순환적인 완전최소자승법을 이용한 도플러 주파수 추정 방법에 관한 연구

김윤정[1], 임준석[2], 송준일[1], 최낙진[1], 성굉모[1]
[1] 서울대학교 전기컴퓨터공학부 음향공학연구실
[2]세종대학교 전자공학과

Recursive Total Least Squares Method for Ultrasonic Doppler Frequency Estimation

Kim, Yoon Chung[1] Lim, jun-seok[2] Song, Joon-il[1] Choi, Nakjin[1] Sung, Koeng-Mo[1]
[1]Applied Acoustics Laboratory, Seoul National University
[2]Department of Electrical Engineering, Sejong University, Seoul, Korea
christie@acoustics.snu.ac.kr

요약

혈관에 흐르는 혈류 속도의 측정은 혈압 및 심박수와 관련된 혈류의 역학적 변화를 관찰하는 데 있어서 주로 사용되는 방법 중의 하나이다. 이 혈류 속도는 일반적으로 도플러 효과에 의하여 주파수가 변화하는 현상을 이용하여 추정하게 된다.

그런데 기존의 주파수 추정 방법들은 시불변 시스템을 가정하고 있지만 실제 혈관 속은 혈구가 일정하지 않은 속도를 갖는 시변 시스템이라 할 수 있기 때문에 이러한 시변 특성이 강한 경우 기존의 방법을 이용하게 되면 그 성능이 저하되는 경향을 보인다. 또 피시험자의 몸 상태에 따라서 서로 다른 주파수 변화 추이를 보이므로 하나의 고정 변수로써 최적화된 성능을 기대하기도 어렵다.

그러므로 본 논문에서는 시변 시스템에서 좋은 성능을 갖는 가변 망각 인자(variable forgetting factor, VFF)를 사용한 순환적인 완전 최소 자승법(recursive total least squares, RTLS) 기법을 이용한 주파수 추정 방법을 제안한다. RTLS란 TLS 기법을 순차적으로 계산하는 방법으로써 시변 적응력을 향상시키는 방법이다. 또한 이 기법에 가변 망각 인자(VFF)를 적용시키는 것은 시변 시스템에서 외부적인 변화에 대하여 좀더 효율적으로 대응할 수 있기 위함이다.

기존의 방법과 성능 비교를 위하여 컴퓨터 시뮬레이션을 하였으며 그 결과 시변 시스템에서 본 논문에서 제안한 VFF를 이용한 RTLS 기법이 보다 향상된 성능을 가지고 있음을 확인 할 수 있었다.

1. 서론

동맥 혈관이 심장 박동으로 인하여 수축과 이완을 반복함에 따라 임상 신호는 도플러 효과로 인하여 주파수 천이가 일어나게 된다. 이 주파수 천이를 이용하여 도플러 주파수와 속도와의 관계에 적용하면 혈류 속도를 구할 수가 있다. 이러한 혈류 속도는 체내에 있는 기관의 건강 상태 등을 진단하는 데 사용되고 있는 매우 중요한 요소이다. 그러므로 혈류 속도의 측정 방법은 의용 공학자들 사이에서 커다란 관심거리가 되어 왔다. 그리하여 이와 같은 도플러 신호를 추정하는 방법에 대한 연구는 그간 많이 있어왔지만 대부분이 시불변 시스템을 가정하고 있는 까닭에 신호의 환경이 시변적으로 변화할수록 그에 따른 추정기는 성능이 현저하게 떨어지는 것을 알 수 있었다.

시변적인 시스템에서 주파수 추정 성능을 높이기 위하여 우리는 새로운 알고리즘을 제안한다. 이는 VFF를 사용한 RTLS AR(Auto Regressive) 알고리즘으로서 이 방법을 사용할 경우 RTLS 방법과 이에 적용되는 시변적인 환경에서 매 시간마다 갱신되는 VFF로 인하여 좀더 정확한 주파수 추정이 가능해지게 된다. 그러므로 본 논문에서 제안한 알고리즘은 시변적인 상황에서 좀더 잘 적응하며 보다 정확한 추정이 가능하다는 장점을 지닌다.

2. 이론

RTLS 알고리즘을 유도하기 위하여 우선 완전최소자승법(total least squares, TLS)의 상태 방정식을 다음과 같이 정의한다.

$$(A+E)x = b + r$$

이 식에서 E는 데이터의 오차를 나타내는 행렬로서 $M \times N$의 크기를 갖는다. 또한 r은 $M \times 1$ 크기의 측정 오차 벡터를 나타낸다. 그리고 알고리즘의 목적을 아래의 식(1)과 같이 표현되는 전체 오차를 최소화 하는 방향으로 x의 값을 구하는 것으로 설정한다.

$$\underset{E,r}{\text{minimize}} \| D[E \mid r]T \|_F \tag{1}$$

단, $b+r \in Range(A+E)$이 성립한다는 것을 전제로 해야 한다. 여기서 $\| \|_F$는 Frobenius norm을 의미한다. 그러면 식(1)은 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$\min_W \frac{WRW^T}{WW^T} \tag{2}$$

W는 TLS 해법을 이용한 해이고 R은 자기상관행렬(autocorrelation function)이며 통계적으로 nonnegative definite한 특성을 지니며, 이 W과 R은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$W = [1 \mid x^T]$$

$$R = \sum_{i=1}^{m} \begin{bmatrix} -b_i \\ a_i \end{bmatrix} [-b_i \mid a_i^T]$$

이를 식(2)에 대입하면 다음과 같다.

$$\min_x \sum_{i=1}^{m} \frac{|a_i^T x - b_i|^2}{x^T x + 1} = \min_x \frac{[1 \mid x^T] \sum_{i=m} \begin{bmatrix} -b_i \\ a_i \end{bmatrix} [-b_i \mid a_i^T] \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}}{[1 \mid x^T] \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}} \tag{3}$$

여기서 W는 (2)를 만족시키는 R의 최소 고유치에 해당하는 고유벡터를 의미한다. 계산의 편리를 위하여 우선 R의 역행렬인 행렬 P를 도입하자. 그러면 R의 최소 고유벡터는 곧 P의 최대 고유벡터가 될 것이다. 그러므로 만일

$$e(n) = R_n^{-1} e(n-1) = P_n e(n-1)$$

의 관계식이 성립할 경우

$$\begin{aligned} e(k) &= (P)^k e(0) \\ &= (V \Sigma^{-1} V^T)^k e(0) \\ &= [V_m \cdots V_1] \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_m} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_1} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} V_m^T \\ \vdots \\ V_1^T \end{bmatrix} e(0)) \\ &\approx \left(\frac{1}{\lambda_m}\right)^k V_m V_m^T (C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots + C_m V_m) \\ &= C_m \left(\frac{1}{\lambda_m}\right)^k V_m \end{aligned} \tag{4}$$

가 성립한다. 단 여기서 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_m}$는 P의 고유치를 의미한다. 위의 과정으로부터 우리는 P의 최대 고유벡터를 얻을 수 있으며 행렬의 역 보조정리(matrix inversion lemma)를 이용하여 가변 망각 인자(VFF)의 개념을 도입하면 R은 다음의 식과 같이 표현할 수 있다.

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \begin{bmatrix} -b_i \\ a_i \end{bmatrix} [-b_i \mid a_i^T] = \lambda_{n-1} R_{n-1} + u_n u_n^T$$

(단, $u_n = [-b_i \mid a_i^T]^T$.)

여기서 계산의 편리를 위하여 아래의 식(5)와 같이 표현되는 새로운 파라미터, K_n을 도입한다.

$$K_n = \frac{P_{n-1} u_n^T}{\lambda_{n-1} + u_n P_{n-1} u_n^T} \tag{5}$$

그러면 앞서 정의한 P_n은 K_n에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$P_n = \lambda^{-1} P_{n-1} - \lambda^{-1} K_n u_n P_{n-1}$$

이 매개변수들을 이용하여 우리는 식(3)의 조건으로부터 W의 값을 순환적으로 구할 수 있으며 결과적으로 AR 모델의 변수인 x의 값은 이 W에 의해 구할 수 있다.

AR 모델의 변수를 알고 있다는 가정 하에서 특정 주파수를 예측하는 일반적인 방법은 데이터 신호의 파워 스펙트럼 밀도(power spectral density, PSD)를 이용하는 것이다. 우리는 도플러 신호의 주파수 추정을 위하여 2차 AR 모델을 사용하여 스펙트럼 천이를 구했다. 이러한 도플러 효과를 이용하여 주파수를 구할 때, 에너지가 최대를 갖는 주파수를 사용하게 되는데 이는 파워 스펙트럼 밀도를 주파수에 대하여 미분한 값이 0이 되도록 만족하는 주파수를 구함으로써 얻을 수 있다. 이 방법을 이용하여 구한 주파수 값은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{f}_{\max}(n) = \frac{f_s}{2\pi}\cos^{-1}\left(\frac{-\hat{x}_1(n)}{4}\left(1+\frac{1}{\hat{x}_2(n)}\right)\right)$$

VFF RTLS 알고리즘을 이용한 AR 모델에서 이 주파수를 구하는 전체 과정이 표1에 정리되어 있다.

표1. VFF-RTLS 알고리즘 요약

초기화 P_0, θ_0, S_0

$$K_n = \frac{P_{n-1}u_n^T}{\lambda_{n-1} + u_n P_{n-1} u_n^T}$$

$$P_n = \frac{1}{\lambda_{n-1}}\left(P_{n-1} - K_n u_n P_{n-1}\right)$$

$$\theta_n = P_n \theta_{n-1}$$

$$\tilde{\theta}_n = \frac{\theta_n}{\|\theta_n\|}$$

$$\theta_n = \tilde{\theta}_n$$

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \alpha\left(u_n^H \theta_n\right)^2 / E_0$$

$$\hat{f}_{\max}(n) = \frac{f_s}{2\pi}\cos^{-1}\left(\frac{-\hat{x}_1(n)}{4}\left(1+\frac{1}{\hat{x}_2(n)}\right)\right)$$

단, $\theta_n = [\hat{x}_1(n), \cdots, \hat{x}_p(n)]^T$, $u_n = \left[-b_i \,|\, a_i^T\right]^T$

3. 실험 방법

이번 실험은 컴퓨터 시뮬레이션을 이용하였다. 원래 신호는 0.8초의 시간 동안 주파수가 200Hz로부터 시작하여 3500Hz까지 증가한 후 500Hz까지 감소하는 신호를 모델을 사용하였다. 이때 사용한 샘플링 주파수는 20kHz, 초기 중심 주파수는 1kHz이었다. VFF RTLS 알고리즘을 이용하여 추정한 데이터 시뮬레이션 결과는 각각 0.98, 0.9의 고정된 값을 갖는 망각 인자 이용한 RTLS와 RLS 알고리즘 결과값과 비교하였다.

4. 실험 결과

이 실험에서 우리는 다음과 같이 정의된 상대 오차(normalized bias)와 상대 표준 편차(normalized standard deviation)를 사용하였다.

$$\text{주파수의 상대 오차} = \frac{f_{true} - \bar{f}_{estim}}{f_{true}}$$

(단, $\bar{f}_{estim}$는 추정 주파수의 평균값)

$$\text{주파수의 상대 표준 편차} = \sqrt{\frac{\left(f_{true} - \bar{f}_{estim}\right)^2}{f_{true}^2}}$$

이 결과값들을 표2와 표3에 나타내었다.

표 2. 상대 오차 (%)

SNR	RLS 0.90	RLS 0.98	VFF-RTLS
30 dB	3.43	2.76	1.59
20 dB	24.69	24.18	4.14

표 3. 상대 표준 편차 (%)

SNR	RLS 0.90	RLS 0.98	VFF-RTLS
30 dB	2.29	0.57	0.44
20 dB	12.39	5.08	5.09

5. 결론

본 논문에서 우리는 초음파 도플러 주파수 추정에 관한 새로운 알고리즘을 제안하였다. 컴퓨터 시뮬레이션을 이용하여 본 논문에서 제안한 알고리즘을 이용한 주파수 추정이 고정된 망각 인자를 사용한 RLS 알고리즘에 비하여 더 좋은 결과를 갖는다는 사실을 확인하였다. 또한 이 알고리즘을 이용할 경우 따로 망각 인자를 정해주지 않아도 된다는 장점을 지닌다.

결론적으로 본 논문에서 제안한 주파수 추정 방법은 초음파 공학 분야에서 도플러 주파수를 다루는데 있어서 유용하다고 할 수 있겠다.

6. 참고 문헌

[1] G.H.Golub and C.F.Van Loan., "An analysis of the total least squares problem", SIAM Journal of Numerical Analysis, pp.883-893, 1980, 17.

[2] Charles W. Therrien, Discrete random signals and statistical signal processing, 1992, Prentice Hall.

[3] Fortescue T.R., Kershenbaum L.S. and Ydstie B.E., "Implementation of self tuning regulators with variable forgetting factors," Automatica, vol. 17, pp. 831-835.