격자 조절기법에 관한 연구

A Study on the Techniques of Grid Control for Numerical Grid Generation

윤 용 현*1)
Yong Hyun Yoon

When computing the flow around complex three dimensional configurations, the generation of grid is the most time consuming part of any calculation. The object of this study is to develop the grid cluster techniques capable of resolving complex flows with shock waves, expansion waves, shear layers, and cursive shapes. The knot insert method of Non-Uniform Rational B-Splines is described as a grid control method.

Key Words : 격자구성(Grid Generation), 격자밀집(Grid Cluster), NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline), 절점삽입(Knot Insert), 조절점(Control Point)

1. 서 론

최근 전산유체역학(Computational Fluid Dynamics : CFD)은 형상이 복잡한 유동장은 물론 물리적 해석이 복잡한 현상에 대해서도 많은 해석 결과를에 보여 주고 있다. 이러한 문제들을 해석하는 과정에서 수치적 격자구성은 해의 수렴성이나 계산 결과의 신뢰성을 보장하는 가장 중요한 역할을 하고 있다는 인식아래 다양한 격자구성기법에 관한 연구가 집중되고 있다.

특히 유동장 형상이 굴곡이 심하고 형상변화가 큰 부분 뿐 만 아니라 점성유동해석을 위한 Navier-Stokes방정식이나 압축성 유동해석과 같이 물리적 특성이 변하는 부분이나 적응격자 또는 최적 설계를 위해 격자분포 및 그 조절은 격자구성과정에서 매우 중요한 기능을 하게 된다.

일반적으로 격자의 밀집도는 표면격자를 구성하는 단계에서 결정되며 적정한 격자수를 결정하는 것은 많은 경험이 필요하다. 등간격 이루어지는 격자에서 물리적으로 보다 많은 격자가 필요한 위치에 격자의 유연성과 연속성 그리고 직교성을 유지하면서 원하는 만큼의 격자수를 분포시키기 위한 기법의 필요성은 갈수록 중대되어 가고 있다.

이러한 요구를 충족하기 위해 사용하여 왔던 기법들은 지수함수나 Hyperbolic Tangent, Hyperbolic Sine 함수 등이[1]다[1]. 그러나 이러한 기법은 유동의 경계조건이 적용되는 위치에서 만 가능하기 때문에 유동장 내의 격자를 조절해야 할 필요가 있거나 적응 격자를 구성해야 할 때는 타원형 편미분 방정식의 제어함수(Control Function)를 많이 사용하였다[2].

본 연구에서는 이러한 기존 방법과는 달리 형상 모델링 분야에서 많이 사용되고 있는 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)를 이용하여 격자를 구성하는 과정에서 NURBS의 특성인 Knot Insert 방법을 이용하여 격자를 조절하는 기법을 소개하고자 한다.

2. 격자 조절함수

수치적 격자 구성과정에서 격자를 분포시키는 함수(Stretching Function)로는 대수적 기법으로 다음과 같은 함수들을 사용한다[3].

$$s(\xi) = \frac{\tanh\left(\frac{\delta}{2}\frac{\xi}{I}\right)}{\tanh\left(\frac{\delta}{2}\right)} \tag{1}$$

$$s(\xi) = 1 - \frac{\sinh\left[\delta\left(1 - \frac{\xi}{I}\right)\right]}{\sinh\delta} \tag{2}$$

*1) 공군사관학교 항공우주공학과

또한 타원형 편미분 방정식을 이용하여 유동장내의 격자를 조절하거나 적응 격자를 구성할 때는 다음과 같은 식을 이용한다[4]

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g^{ij}\ \vec{r}_{\xi^i\xi^j} + \sum_{k=1}^{3} g^{kk} P_k\ \vec{r}_{\xi^k} = 0 \qquad (3)$$

여기에서

$\vec{r}$: Position vector

g^{ij} : Contravariant metric tensor

ξ^i : Curvilinear coordinate

P_k : Control function

그런데 3차원 임의형상의 격자를 구성하는 NURBS (Non- Uniform Rational B-Splines)은 다음과 같은 식으로 나타낸다[5,6,7].

$$Q(u,w) = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1} B^h_{i,j}\ N_{i,k}(u)\ M_{j,l}(w) \qquad (4)$$

여기서 $B^h_{i,j}$는 4차원 동차 좌표로 나타내는 조절망(control net)이고, $N_{i,k}(u)$와 $M_{j,l}(w)$는 기저함수(basis function)이다.

(4)식을 동차 좌표계로 나누어주고 3차원 공간에 다시 투영시킨 Rational B-spline 형태의 식은 다음과 같다.

$$Q(u,w) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j}\ B^h_{i,j}\ N_{i,k}(u)\ M_{j,l}(w)}{\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j}\ N_{i,k}(u)\ M_{j,l}(w)} \qquad (5)$$

이를 이용하면 3차원 임의곡선 및 곡면을 구성할 수 있다. 특히 Control Net $B^h_{i,j}$는 3차원 임의 형상을 모델링하는데 중요한 기능을 한다[7]. 이러한 형상 모델링 과정에서 knot vector의 구성은 다음과 같은 Centripetal method를 사용한다.

$$c_{i+1} = c_i + \frac{\sqrt{|B_{i+1} - B_i|}}{d} \qquad i = 1,\ \cdots, n-1 \qquad (6)$$

여기에서, $c_1 = 0$, $c_{n+1} = 1$로 정하고, $d = \sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{|B_{i+1} - B_i|}$ 는 total chord length 이다.

식(6)에서 얻은 c 값으로 knot vector를 다음과 같이 구성한다.

$$x_{j+k-1} = \frac{1}{k-1}\sum_{i=j}^{j+k-2} c_i\ ,\ j = 2, \cdots, n-k+2 \qquad (7)$$

$$x_1 = \cdots = x_k = 0 \qquad x_{m-k+1} = \cdots = x_m = 1$$

한편 NURBS의 형상 모델링 과정에서 Control Point $B_{i,j}$을 이용하여 격자를 재분포시킬 수도 있다. 그런데 조절점(Control Point)을 이용하여 격자점을 분포시키는 것은 모델 형상 자체를 변화시키는 결과를 초래하므로 격자 구성 과정에서 이 방법은 바람직하지 못하다. 따라서 다음과 같은 절점 삽입(Knot Insert) 기법을 이용하면 매우 유용하다.

3. Knot Insert기법

격자를 구성할 때 가능한 본래의 유동장 형상에 충실하면서 격자를 원하는 위치에 분포시키는 것이 매우 중요하다. 본 연구에서 소개하고자 하는 Knot Insert 방법은 기본적으로 Knot Vector를 구성하는 과정에서 전체 범위의 크기를 '1'로 하여 격자분포를 상대적으로 조절하는 것이다.

이 기법은 곡선의 모양을 변화시키지 않고 새로운 knot x를 원하는 곡선의 구간 사이에 첨가하는 기법이다[8]. 즉 새로운 knot x가 $x_l \le x < x_{l+1}$ 구간 내에 있으면 strong convex hull 특성에 의해 임의 곡선 $P(t)$는 항상 조절점(Control Points) B_l, B_{l-1}, $\cdots$, B_{l-k+1}로 정의되는 convex hull내에 있게 된다. 그러므로 Knot Insert를 통해 구성된 새로운 knot vector상에서 Inverse를 통해 얻어진 새로운 조절점 Q_l는 B_{l-1}, B_l사이에서, Q_{l-1}는 B_{l-2}, B_{l-1}사이에서, 그리고 Q_{l-k+2}를 B_{l-k+1}, B_{l-k+2} 사이에서 찾을 때까지 반복 계산을 수행한다. 이상과 같은 방법으로 새로운 조절점 Q를 구하는 식은 다음과 같다.

$$Q_i = (1 - \alpha_i)B_{i-1} + \alpha_i B_i \qquad (8)$$

여기서 ratio α_i는 다음 식과 같다.

$$\alpha_i = \frac{x - x_i}{x_{i+k-1} - x_i}\ ,\quad l-k+2 \le i \le l \qquad (9)$$

결국 knot vector는 $[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_l,\ x,\ x_{l+1},\ \cdots, x_m]$ 로 구성되고, 본래의 조절점인 B_{l-k+1}, $B_{l-k+2}, \cdots,\ B_{l-1},\ B_l$으로부터 새로운 조절점 $Q_{l-k+1},\ Q_{l-k+2}$, 등을 구성한다
[그림 1,2 참조].

이처럼 Knot Insert 방법을 이용하여 각 방향에 대해 격자 분포를 수행할 수 있다. 항공기 날개의 경우 스팬 방향과 코드 방향에 대해 원하는 위치에 원하는 만큼의 격자점 분포가 가능하다.[그림3,4]

4. 결 론

수치적 격자구성을 수행하는데 있어서 격자점의 수나 그 밀집도는 해의 수렴성이나 결과의 타당성을 좌우하는 매우 중요한 요소라 할 수 있다. 물리적 변화가 큰 곳이나 형상이 복잡한 유동장에는 적절한 수의 격자를 밀집시켜야 하는데 필요한 기법의 하나로 NURBS의 Knot insert기법을 소개하였다.

본래 컴퓨터 지원 설계 분야에서 형상 모델링 기법으로 많이 사용되는 NURBS는 형상 모델링에 필요한 다양한 융통성을 가지고 있다. 즉 조절점(*Control Point*)를 이용한 형상설계, Inverse를 이용한 역설계, 그리고 가중치(Weight) 및 보간 차수(Order)에 따른 형상설계 변환 등 많은 다양성을 지니고 있어 형상 모델링 뿐 만 아니라 격자구성의 자유도를 높여주는 기법 중의 하나라고 할 수 있다. 본 연구에서는 NURBS의 Knot Insert를 통해 격자의 밀집도를 조절할 수 있음을 보여 주었다. NURBS기법은 유동의 특성인 점성이나 압축성의 물리적 특성이 변하는 부분이나 적응격자나 최적설계시의 격자분포조절이 가능하게 되어 격자구성 프로그램을 구성하는데 최적의 기법이라 할 수 있다.

참고문헌

[1] Joe F. Thompson, Z.U.A. Warsi, and C. Wayne Mastin, "Numerical Grid Generation: Foundation and Applications", North-Holland(1985), pp 279-305
[2] Joe F. Thompson," A Survey of Dynamically-Adaptive Grids in the Numerical Solution of Partial Differential Equations", Applied Numerical Mathematics(1985), pp 3-27
[3] Vinokur and Marcel, "On One Dimensional Stretching Functions for Finite-Difference Calculations", Journal of Computational Physics"
[4] Bharat K. Soni, Hugh Thornburg and Ming-Hsin Shih, " A Structured Multi-Block Grid Adaption Technique for Complex Separated Flows", Numerical Grid Generation for Computational Fluid Dynamics '91, Proceedings of the Third International Conference of Numerical Grid Generation" in CFD, Barcelonia, Spain(1991)
[5] 윤용현, 김진식, "NURBS를 이용한 형상모델링에 관한 연구", 한국항공우주학회 추계학술 대회 논문집(1999)
[6] Les Piegl and Wayne Tiller. "The NURBS Book", New York, Springer(1995), pp 85-90
[7] Les Piegl and Wayne Tiller. "Mathematical Elements for Computer Graphics", New York, Springer(1972)
[8] FARIN, G. "NURBS curves and surfaces : from projective geometry to practical use," First Edition, A K Peters, Ltd.(1995), pp50-125

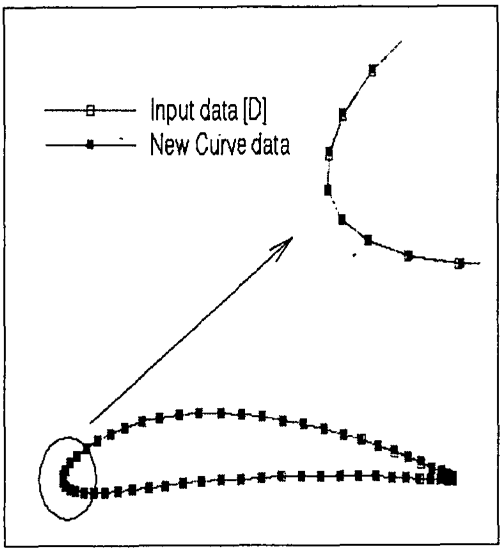

Fig. 1 New Curve data

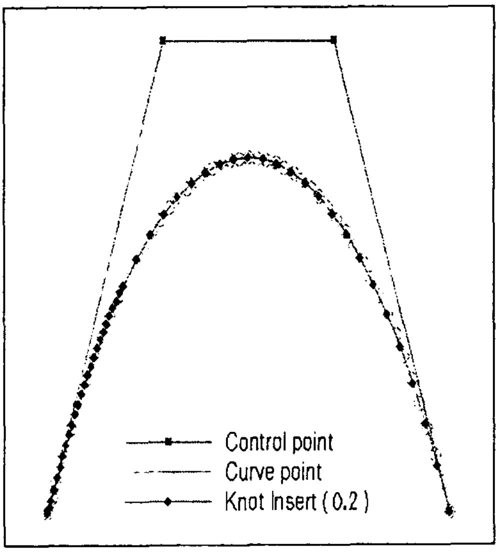

Fig. 2 Effect of Knot Insert

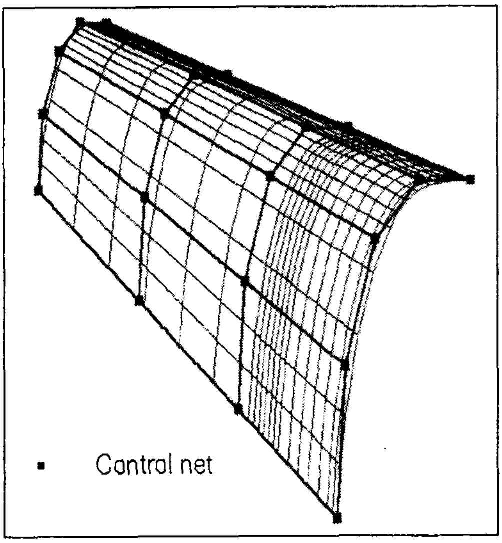

Fig. 3 Spanwise Grid Distributions

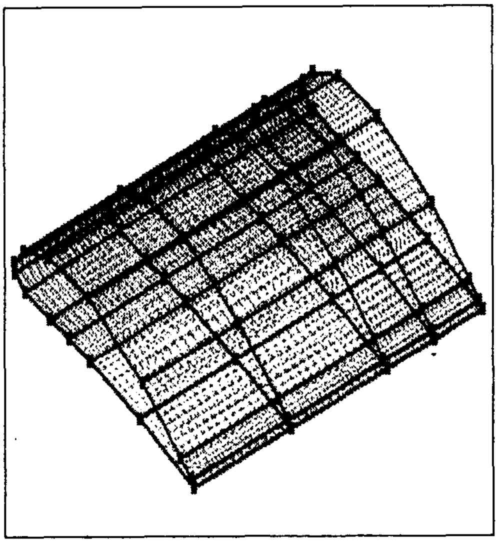

Fig. 4 Chordwise Grid Distributions