

역 경계요소법에 기초한 간략화 된 홀로그래피 재구성

전인열*, 이정권*, 김봉기**

*한국과학기술원 기계공학과 소음 및 진동제어 연구센터

**한국기계연구원 음향연구실

A Simplified Holographic Reconstruction Using the Inverse BEM

In-Youl Jeon*, Jeong-Guon Ih*, Bong-Ki Kim**

*NoViC, Dept. of Mechanical Eng., KAIST, Science Town, Taejon 305-701, Korea

**Acoustics Research Group, KIMM, PO Box 101, Yusung, Taejon 305-600, Korea

e-mail: nosori@mail.kaist.ac.kr, ihih@sorak.kaist.ac.kr, bkkim@kimm.re.kr

1. 서론

각종 기계류, 전자제품 등의 진동 소음원으로부터 음장으로 전파하는 소음의 저감을 위해서 소음원 규명 작업이 선행 되어야 한다. 현재 근접장 음향 홀로그래피(nearfield acoustical holography; NAH)와 같은 다수의 마이크로폰을 이용한 간접적인 음원 규명 방법이 개발되었다. 이 방법은 평면, 원통, 구형 좌표계 등 분리 가능한 좌표계(separable coordinate)에서 공간 푸리에 변환(spatial Fourier transform)에 기초한 방법[1-2]과 임의의 좌표계에서 역 경계요소법(boundary element method; BEM)에 기초한 방법[3-4] 등으로 나눌 수 있다. 전자는 홀로그래피 측정면과 재구성 음원 또는 음장에 대한 전달 방정식을 공간 푸리에 변환을 통하여 구하는 방법이며, 후자는 음원과 측정점 사이의 전달 함수를 경계요소법을 이용하여 계산하는 방법으로써 좌표계에 제한을 받지 않고 실외와 실내 음장에 대해서 모두 적용이 가능하며, 복잡한 형상의 소음원에 대해서도 적용할 수가 있다. 그러나 경계요소법에 기초한 방법은 공간 푸리에 변환 방법에 비해서 음원의 모델링 작업이 추가적으로 필요하다는 단점이 있다.

경계요소법에 기초한 방법은 특히 복잡한 형상의 구조물로부터 공기기인과 구조기인 소음이 동시에 전파 할 경우 음원 모델링 및 측정 오차는 재구성 정확도에 크게 영향을 미치게 된다. 이러한 재구성 오차를 줄이기 위한 방법으로 거리가 증가함에 따라 지수적으로 감소하는 특성을 갖는 고주파 모드의 증폭을 억제하는 정규화 기법(regularization method)[5-6], 유효독립기법(effective independence; Efi)[5,7]을 이용한 센서의 위치 선정 방법, 특이성이 제거된 경계요소법에 기초한 홀로그래피[7] 등이

제안되었고 주로 전달 함수의 특성 개선 및 음장 측정점의 최적 위치 선정 등에 대해서 이루어 졌다.

본 연구에서는 복잡한 형상의 음원 모델을 간략화 된 경계요소로 모델링 하는 방법을 사용하여 음향 홀로그래피를 적용하도록 한다. 또한 간략화 방법을 검증하기 위하여 2차원 사각형 모델에 대해서 수치 해석을 하도록 한다.

2. 경계요소법에 기초한 음향 홀로그래피

파동 방정식의 적분 형태인 Kirchhoff-Helmholtz 적분 방정식을 이용하여 이산화 및 수치적분을 수행하면 경계면과 음장 내의 음향학적 정보들은 다음과 같은 벡터/행렬식으로 표현할 수 있다[5]:

$$\mathbf{p}_f = (\mathbf{D}_f + \mathbf{M}_f \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{D}_s) \mathbf{p}_s \equiv \mathbf{G}_p \mathbf{p}_s \quad (1)$$

여기서, \mathbf{p}_s 와 \mathbf{v}_s 는 각각 경계면의 음압과 속도 벡터이고, \mathbf{p}_f 는 음장 음압 벡터이다. 또한 \mathbf{D}_s 와 \mathbf{M}_s 는 각각 경계면에 대한 쌍극 음원 행렬 및 단극 음원 행렬을 나타내며, 이와 유사하게 \mathbf{D}_f 와 \mathbf{M}_f 는 각각 음장점에 대한 쌍극 음원 행렬 및 단극 음원 행렬을 의미한다.

위 식을 최소 자승해(least squared solution)와 특이치 분리 기법(singular value decomposition; SVD)을 통해 다음과 같이 음장 정보로부터 경계면 정보를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}_s &= (\mathbf{G}_p^H \mathbf{G}_p)^{-1} \mathbf{G}_p^H \tilde{\mathbf{p}}_f \\ &= \mathbf{W} \text{diag}(\Lambda_1^{-1}, \Lambda_2^{-1}, \dots) \mathbf{U}^H \tilde{\mathbf{p}}_f \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, 위 첨자 H 는 행렬의 Hermitian 연산자, $\hat{\mathbf{p}}_s$ 와 $\tilde{\mathbf{p}}_f$ 는 각각 예측된 경계 음압과 측정 음압 벡터, \mathbf{U} 와 \mathbf{W} 는 좌, 우측 특이치 행렬, 그리고 Λ_i 는 특이치를 의미한다. 또한

식(2)는 측정 음압과 전달함수의 역행수를 이용하여 경계면에서의 음압을 예측 가능하다는 것을 의미한다. 또한 음장 음압 정보가 m 개, 경계 정보가 n 개이면 $m > n$ 의 조건을 만족해야 최소자승해에 의한 해를 구할 수가 있다. 예측된 음압 \hat{p}_s 와 식(1)을 다시 이용하면 음장 내의 정보를 계산 할 수가 있게 된다.

만약 평균이 0 이고 분산(variance)이 σ^2 인 Gaussian 분포를 갖는 잡음이 측정 음압에 포함되어 있다고 가정 하면, 참값과 예측된 값 사이에 발생하는 오차는 다음과 같이 예측할 수가 있다:

$$E[(\hat{p}_s - p_s)^H (\hat{p}_s - p_s)] = \sigma^2 S_F. \quad (3)$$

여기서, S_F 는 전달행렬의 특이한 정도를 나타내는 특이성 인자(singularity factor)이다.

3. 간략화 된 경계 요소 모델

경계요소법에 기초한 음향 홀로그래피를 통해 음원을 재구성 할 경우에는 소음원의 외부 형상을 경계요소로 모델링 하는 작업이 필요하다. 이때 그림 1(a)처럼 오목한 곡면을 가지고 외부에서 보이지 않는 숨겨진 음원에 의해서 외부로 전파할 경우, 실제 모델링 작업은 쉽지 않으며, 실제 모델링이 가능하더라도 음압 측정이 불가능 할 수도 있다. 따라서, 그림 1(b)처럼 실제 모델을 감싸는 비슷한 모양으로 간략하게 모델링 할 수 있으며, 간략화로 인하여 실제 형상을 모델링 했을 경우 보다 더 적은 수의 절점으로 모델링 할 수가 있다. 만약 음장에서 측정 음압을 \hat{p}_f 라고 하면, 실제 경계면 S_A 와 간략화 된 경계면 S_S 에 대해서 각각 음향 홀로그래피를 적용하면 다음과 같다:

$$\hat{p}_{s_A} = W_A \Lambda_A^{-1} U_A^H \hat{p}_f, \quad (4)$$

$$\hat{p}_{s_S} = W_S \Lambda_S^{-1} U_S^H \hat{p}_f. \quad (5)$$

여기서, 아래첨자 A 와 S 는 각각 측정점과 실제 모델 그리고 측정점과 간략화 된 모델 사이의 특이치 행렬들을 의미하며, \hat{p}_{s_A} 와 \hat{p}_{s_S} 는 각각 실제 경계와 간략한 경계에서 예측된 음압이다. 경계면의 간략화로 인하여 같은 수의 음압 측정점에 대해서 S_S 의 절점수가 S_A 의 절점 수 보다 적기 때문에 간략화 된 경계면에 대한 전달 함수가 실제 모델의 전달 함수보다 특성이 우수하다.

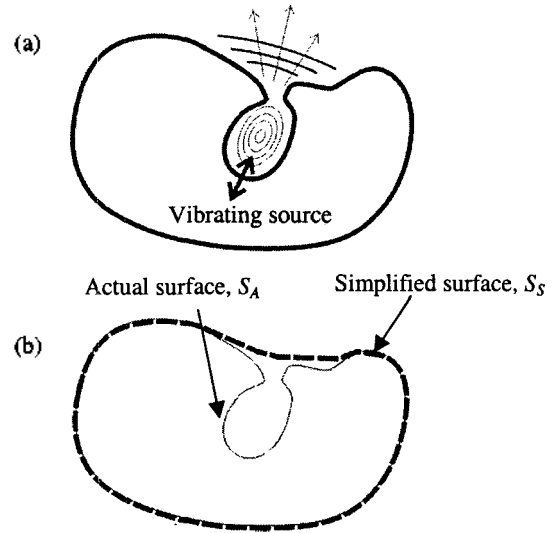


그림 1. 간략화 모델링의 개념도.
(a) 복잡한 형상의 실제 모델, (b) 간략화 된 경계 요소 모델.

4. 수치해석

실제 경계면의 간략화에 대한 효과를 검증하기 위하여 외부와 연결된 내부 공간을 갖는 모델을 통하여 수치 해석을 수행하였다. 2 차원 외부 음장 문제에서 간단한 형태로 사각형 모델을 사용할 수가 있는데 가운데 부분이 오목하게 들어간 2 차원 모델의 형상은 그림 2 와 같다.

실제 경계면 S_A 는 84 개의 절점과 요소로 이루어져 있고 특성 길이(characteristic length, L_c)는 250 mm 이다. 또한 간단한 경계면 S_1 은 실제 경계면 S_A 를 둘러싸는 사각형 모델로써 절점과 요소를 64 개로 모델링 하였다. 이와 유사하게 간단한 경계면 S_2 는 경계면 S_1 로부터 $0.25L_c$ 만큼 떨어진 곳에 위치하며 절점과 요소의 수가 68 개이다. 음장 음압 측정점은 경계면 S_1 으로부터 L_c 만큼 떨어진 곳에 160 개를 등간격으로 배열하였다.

전달 행렬의 특성을 파악하기 위해서 특이성 인자를 비교하였다. 그림 3 은 실제 모델과 간략화 된 모델의 계산된 전달 행렬의 특이성 인자를 보여주고 있다. 실제 모델을 사용하였을 경우 전 주파수 영역에서 큰 값을 보이는 것을 알 수 있었다. 이에 비해서 간략화 된 모델은 상대적으로 아주 낮은 값을 보이고 있다. 따라서 재구성에서 발생하는 오차가 현저하게 줄어들 것으로 예상할 수 있다.

해석 대상 주파수는 오목한 부분의 내부 공명 주파수에 해당하는 50Hz 로 가정하여, 경계 조건은 그림 2 의 가운데 부분 5 개 절점에서 속도가 다른 절정보다 10 배 크다고 가정한다. 이 경계조건을 사용하여 160 개의 음장점에서의

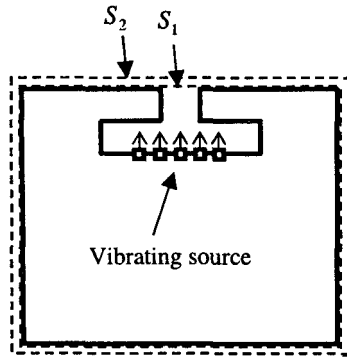


그림 2. 간략화된 경계요소 모델의 수치 해석 예제

음압을 경계요소법을 통하여 구한 값을 참 값이라고 가정한다. 만약 S/N 비(signal-to-noise ratio)가 100 으로 일정하다고 하면, 재구성 결과는 그림 4 와 같다. 여기서 간략화된 경계면 S_1 과 S_2 에 대해서 재구성된 음압은 실제 경계면 S_A 의 경우 보다 참 값에 근접하고 있고 오차가 작다는 것을 알 수가 있었다. 그리고 S_2 모델이 S_1 모델에 비해서 더 오차가 작은데, 이는 측정점과의 거리가 더 가깝고 전달행렬의 특성이 우수하기 때문에 오차가 작다는 것을 알 수 있다.

또한 S/N 비의 변화에 따른 재구성 오차는 그림 5 에 나타나 있으며, 실제 값과 예측 값 사이의 차이를 나타내는 재구성 오차는 다음과 같이 정의할 수 있다:

$$\epsilon = \frac{\sum \|p_s - \hat{p}_s\|^2}{\sum \|p_s\|^2} \quad (6)$$

여기서 S/N 비가 크다는 것은 잡음이 상대적으로 음압에 비해서 작다는 것을 의미하며, S/N 비가 클수록 재구성 오차가 작다는 것을 확인 할 수 있다. 그리고 정규화 과정을 적용하지 않고 전달 행렬의 특성 자체를 간단한 모델링만으로 향상시켜서 재구성 오차를 크게 감소 시킬 수 있다는 것을 알 수 있다. 음장에서 재구성 오차 계산을 위하여 음압 측정면 외부의 점 504 개의 점을 선정하였으며, 간략화된 경계면을 사용하였을 경우 재구성 오차가 1% 미만인 것을 알 수가 있다. 따라서 오차의 대부분은 경계면의 재구성 시에 발생을 하게 되며 원거리(farfield) 음장의 재구성 오차에는 영향을 적게 미치는 것을 알 수가 있다.

5. 결론

본 연구에서는 간략화된 경계 요소 모델을 이용하여 음향 홀로그래피 재구성 방법을 제안하였으며 2 차원 간단한 모델에 대해서 수치해석을 통하여 검증하였다. 실제 복잡한 모델을 간단한 모델로 간략화 함으로써

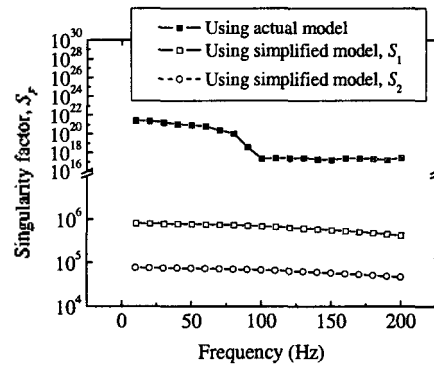


그림 3. 전달 행렬의 특이성 인자 비교

모델링에 소요되는 시간 및 계산 시간을 감소시킬 수가 있으며, 또한 전달 함수의 사이즈를 줄일 수가 있었다. 결과적으로 간략화된 모델링으로 전달 함수의 특이성이 크게 개선 되었으며 재구성 오차가 크게 감소시킬 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 BK21 과 NRL 과제에서 일부 재정 지원을 받았습니니다.

참고 문헌

- [1] J. D. Maynard, E. G. Williams, and Y. Lee, "Nearfield acoustic holography; I. Theory of generalized holography and the development of NAH," *J. Acoust. Soc. Am.* **78**(4), 1395-1413 (1985).
- [2] W. A. Veronesi and J. D. Maynard, "Nearfield acoustic holography; II. Holographic reconstruction algorithms and computer implementation," *J. Acoust. Soc. Am.* **81**(5), 1307-1322 (1987).
- [3] W. A. Veronesi and J. D. Maynard, "Digital holographic reconstruction of source with arbitrarily shaped surfaces," *J. Acoust. Soc. Am.* **85**(2), 588-598 (1989).
- [4] K. Gardner and R. J. Bernhard, "A noise source identification technique using an inverse Helmholtz integral equation method," *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.* **110**, 84-90 (1988).
- [5] B.-K. Kim and J.-G. Ih, "On the reconstruction of the vibro-acoustic field over the surface enclosing an interior space using the boundary element method," *J. Acoust. Soc. Am.* **100**(5), 3003-3016 (1996).
- [6] B.-K. Kim and J.-G. Ih, "Design of an optimal wave-vector filter for enhancing the resolution of reconstructed source field by near-field acoustical holography (NAH)," *J. Acoust. Soc. Am.* **107**(6), 3289-3297 (2000).
- [7] S.-C. Kang and J.-G. Ih, "Use of nonsingular boundary integral formulation for reducing errors due to near-field measurements in the boundary element method based near-field acoustic holography," *J. Acoust. Soc. Am.* **109**(4), 1320-1328 (2001).

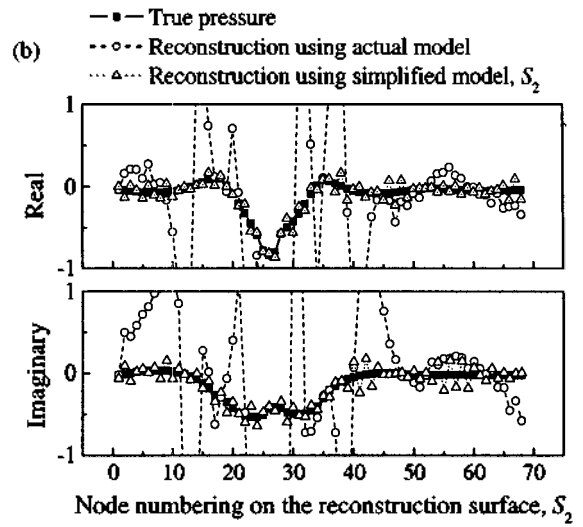
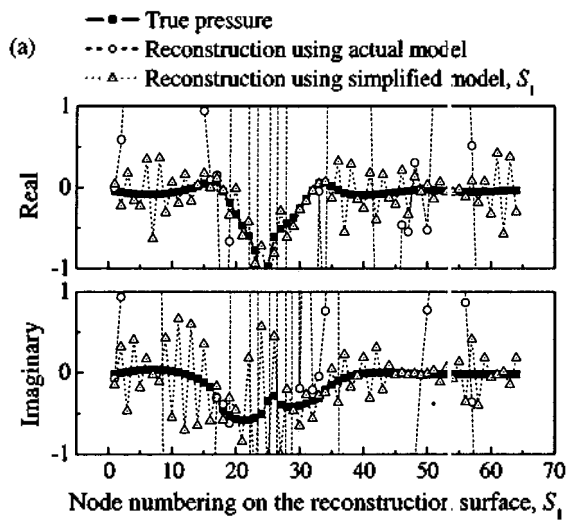


그림 4. 경계면의 음압 재구성 결과 비교. (a) 간략화된 경계면 S_1 , (b) 간략화된 경계면 S_2 .

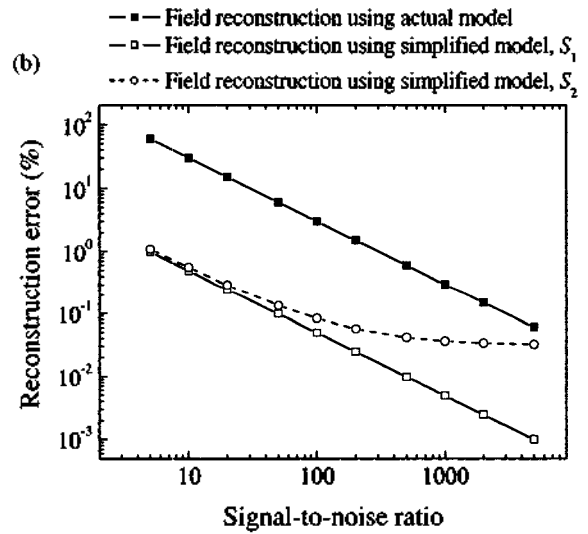
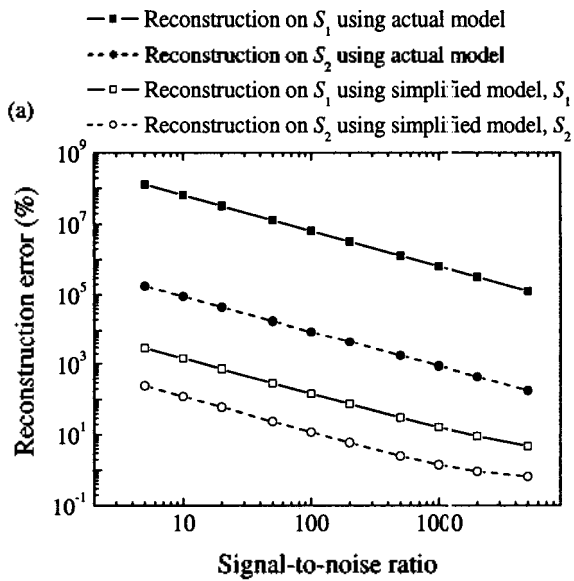


그림 5. S/N 비에 따른 재구성 오차. (a) 경계면 재구성 오차, (b) 음장 재구성 오차.