbers and low Reynolds numbers. For high aspect ratio computations, the ADI and LGS algorithms show efficient and uniform convergence up to moderate aspect ratio if we adopt viscous preconditioning based on min-CFL/max-VNN time-step definition. The LU algorithm, on the other hand, shows serious deterioration in convergence rate as the grid aspect ratio increases. Computations for practical applications also verify these results.

Key Words: 예조건화(Preconditioning), 풍상차분법(Upwind algorithm), 수치안정성 해석(Stability analysis), 격자중횡비(Aspect ratio), 근사분해기법(approximate factorization), 수렴특성(Convergence characteristics)

1. 서 론

초기의 CFD 알고리즘은 Navier-Stokes 방정식의 대류항의 이산화시 주로 중심차분법을 이용하였다. 이와 같은 이산화 시스템은 본질적으로 내재변(LHS)이 diagonally dominant하지 않으므로 Jacobi나 Gauss-Seidel 등의 일반적인 relaxation 알고리즘을 사용할 경우 불안정하게 된다. Beam과 Warming[1] 및 Briley와

MacDonald[2]의 근사분해기법은 이와 같은 시스템의 내재변에 대한 역행렬을 성공적으로 구한 대표적인 내재적 방법이며, 이는 ADI (alternating direction implicit) 기법[3]으로부터 확장된 것이다. 1980년대 중반부터는 유동장의 심한 불연속 현상을 잘 예측할 수 있는 풍상차분법이 널리 쓰이기 시작하였다. 이와 같은 풍상차분법은 내재하고 있는 diagonal dominance 특성으로 인하여 내재변의 역행렬을 구하는데 다양한 근사적 방법을 사용할 수 있는 장점을 가지고 있다[4]. 현재 이러한 풍상차분법은 압축성 유동을 해석하는 가장 적합한 전산해석 기법으로 알려져 있는 시간전진법과 함께 널리 사용

*1) 아주대학교 대학원 기계공학과

*2) 아주대학교 기계 및 산업공학부

*3) 한국과학기술원 항공우주공학전공

*4) 국방과학연구소

되고 있다.

시간전진법은 높은 속도의 유동 및 Re 수가 큰 유동의 해석에는 적합하지만, 저속 및 저 Re 수의 유동에서는 수렴성이 크게 저하되는 단점을 가지고 있음은 잘 알려져 있다. 이러한 문제를 해결하고자 다양한 예조건화 방법이 개발되었으며, 이는 상당한 응용 범위에서 사용되고 있다[5-7]. 본 연구에서는 압축성 유동 수치기법의 수렴성 가속을 위해 2차원 압축성 Navier-Stokes 방정식에 Choi와 Merkle[5]의 예조건화 방법을 적용하였고, 이렇게 예조건화된 시스템에 풍상차분법의 다양한 근사분해 알고리즘(ADI 근사분해 기법, point Gauss-Seidel 기법[8-9], line Gauss-Seidel 기법[10-11]) 적용하여 그 수치 특성을 알아보고자 하였다. 이를 위하여 von Neumann 안정성 해석을 통하여 각 기법과 격자의 종횡비에 따른 수치안정성을 알아보았으며, 실제 계산을 통하여 수렴특성을 검토하였다.

2. 지배방정식

2.1 예조건화 Navier-Stokes 방정식

예조건화된 2차원 압축성 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같은 식으로 쓸 수 있다.

$$\Gamma_p \frac{\partial Q_p}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = L(Q_p) \quad (1)$$

여기서, Γ_p 는 예조건화행렬이며, 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma_p = \begin{pmatrix} \rho_p' & 0 & 0 & \rho_T' \\ u\rho_p' & \rho & 0 & u\rho_T' \\ v\rho_p' & 0 & \rho & v\rho_T' \\ h_0\rho_p' - (1-\rho h_p) & \rho u & \rho v & h_0\rho_T' + \rho h_T \end{pmatrix}$$

식 (1)의 종속변수벡터 Q_p 와 플럭스벡터, E , F 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q_p &= \{p, u, v, T\}^T \\ E &= \{\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e+p)u\}^T \\ F &= \{\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (e+p)v\}^T \end{aligned} \quad (2)$$

또한 식 (1)의 우변은 점성항을 나타내며, 다음과 같은 연산자 L 에 의해서 표현된다.

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial}{\partial x} R_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} R_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} R_{yx} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} R_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, R_{ij} 는 각각 점성계수와 열전도계수로 이루어진 확산계수행렬이다.

위의 예조건화행렬에는 가상적인 물성치 ρ_p' 과 ρ_T' 이 포함되어 있으며, $\rho_p' = \rho_p$, $\rho_T' = \rho_T$ 로 정의하면, $\Gamma_p = \partial Q / \partial Q_p$ 이 되어 식 (1)은 일반적인 Navier-Stokes 방정식으로 되돌아가게 된다. 여기서 ρ_p , ρ_T 는 완전기체에서 다음과 같다.

$$\rho_p = 1/RT, \quad \rho_T = -\rho/T$$

2.2 예조건화 매개변수의 정의

예조건화된 시스템에서의 고유치 λ_+ , λ_- 는 다음 식과 같이 변경된다.

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} [u(1+\epsilon) \pm \sqrt{u^2(1-\epsilon)^2 + 4\epsilon c^2}] \quad (4)$$

식 (4)에서 Mach수가 1보다 작을 때 ϵ 을 Mach수의 제곱과 같게 하면 모든 고유치가 비슷한 크기를 유지하게 된다. 또 Mach수가 1보다 크면, ϵ 의 값을 1로 설정함으로써 원래의 예조건화되지 않은 시스템으로 돌아가게 된다. 따라서 비점성 유동에서 예조건화를 적용할 경우 시간간격은 CFL수의 정의($CFL = \lambda_+ \Delta t / \Delta x$)에 따라 다음 식에 의해서 결정된다.

$$\Delta t = \Delta t_{inv} = \frac{2\Delta x CFL}{u(1+\epsilon) + \sqrt{u^2(1-\epsilon)^2 + 4\epsilon c^2}}$$

이 방법은 고 Re 수의 점성 유동에서도 효율적인 수렴특성을 얻을 수 있다.

Re 수가 작은 점성 유동에서는 점성 효과가 지배적일지라도 파동의 전파와 같은 비점성 효과가 여전히 중요한 영향을 미치기 때문에 CFL수와 VNN ($VNN = \nu \Delta t / \Delta x^2$)수를 함께 조절하여 시간간격을 결정해야 한다. CFL수와 VNN 수를 함께 조절하는 방법은 Choi와 Merkle[5]이 처음으로 제시하였다. 점성 유동의 경우 ϵ 을 ϵ_{vis} (비점성 유동의 경우는 ϵ_{inv})라고 하면, ϵ_{vis} 에 대하여 다음과 같은 표현을 얻을 수 있다.

$$\epsilon_{vis} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-1+c^2/u^2}, \quad \alpha = \frac{CFL}{VNN} \frac{1}{Re_{\Delta x}}$$

위에서 정의한 시간간격 정의와 예조건화 매개변수의 정의를 종합해 보면 점성 유동에 대하여 예조건화 매개변수를 다음과 같이 정의할 수

있다.

$$\epsilon = \text{Min}[\text{Max}(\epsilon_{inv}, \epsilon_{vis}), 1]$$

여기서 비점성 예조건화 매개변수 ϵ_{inv} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_{inv} = (u^2 + v^2)/c^2$$

점성 예조건화 매개변수 ϵ_{vis} 는 중형비가 큰 격자계에서의 수렴속도 증진을 위하여 maximum VNN 시간간격 정의에 따르면 다음과 같다.

$$\epsilon_{vis} = \text{Max}[\epsilon_{vis}^x, \epsilon_{vis}^y] \quad (5)$$

$$\epsilon_{vis}^x = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-1 + \frac{\rho h_T}{du^2}}, \quad \epsilon_{vis}^y = \frac{\beta(\beta-1)}{\beta-1 + \frac{\rho h_T}{dv^2}}$$

$$\alpha = \frac{CFL}{VNN} \frac{AR^2}{Re_{\Delta x}}, \quad \beta = \frac{CFL}{VNN} \frac{1}{AR^2 Re_{\Delta y}}$$

$$\rho h_T / d = c^2$$

$$d = \rho h_T \rho_p + \rho_T(1 - \rho h_p)$$

여기서, $AR = \Delta x / \Delta y$ 이고, $Re_{\Delta x} = u \Delta x / \nu$, $Re_{\Delta y} = v \Delta y / \nu$ 이다.

3. 수치해석 기법

식 (1)의 대류항을 플럭스 차분 분할법(flux difference splitting)을 이용하여 이산화하고, 시간에 대하여 Euler 내재적 차분을 수행하면, 다음과 같이 이산화된 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left[\Gamma_p + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\nabla_x A^+ + \Delta_x A^-) \right. \\ & \left. + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\nabla_y B^+ + \Delta_y B^-) \right. \\ & \left. - \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} R_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} R_{yy} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \Delta Q_p \\ & = -\Delta t R^n \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, $A_i^\pm = (A_{pi} \pm \Gamma_p) \Gamma_p^{-1} A_{p|i \pm 1/2} / 2$ 로 정의되고, $A_p = \partial E / \partial Q_p$ 이다. 또, R^n 은 정상상태의 잔여항을 나타내며 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} R^n &= \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \left(R_{xx} \frac{\partial Q_p}{\partial x} - R_{xy} \frac{\partial Q_p}{\partial y} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial y} \left(R_{yx} \frac{\partial Q_p}{\partial x} - R_{yy} \frac{\partial Q_p}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

식 (6)의 해는 몇 가지 근사적인 방법을 통해 효과적으로 얻을 수 있다. 본 연구에서는 보편적으로 사용되는 ADI, line Gauss-Seidel과 point Gauss-Seidel 방법을 고려하였으며, 모든 알고리즘은 다음과 같은 근사분해식으로 표현하였다. 또한 내재변은 1차 정확도, 잔여항은 3차 정확도로 이산화하였다.

$$N_1 D^{-1} N_2 \Delta Q_p = -\Delta t R^n$$

3.1 ADI 알고리즘

풍상차분 ADI 알고리즘은 대류항을 풍상차분법으로 차분하는 것을 제외하면 본질적으로 중심차분 ADI 알고리즘과 같다. ADI 알고리즘은 x방향으로 sweep한 후 y방향으로 sweep하는 방식이며, 근사분해된 형태는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} N_1 &= \left[\Gamma_p + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\nabla_x A^+ + \Delta_x A^-) \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (R_{xx|+1/2} \Delta_x - R_{xx|-1/2} \nabla_x) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2 &= \left[\Gamma_p + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\nabla_y B^+ + \Delta_y B^-) \right. \\ & \left. - \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (R_{yy|+1/2} \Delta_y - R_{yy|-1/2} \nabla_y) \right] \end{aligned}$$

$$D = \Gamma_p \quad (7)$$

3.2 Line Gauss-Seidel 알고리즘

Line Gauss-Seidel(LGS) 알고리즘은 계산영역을 각각의 격자 라인마다 block tridiagonal inversion을 수행하면서 전후로 sweep하는 방식이다. LGS 알고리즘은 2-sweep 또는 4-sweep 방식으로 적용될 수 있으며, 2-sweep LGS 알고리즘의 근사분해 식은 다음과 같다.

$$N_1 = \left[D - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i-1}^+ - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} R_{xx|i-1/2} \mid_{i-1} \right]$$

$$N_2 = \left[D + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i+1}^- - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} R_{xx|i+1/2} \mid_{i+1} \right]$$

$$\begin{aligned}
 D &= S - \frac{\Delta t}{\Delta y} (B_{j-1}^+ - B_{j+1}^-) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (R_{yy_{j+1/2}} |_{j+1} + R_{yy_{j-1/2}} |_{j-1}) \\
 S &= \Gamma_b + \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_i^+ - A_i^-) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (B_j^+ - B_j^-) \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (R_{xx_{i+1/2}} + R_{xx_{i-1/2}}) \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (R_{yy_{j+1/2}} + R_{yy_{j-1/2}})
 \end{aligned} \quad (8)$$

4-sweep LGS 알고리즘은 2-sweep 알고리즘의 x방향으로의 전후 sweep에 이어 y방향으로도 전후 sweep을 수행한다.

3.3 Point Gauss-Seidel 알고리즘

2-sweep Point Gauss-Seidel(LU) 알고리즘은 첫 번째 sweep에서는 하삼각행렬이, 두 번째 sweep에서는 상삼각행렬이 형성되므로 LU 알고리즘이라 부르기도 한다. 2차원에서 LU 알고리즘은 다음과 같은 근사분해 알고리즘으로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \left[S - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i-1}^+ - \frac{\Delta t}{\Delta y} B_{j-1}^+ \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} R_{xx_{i-1/2}} |_{i-1} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Delta t}{\Delta y^2} R_{yy_{j-1/2}} |_{j-1} \right] \\
 N_2 &= \left[S - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{i+1}^- - \frac{\Delta t}{\Delta y} B_{j+1}^- \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} R_{xx_{i+1/2}} |_{i+1} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\Delta t}{\Delta y^2} R_{yy_{j+1/2}} |_{j+1} \right]
 \end{aligned}$$

$$D = S \quad (9)$$

여기서, S는 식 (8)의 정의와 같다.

4. 수치안정성 해석

Navier-Stokes 방정식의 계산에서 수렴특성은 대류 및 확산항의 영향을 받는다. 특정한 계산격자에서 확산항의 크기는 무차원 점성시간, 즉 VNN수에 의해서 대표된다. 대류와 확산의 상대적인 중요성은 cell $Re(Re_{\Delta x}$ 또는 $Re_{\Delta y})$ 수에 대응하는 CFL과 VNN의 비로 주어진다. 실제 Re 수가 높은 유동을 계산할 때 일반적으로 cell Re 수는 1보다 훨씬 작은 수에서부터 1보다

훨씬 큰 수까지 다양하게 나타난다. 전체적인 유동의 Re 수가 커더라도 경계층의 영역을 계산하기 위해 밀집시킨 격자와 경계층 영역의 낮은 속도 때문에 이 영역에서 cell Re 수는 작아진다. 반면, 나머지 영역에서는 격자 크기가 크고 상대적으로 속도가 크기 때문에 cell Re 수는 커진다. 따라서 Navier-Stokes 방정식의 계산에서는 시간간격을 결정하는데 이처럼 광범위한 cell Re 수를 고려해야 한다.

순수한 확산 문제에서는 각각의 격자에서 최소 VNN에 기초해서 최적의 국소 시간간격을 결정해야 하지만, Navier-Stokes 방정식은 이러한 순수 확산 문제와는 거리가 있다. creeping flow에서 조차도 비점성 모드는 수렴성에 중요한 영향을 미치며, 점성 특성만을 고려하여 시간간격을 결정하는 것은 이러한 비점성 모드를 무시하는 것이 되므로, cell Re 수가 매우 큰 경우 외에는 예조건화인자 ϵ 은 주어진 문제의 점성 모드와 비점성 모드를 동시에 최적화할 수 있도록 조정되어야 한다.

중심차분 ADI 기법에 대한 연구에서 min-CFL/max-VNN을 사용하는 것이 효과적인 것으로 밝혀진 바 있다[7]. 큰 중횡비를 갖는 점성 유동 문제에서 이와 같이 혼합된 (min/max) 시간간격 정의를 사용하는 이유는 유동 방향으로 지배적인 현상은 주로 대류에 의한 것이고(minimum CFL에 의해 표현됨), 유동에 직교하는 방향으로 지배적인 현상은 점성에 의한 것(maximum VNN에 의해 표현됨)이라는 것과 관련이 있다.

4.1 ADI 알고리즘

다양한 중횡비를 갖는 점성유동 문제에 적용한 풍상차분 ADI 기법의 안정성 해석 결과를 Fig. 1에 나타내었다. $Re_{\Delta x}=10$, $M=0.001$, $v/u=1$ 을 사용하였고, CFL과 VNN은 각각 min-CFL=5, max-VNN=100의 값을 사용하였고, 이 값들은 여러 경우의 수 중 거의 최적으로 나타난 값들이다. 풍상차분 ADI 알고리즘의 안정성 해석 결과 min-CFL/max-VNN 점성 예조건화를 사용하였을 경우 AR이 100이상이 되면 저 wavenumber 영역에서 amplification factor가 1에 가까워지게 되고, 따라서 오차의 감쇠효과가 저하되는 것을 알 수 있다. 실제로 수렴성 검토

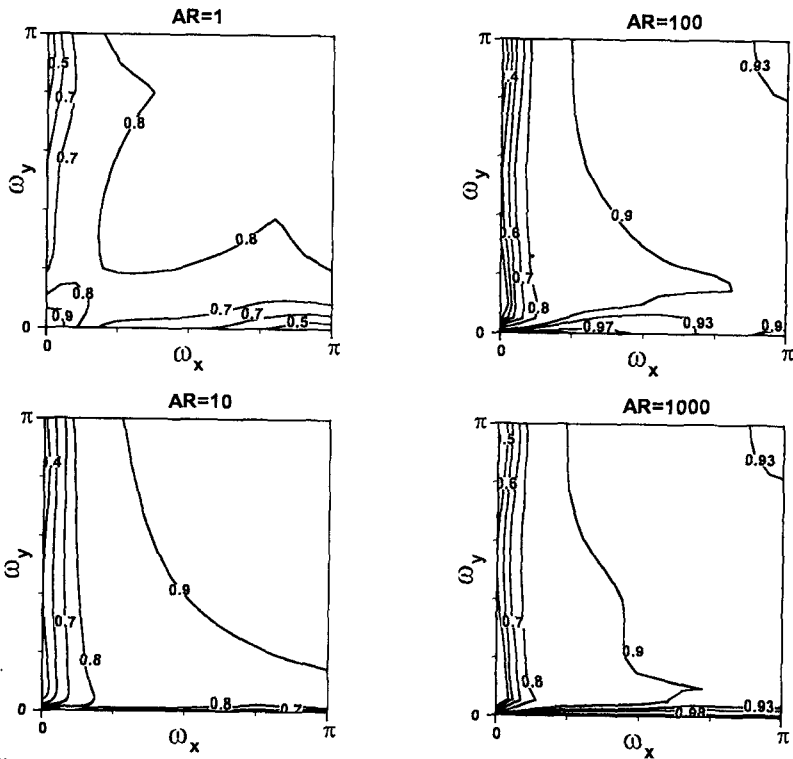


Fig. 1 Stability results for the upwind ADI algorithm applied to the Navier-Stokes equations : $M=0.001$, flow angle= 45° , $Re_{\wedge x}=10$, $CFL_x=5$, $VNN_y=100$.

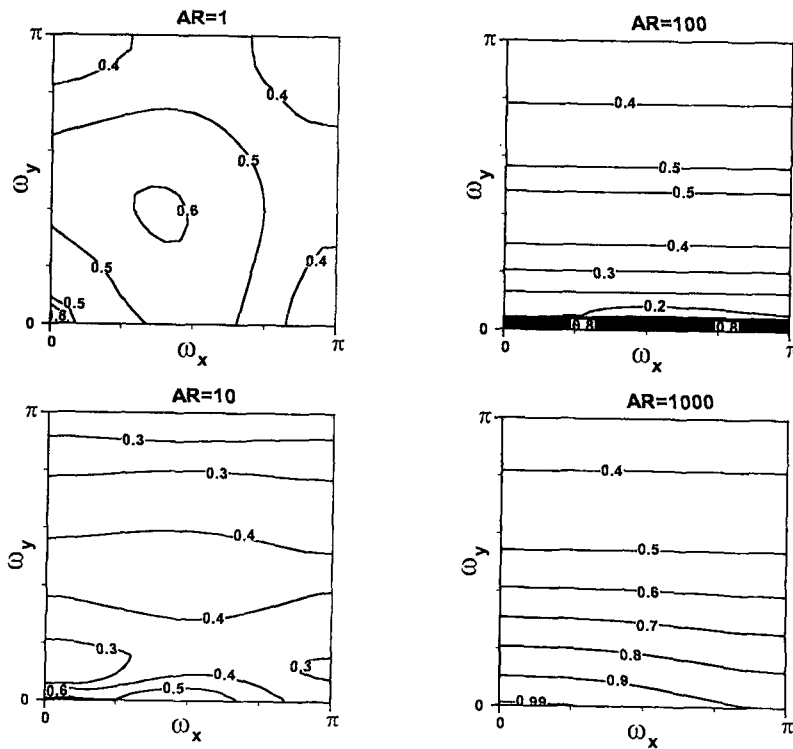


Fig. 2 Stability results for the upwind LGS-4 algorithm applied to the Navier-Stokes equations : $M=0.001$, flow angle= 45° , $Re_{\wedge x}=10$, $CFL_x=20$, $VNN_y=100$

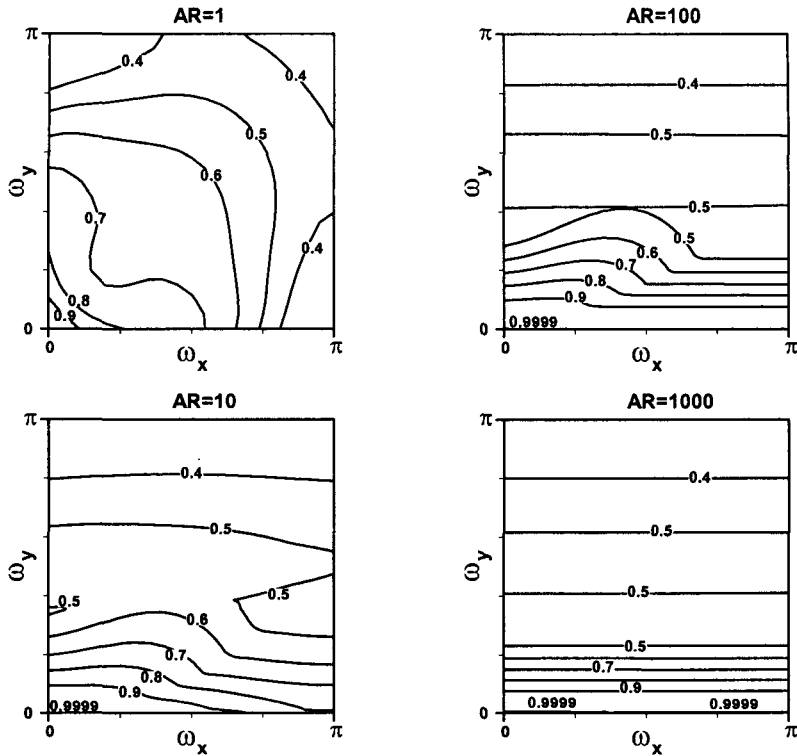


Fig. 3 Stability results for the upwind LU algorithm applied to the Navier-Stokes equations : $M=0.001$, flow angle= 45° , $Re_{\Delta x}=10$, $CFL_x=1 \times 10^6$, $VNN_y=1 \times 10^6$.

결과 AR이 1000이 되면 수렴성이 현저히 저하되었다.

4.2 Line Gauss-Seidel 알고리즘

4-sweep line Gauss-Sedel(LGS-4) 기법의 안정성 해석 결과를 Fig. 2에 나타내었다. $Re_{\Delta x}=10$, $M=0.001$, $v/u=1$, $CFL_x=20$, $VNN_y=100$ 을 사용하였고, 여기에서도 amplification factor는 대부분의 계산영역에서 안정된 값을 보이지만 종횡비가 증가하면 저wavenumber에서 강직성을 보인다.

점성이 지배적인 문제에서 LGS 기법은 무조건 안정하지만, 더 큰 시간간격을 사용하여도 감쇠특성은 더 이상 향상되지 않았다. 이것은 큰 시간간격을 사용하여도 수렴성은 크게 향상되지 않음을 의미한다.

4.3 Point Gauss-Seidel 알고리즘

다양한 종횡비를 갖는 점성유동 문제에 대하여 min-CFL/max-VNN 점성 예조건화를 사용

한 LU 기법의 안정성 해석 결과를 Fig. 3에 나타내었다. 여기서 $Re_{\Delta x}=10$, $Re_{\Delta y}=0.1$, $M=0.001$, $v/u=1$ 이다. 또, $CFL_x=10^6$, $VNN_y=10^6$ 으로 유지하였고, 이 값들은 종횡비가 1인 경우 최적값이며, 앞의 LGS 알고리즘과 마찬가지로 CFL수를 더 크게 하여도 감쇠특성의 변화는 나타나지 않았다. LU 알고리즘의 경우 큰 종횡비의 격자에서는 저wavenumber 영역에서 amplification factor가 거의 1이 되는 것을 볼 수 있고, 따라서 종횡비가 큰 문제에서는 비효율적임을 알 수 있다. 이러한 특성은 예조건화 행렬의 정의보다는 Point Gauss-Seidel 기법의 본질적인 특성 때문인 것으로 보인다.

앞의 식 (5)에서도 알 수 있듯이 점성 예조건화 매개변수 ϵ_{vis} 는 수치적으로는 CFL/VNN의 함수이며, 다양한 안정성 해석 결과 이 비는 LU 알고리즘의 경우 1이 최적의 값으로 나타났다. 또 ADI 및 LGS 알고리즘의 경우 각각 0.05, 0.2의 값이 최적으로 나타났다.

5. 수렴특성 검토

앞에서 계산한 수치 안정성 해석을 검증하기 위하여 각 알고리즘을 사용하여 축소-확대 노즐을 통과하는 유동에 대한 계산을 수행하고, 그 수렴특성을 알아보았다.

71×61 격자를 사용하였고, 벽면 근처의 경계층을 고려하기 위하여 격자는 벽면 쪽으로 밀집시켰으며, 이 때 노즐의 목 부분에서 종횡비가 가장 큰(약 2200) 격자가 생긴다. 노즐 목 부분의 유동조건과 목의 직경으로부터 계산된 Re수는 3×10^5 이고, 목에 대한 입구의 면적비는 0.1이다. 이 때 입구 부분에는 저Mach수($M \approx 0.05$)의 유동이 생긴다. 또한 입구에서 등엔트로피 유동으로 가정하여 총엔탈피는 1000kJ/kg, 유동각도는 0° 로 유지하고, 특성곡선기법(MOC)을 사용하여 경계조건을 설정하였다.

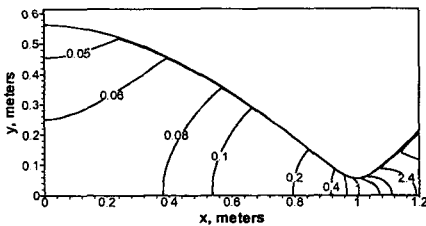


Fig. 4 Converged Mach contours for the converging-diverging nozzle case.

Fig. 4에 수렴한 Mach수 분포를 나타내었고, Fig. 5는 세 가지 알고리즘에 대한 수렴곡선이다. 모든 알고리즘에 min-CFL 정의를 사용하였고, 그 값은 ADI, LGS-4, LU의 순서로 각각 3, 10, 10이다. 사용한 VNN수는 ADI, LGS-4, LU의 순서로 각각, 10, 100, 100이다. LU 기법은 더 큰 CFL과 VNN을 사용하여도 계산이 가능하지만, 수렴특성이 향상되지는 않았다.

실선은 점성 예조건화를 적용하고, min-CFL/max-VNN 정의를 사용하여 계산한 결과이며, 쇠선은 예조건화를 사용하지 않은 경우의 결과이다. 예조건화를 사용할 경우 각 기법마다 정도는 다르지만 수렴특성이 눈에 띄게 향상되었다. 격자종횡비가 부분적으로 매우 크지만 (약 2200), 안정성 해석의 예측과는 다르게 LU 기법에서도 수렴특성이 많이 향상되었다. 이는 큰

종횡비가 부분적으로 존재하기 때문에 LU 기법의 수렴특성에 많은 영향 미치지 않은 것으로 보인다.

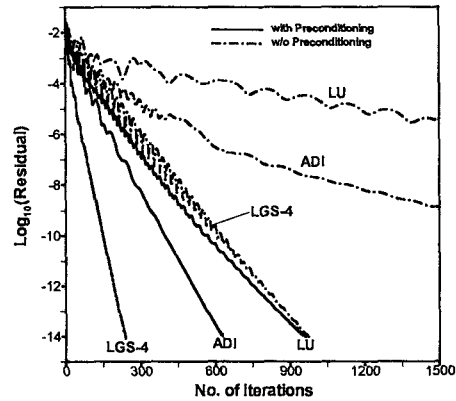


Fig. 5 Convergence for the converging-diverging nozzle case.

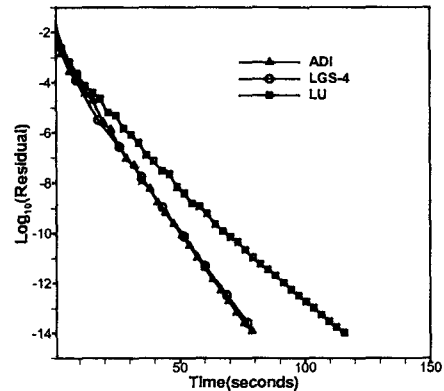


Fig. 6 Time history of residual for the converging-diverging number nozzle case.

Fig. 6은 각 알고리즘이 수렴하는 동안 소요된 시간을 나타낸다. Fig. 5를 보면, 계산 횟수로는 LGS-4 알고리즘이 다른 알고리즘에 비해 월등히 빠른 것처럼 보이지만, LGS-4 알고리즘은 내부 반복계산 회수가 많으므로 1회 계산에 소요되는 시간이 길어진다. 따라서 실제 계산 속도는 ADI 알고리즘과 거의 같은 것을 알 수

있다. LU 알고리즘은 1회의 계산시간은 ADI 알고리즘과 비슷하지만 수렴하기 위해 필요한 계산 회수가 많기 때문에 소요 시간 또한 길어지게 된다.

6. 결 론

본 연구에서는 수렴성 가속을 위해 예조건화 된 Navier-Stokes 방정식에 적용한 내재적 풍상차분 알고리즘의 수치안정성 및 수렴특성을 살펴보았다.

수치 안정성 해석 결과 각 알고리즘에서 최적의 CFL과 VNN의 비는 ADI, LGS, LU 알고리즘의 순서로 각각 0.05, 0.2, 1로 나타났다. 저 Mach수 및 저 Re 수의 유동에서 빠른 수렴성을 얻기 위해서는 예조건화가 필요하였고, ADI 및 LGS 알고리즘은 $\min\text{-CFL}/\max\text{-VNN}$ 시간간격 정의를 이용하여 $AR=100$ 정도까지는 격자중형비에 상관없이 빠른 수렴성을 얻을 수 있었다. 반면에 LU 알고리즘은 큰 격자중형비의 문제에는 적합하지 않았다.

각 알고리즘을 실제 문제에 적용하였을 때의 성능을 평가하기 위하여 nozzle 유동에 대한 계산을 수행하였으며, 역시 예조건화를 이용하여 수렴성 향상을 얻을 수 있었다.

참고문헌

- [1] Beam, R.M. and Warming, R.F., "An Implicit Finite Difference Algorithm for Hyperbolic System in Conservation Law Form." *J. Comput. Phys.*, Vol.22 (1976), p.87-110.
- [2] Briley, W.R. and McDonald, H., "Solution of the Multi-Dimensional Compressible Navier-Stokes Equation by a Generalized Implicit Method," *J. Comput. Phys.*, Vol.24 (1977), p.372-397.
- [3] Douglas, J. and Gunn, J.E., "A General Formulation of Alternating Direction Method - Part I - Parabolic and Hyperbolic Problem," *Numerische Mathematik*, Vol.82 (1964), p.428-453.
- [4] Chakravarthy, S., "Relaxation Methods for Unfactored Implicit Upwind Schemes," *AIAA Paper* 84-0165 (1984).
- [5] Choi, Y.H. and Merkle, C.L., "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," *J. Comput. Phys.*, Vol.105, No.2(1993), p.207-223.
- [6] Weiss, J.M. and Smith, W.A., "Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows," *AIAA J.*, Vol.33 (1995), p.2050-2057.
- [7] Buelow, P.E.O., Venkateswaran, S., and Merkle, C.L., "The Effect of Grid Aspect Ratio on Convergence," *AIAA J.*, Vol.32, No.12 (1994), p.2401-2408.
- [8] Jameson, A. and Turkel, E., "Implicit Schemes and LU Decompositions," *Mathematics of Computation*, Vol.37, No.156 (1981), p.385-397.
- [9] Rosenfeld, M., Kwak, D. and Vinokur, M., "A Solution Method for the Unsteady and Incompressible Navier-Stokes Equations in Generalized Coordinate Systems," *AIAA paper* 88-0719 (1988).
- [10] MacCormack, R.W., "Current Status of Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations," *AIAA Paper* 85-0032 (1985).
- [11] Taylor, A.C., Ng, W.F. and Walter, R.W., "Upwind Relaxation Methods for the Navier-Stokes Equations Using Inner Iteration," *J. Comput. Phys.*, Vol.99 (1992), p.68-78.