

음선 추적에 의한 연결된 곡보 구조의 고주파수 진동해석

정철호*, 이정권*

*한국과학기술원 기계공학과 소음 및 진동제어 연구센터

High Frequency Vibration Analysis of Connected Curved Beam Structures Using the Ray Tracing Method

Cheol-Ho Jeong*, Jeong-Guon Ih*

*NoViC, Dept. of Mechanical Eng., KAIST, Science Town, Taejon 305-701, Korea

1. 서론

동적 구조의 저주파수에서의 진동 해석에는 유한 요소 해석법 (FEM)이나 경계 요소 해석법 (BEM)을 많이 사용하지만 고주파수에서는 격자의 크기가 작아지거나 보간함수의 차수가 커져야 하므로 정확한 해석을 위해서는 많은 계산량이 필요하게 된다. 현재 고주파수 해석에 가장 많이 사용되고 있는 통계적 에너지 해석법 (SEA; Statistical Energy Analysis)은 많은 가정에 근거 하고 있고 해석 결과는 시간 및 공간 평균된 에너지로 상세한 정보를 알아낼 수 없는 단점이 있다. [1]

SEA의 단점들을 보완하고자 제안된 파워흐름해석법 (PFA; Power Flow Analysis)은 구조의 에너지 평형방정식이 열전도 방정식과 비슷한 2차 미분 방정식이라는 유사성을 이용한 방법이다. [2] 이 해석법은 평면파만 전달된다고 가정하고, 잔향장의 가정을 사용하고 있다. PFA의 장점은 기존 FE 격자를 이용할 수 있다는 점과 결과의 시각적인 후처리가 용이하다는 점이다. 그러나, 잔향장의 조건을 만족해야 하므로 SEA의 결과보다 크게 개선되지 않고 2차원 진동장의 경우에는 신뢰성이 떨어진다. [3]

SEA를 보완하기 위하여 Langley [4]에 의해 파동 인텐시티 기법 (WIA; Wave Intensity Analysis)이 제안되었다. 이 방법은 SEA의 확산장의 가정을 완화한 것이다. 즉, 구조물에서 파동의 방향성을 고려하는 것이다. 일반적으로 구조의 연성 경계에서는 확산장의 가정이 성립되지 않기 때문에, 진동파의 구조적 여파(wave filtering) 현상을 고려하여야 한다.

음선 추적 기법 (RTM; Ray Tracing Method)은 기하음향분야나 실내음향 분야에서 적용되던 방법으로 주로 음향충격응답을 구하거나 음장 분포 해석을 위하여 사용되었다. [5] Hugin [6]은 연성된 보에서 굽힘파와 굽힘 근접장파를 함께 고려한 파동함 기법을 이용하여 해석하였다. Gunda 등 [7]은 RTM의 한 방법인 가상음원법 (method of images)을 이용하여 단일 사각 평판의 응답을 예측하였다. Chae와 Ih [8]은 RTM을 이용하여 단일 평판과 연성된 평판의 구조를 해석하였으며, 실험을 통하여 검증하였다. Jeong과 Ih는 단일 곡보에 대하여 RTM을 적용하였다. [9]

음선 추적 기법은 진동 에너지의 공간적인 분포를 알 수 있고 경계에서의 구조적 여파 현상을 고려할 수 있는 등, 다른 방법들의 장점을 지니고 있는 방법으로 해석 방법이

기존의 방법에 비해 복잡하고 적용하기 어려운 단점이 있으나 이의 적용에 대한 관심이 증대되고 있다.

본 연구에서는 RTM을 이용하여 연결된 곡보 구조에 대한 해석을 수행함으로써 RTM의 적용 범위를 확장하고자 한다. 단일 곡보는 Euler-Bernoulli 보 이론에 근거하고, 고려되는 파동은 종파와 굽힘파로 한정하기로 한다. RTM의 결과와 전달파 기법 (TWM)의 결과를 비교하여 검증한다.

2. 곡보에 관한 연구

본 연구에서는 Euler-Bernoulli 보 이론에 바탕을 둔 곡보의 운동방정식 사용한다. 즉, 회전 관성과 전단변형을 무시한 곡보의 운동방정식은 다음과 같다:

$$\frac{EI}{R} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{u}{R} - \frac{dw}{ds} \right) + ES \frac{d}{ds} \left(\frac{du}{ds} + \frac{w}{R} \right) = -\rho S \omega^2 u \quad (1a,b)$$

$$EI \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{u}{R} - \frac{dw}{ds} \right) - ES \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \frac{du}{ds} + \frac{w}{R^2} \right) = -\rho S \omega^2 w.$$

여기서 s 는 원주 방향의 좌표이고 R 은 곡률반경, 그리고 변위 u 와 v 는 각각 원주 방향과 반경 방향 변위를 나타낸다. 원주 방향의 변형률 ϵ 과 단면의 회전 φ 은 다음과 같다:

$$\epsilon = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R}; \quad \varphi = \frac{u}{R} - \frac{dw}{ds} \quad (2a,b)$$

위의 변형률과 단면의 회전을 이용하여 나타낸 수직 합력 N 과 전단 합력 Q , 그리고 모멘트 합력 M 은 다음과 같다:

$$N = ES \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} \right); \quad Q = EI \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \right); \quad (3a,b,c)$$

$$M = EI \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right).$$

위의 지배 방정식에서 조화 가정을 가정하면 식(1)의 특성식은 다음과 같다:

$$\begin{bmatrix} \rho S \omega^2 - EI \frac{k^2}{R^2} - ES k^2 & -i(EI \frac{k^3}{R} + ES \frac{k}{R}) \\ i(EI \frac{k^3}{R} + ES \frac{k}{R}) & \rho S \omega^2 - EI k^4 - ES \frac{1}{R^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$c_1^* = \sqrt{EI/\rho}$, $\kappa = \sqrt{I/S}$, 무차원 파수 $K = k\kappa$, 무차원 각주파수 $\Omega = \omega\kappa/c_1^*$, 무차원 곡률반경 $r_0 = \kappa/R$ 로 정의하면, 특성식은 다음과 같이 나타낸다:

$$K^6 - (\Omega^2 + 2r_0^2)K^4 - (\Omega^2 + \Omega^2 r_0^2 - r_0^4)K^2 + (\Omega^4 - \Omega^2 r_0^2) = 0 \quad (5)$$

파수에 관한 6차 특성식의 해는 복소수의 쌍으로 나타나고, 특성식에서 구해진 K 에 대한 두 개의 해는 종파를, 4개의 해는 굽힘파를 나타낸다.

특성식에서 구한 6개의 파수를 이용하여 보에서의 변위를 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$u(s) = \sum_{i=1}^3 \left[u_i^+ e^{-j(k_i s - \omega t)} + u_i^- e^{j(k_i s - \omega t)} \right]; \quad (6a,b)$$

$$w(s) = \sum_{i=1}^3 \left[w_i^+ e^{-j(k_i s - \omega t)} + w_i^- e^{j(k_i s - \omega t)} \right].$$

여기서 위첨자 +와 -는 양의 방향과 음의 방향으로 전파하는 성분을 나타낸다. 위의 해에서 계수들은 경계 조건을 이용하여 결정된다.

곡보에서의 시간 평균된 원주 방향의 에너지 밀도와 반경 방향의 에너지 밀도와 파워 흐름은 다음과 같이 정의된다:

$$e_i(s) = \frac{\rho S \omega^2}{4} u u^* + \frac{E_0 S}{4} \left(\frac{w}{R} + \frac{dw}{ds} \right) \left(\frac{w}{R} + \frac{dw}{ds} \right)^* \quad (7a,b)$$

$$e_r(s) = \frac{\rho S \omega^2}{4} w w^* + \frac{E_0 I}{4} \frac{d}{ds} \left(\frac{u}{R} - \frac{dw}{ds} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{u}{R} - \frac{dw}{ds} \right)^*.$$

$$I_l = \text{Real} \left(\frac{i\omega}{2} \left\{ N + \frac{M}{R} \right\} u^* \right); \quad (8a,b)$$

$$I_r = \text{Real} \left(\frac{i\omega}{2} \left\{ Qw^* - M \frac{dw^*}{ds} \right\} \right).$$

3. 음선 추적 기법

기하음향학은 파동음향학으로는 효과적으로 고려할 수 없는 고주파 영역에 대해 광학의 원리를 도입하여 쉽게 해석하기 위한 분야이다. 고주파수로 갈수록 음향모드가 기하음향학적으로 증가하고 음파의 파동성이 지배적이지 못하므로 빛과 같이 기하학적 고찰에 의해서도 음장을 해석할 수 있다. 구조음향학에서도 마찬가지로 고주파수에서 진동모드가 증가하게 되고 가진에 의해서 생성된 파동을 기하학적 모델인 음선(ray)으로 대체하게 된다. RTM이란 가진원으로 부터 모든 방향으로 퍼져나가는 음선을 따라가면서 구조물의 진동을 대략적으로 예측하는 방법이다. 가진에 의해 생성된 음선은 초기 에너지를 가지고 파면에 수직인 방향으로 전파되고, 구조물의 감쇠로 인하여 전파되면서 에너지가 감소한다. 그리고 경계나 불연속을 만나게 되면 음선의 진행방향과 에너지가 달라진다. 최종적으로 우리가 알고자 하는 응답점의 에너지는 응답점을 지난 음선의 에너지를 모두 더한 값으로 나타난다. 기하음향학에서는 소리의 파동성을 고려할 수 없으므로 두가지 기본가정을 전제로 한다.

- (1) 파동의 파장이 구조물의 크기에 비하여 매우 작다.
- (2) 회절, 간섭, 등의 파동성의 영향은 무시한다.

경계나 불연속에서의 음선의 방향과 음선이 가진 에너지의 크기를 구하는 과정에서 경계는 평평하고 균일하다고 가정하여 정반사만을 고려한다.

3.1) 음선의 전파

음선은 공간상으로 전파되는 파동이므로 음선이

구조물을 전파하는 특성을 알아야 한다. 본 연구의 대상이 1차원 곡보 구조이므로 평면파 전파특성을 사용하고 곡보에서의 종파와 굽힘파를 고려하였다. 관심변수가 변위일 때 음선의 전파특성은 다음과 같이 대각 행렬로 나타낸다:

$$[T]_s = \begin{bmatrix} e^{-jk_s s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-jk_r s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-jk_n s} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

여기서 하첨자 s는 가진점과 응답점의 거리이다

주파수가 높아질수록 구조의 모드 수(mode count)가 증가하므로 위상은 중요성을 잃게 된다. 그러므로 주로 주파수 밴드 해석을 수행하게 되고, 변위도 변위나 속도가 아닌 시간 및 주파수 평균된 진동 에너지나 인텐시티 같은 에너지 변수들이 된다. 에너지 변수의 기본이 되는 변위의 이차 응답은 다음과 같이 나타낸다:

$$|d(\bar{x}_o, \bar{x}_i; \omega)|^2 = |d_{dir}(\bar{x}_o, \bar{x}_i; \omega)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |d_{refl}(\bar{x}_o, \bar{x}_i; \omega)_n|^2 + 2\text{Re} \left\{ d_{dir}(\bar{x}_o, \bar{x}_i; \omega) \sum_{n=1}^{\infty} d_{refl}^*(\bar{x}_o, \bar{x}_i; \omega)_n \right\} + 2\text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} d_{refl}(\bar{x}_o, \bar{x}_i; \omega)_n d_{refl}^*(\bar{x}_o, \bar{x}_i; \omega)_m \right\}.$$

여기서, 하첨자 dir과 refl은 각각 직접장과 간접장을 나타낸다. 여기서 에너지 변수의 중첩이론 [10]를 적용하여 세번째 항과 네번째 항은 무시하면 다음과 같다:

$$|d(\bar{x}_o, \bar{x}_i; \omega)|^2 \cong |d_{dir}(\bar{x}_o, \bar{x}_i; \omega)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |d_{refl}(\bar{x}_o, \bar{x}_i; \omega)_n|^2. \quad (11)$$

굽힘 근접장파를 무시한 에너지 변수의 전파 특성은 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$[T_c]_s = \begin{bmatrix} e^{-2\text{Im}(k)s} & 0 \\ 0 & e^{-2\text{Im}(k)s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha s} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha s} \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서, $\alpha = 2\text{Im}(k) = \eta\omega/c_s$ 로 정의되는 감쇠상수(decay constant)로서 에너지의 전파특성을 나타내는 중요한 인자이다.

3.2) 연결 경계에서의 거동

연결경계에서는 경계조건을 이용한 국부적인 파워 평형식을 이용하여 반사되거나 투과되는 에너지의 크기를 결정할 수 있다. 경계에서의 반사 및 투과계수는 구조를 반무한구조로 가정한 반사 및 투과계수를 의미하며, 파워 반사 및 투과 계수는 파동 반사 및 투과계수를 제외한 값이다. RTM에서는 구해진 투과계수를 반복적으로 사용하지만 TWM에서는 직접 경계조건을 사용하여 해를 구하게 된다.

3.3) RTM의 신뢰성 평가

고주파수 방법의 신뢰성은 일반적으로 모드 수, 모드 중첩 인자, 혹은 특성 길어와 파장을 이용한 무차원 변수 l/λ 를 이용하여 나타낸다. Fahy [11]에 의하면, SEA의 신뢰 구간은 1/3-옥타브 해석의 경우에 모드수 5 이상, 모드 중첩 인자 1 이상의 영역이다.

$M = \eta \cdot f \cdot n(f)$ 로 정의된 모드 중첩 인자는 에너지 방법의 신뢰 구간을 나타내는 변수가 된다. 그러므로 M 을 이용하여 RTM의 신뢰구간과 위의 SEA의 신뢰구간을 비교하여 보았다.

4. 수치해석

고려된 곡보 구조는 곡보와 직보가 연결된 구조인데, 그 해석 모델은 Figure 1 과 같다. 모델의 재료는 강철이며 양쪽 경계조건은 자유단-자유단이고, 연결부에서는 변위와 합력이 모두 연속이어야 한다. Figure 2 는 각 주파수 대역에서 굽힘파 입사에 대한 파워 반사 및 투과 계수를 보여 주고 있다. 여기서 주파수가 높아질수록 투과되는 에너지가 커지고 상대적으로 반사되는 에너지는 작아지는 것을 알 수 있다. Figure 3 은 곡보의 한 지점에서 가진되는 주파수를 변화시킬 때의 에너지 밀도와 인텐시티를 나타낸다. 이와 같이 RTM은 기존의 방법들이 해석하지 못하는 단일 주파수 해석도 가능하고, 그 결과도 TWM 과 일치하는 경향을 보이고 있다. 특히 저주파수 영역에서도 TWM의 결과와 잘 일치하는 경향을 보이고 있다. Figure 4는 손실인자 $\eta=0.05$, 8 kHz 옥타브 밴드, 각 보의 길이가 1 m인 경우이다. 여기서 중방향의 에너지 밀도는 다른 결과에 비해서 오차가 크게 나타나고 있다. 이는 종파의 모드 수가 굽힘파의 모드 수에 비해서 훨씬 작기 때문에 같은 주파수 대역에서도 종파와 굽힘파의 해석 결과의 정확성이 달라지는 것을 의미한다. 단면적이 다른 보가 연결된 경우의 결과는 Figure 5 와 같다. 단면적이 변하는 경우에도 경계조건을 이용하여 계산된 파워 반사 및 투과 계수를 이용하면 RTM의 결과가 TWM의 결과와 비슷한 경향을 보임을 확인하였다.

본 연구에서는 진동에너지의 공간적인 분포를 나타낼 때의 오차를 $\epsilon = \frac{1}{n} \sum_n \left(\frac{y_{RTM} - y_{TWM}}{y_{RTM}} \right)_n$ 로 정의하였다. 위와

같은 오차의 정의는 극부적으로 변동하는 TWM의 결과와 순조롭게 변하는 RTM의 결과를 비교하여 변동하는 에너지의 영향들은 상쇄시키고 평균값을 얼마나 잘 따라가는가를 나타낼 수 있다. 손실인자, 주파수 대역, 그리고 보의 길이들을 변화시키면서 계산된 오차들 모드 중첩 인자의 함수로 정의하였을 때의 회귀 분석 결과는 Figure 6 과 같다.

Figure 6의 결과를 이용하면 약 10%의 오차를 나타내는 모드 중첩 인자는 약 0.1 정도로 Fahy [11]의 연구와 비교하여 작은 모드 중첩 인자를 가지는 영역에서도 RTM을 적용할 수 있음을 확인할 수 있다. 이러한 결과는 RTM의 중주파수 영역으로의 확장 적용을 의미한다.

5. 결론

본 연구에서는 음선 추적 기법을 이용하여 연결된 곡보 구조의 고주파수 진동 해석을 수행하였다. 음선 추적 기법 결과의 오차는 모드 중첩 인자를 이용하여 나타낼 수 있고, 모드 중첩 인자가 증가할수록 음선 추적의 결과는 더 정확해진다. 보의 길이, 주파수 영역, 그리고 감쇠 인자를 변화시킨 결과의 오차를 회귀분석 한 결과, 모드 중첩 인자 0.1 이상이면 10%이내의 오차로 해석할 수 있다. 이는 기존의 고주파수 에너지 방법에 비해서 확장된 산뢰구간으로 중주파수 영역으로의 확장 가능성을 의미한다. 단면적이 변하는 연결의 경우에도 음선 추적 기법을 이용하여 진동 에너지의 반사와 투과 현상을 나타낼 수 있다.

감사의 글

본 연구는 BK21 과 NRL 과제에서 일부 재정 지원을 받았습니니다.

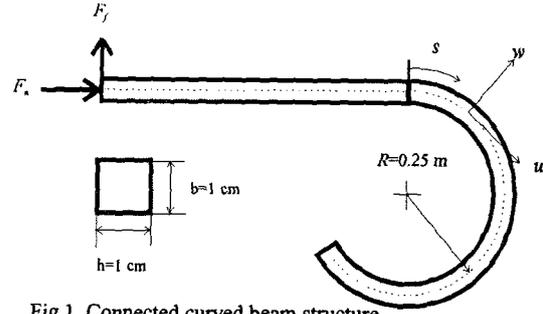


Fig 1. Connected curved beam structure

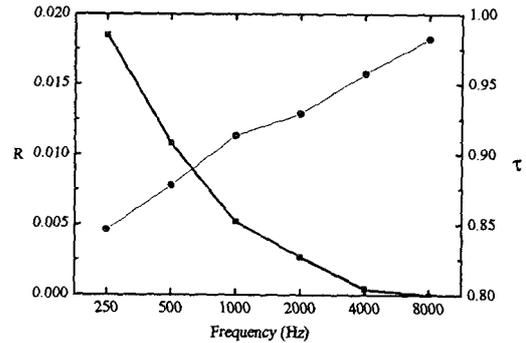


Fig 2. Power reflection and transmission coefficient of incident flexural wave impinging at the junction where the straight beam and curved beam ($R=0.25$ m) are connected. —■—, Power reflection coefficient; —●—, power transmission coefficient.

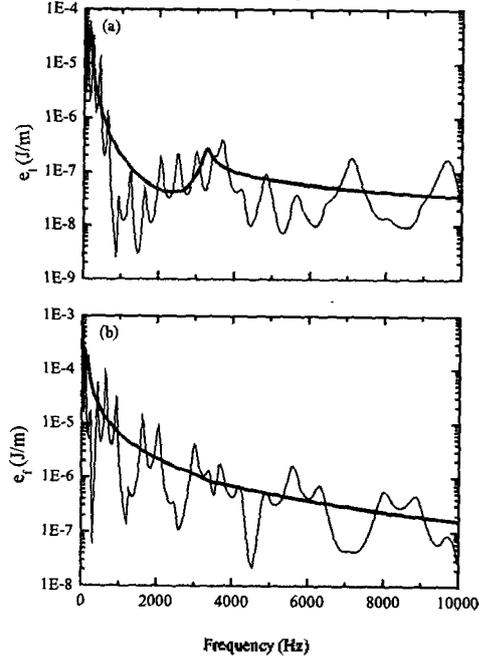


Fig 3. Frequency response of energy density at $x = -0.7$ (i.e., on the curved beam part) with $\eta=0.05$: (a) longitudinal energy density; (b) flexural energy density. — — —, Ray tracing method; — — —, traveling wave method.

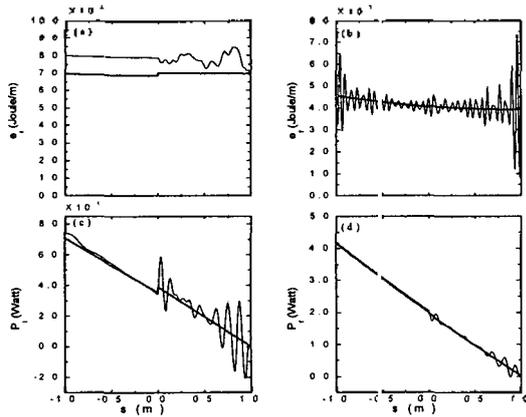


Fig. 4. A comparison between RTM and TWM in the analysis of the spatial distribution at 8 kHz octave band with $\eta=0.05$ ($l_s=1$ m, $l_c=1$ m): (a) longitudinal energy density; (b) flexural energy density; (c) longitudinal power flow; (d) flexural power flow. **—**, RTM; **—**, TWM.

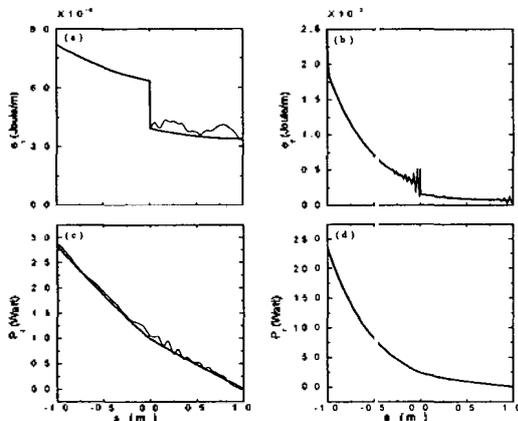


Fig. 5. A comparison between RTM and TWM in the analysis of the spatial distribution at 8 kHz octave band with $\eta=0.05$ (for $S_p=2.5 \times 10^{-5}$ m², $S_c=10^{-4}$ m²): (a) longitudinal energy density; (b) flexural energy density; (c) longitudinal power flow; (d) flexural power flow. **—**, RTM; **—**, TWM.

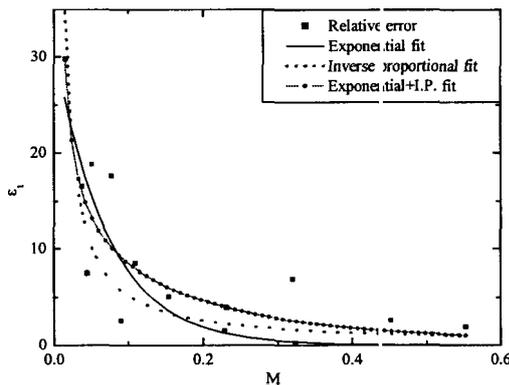


Fig. 6. Regression of relative errors as a function of modal overlap factor, M .

참고 문헌

- [1] Lyon, R. H., and Dejong, R., 1995, *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*, Butterworth-Heinemann
- [2] Nefske, D. J., and Sung, S. H., "Power flow finite element analysis of dynamic systems: basic theory and application to beams," *Transactions of ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* **111**, 94-100 (1989).
- [3] Langley, R. S., "On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components," *Journal of Sound Vibration* **182**, 637-657 (1995).
- [4] Langley, R. S., "A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations," *Journal of Sound Vibration* **159**, 483-502 (1992).
- [5] 신호철, 이정권, "위상이 고려된 기하음향모델에 의한 내부음장 해석," *한국음향학회지* **17**, 54-61 (1998).
- [6] Hugin, C. T., "A physical description of the response of coupled beams," *Journal of Sound Vibration* **203**, 563-580 (1997).
- [7] Gunda, R., Vijayakar, S. M., and Singh, R., "Method of images for the harmonic response of beams and rectangular plates," *Journal of Sound Vibration* **185**, 791-808 (1995).
- [8] Chae, K.-S. and Ih, J.-G., "Prediction of vibrational energy distribution in the thin plate at high-frequency bands by using the ray tracing method," *Journal of Sound and Vibration* **240**, 263-292 (2001).
- [9] 정철호, 이정권, "레이 추적 기법을 이용한 단일 곡보의 고주파수 진동해석," 2001 한국 소음진동공학회 추계학회 논문집 **1**, 90-95 (2001).
- [10] Le Bot, A., Ichchou, M. N., and Jezequel, L., "Energy flow analysis for curved beams," *Journal of the Acoustical Society of America* **102**, 943-954 (1997).
- [11] F. J. Fahy, A. D. Mohammed, "A study of uncertainty in applications to coupled beam and plate systems, part I: computational experiments," *Journal of Sound and Vibration* **158**, 45-67 (1992).