

이항 모수의 Blyth-Still 신뢰구간에 대한 소고

유성모¹⁾

요 약

표본의 크기가 작을 경우에 이항분포의 모수에 대한 신뢰구간을 구하는 대표적인 방법으로는 Clopper-Pearson 방법과 Blyth-Still 방법이 있다. Clopper-Pearson 방법에 의한 신뢰구간은 이항 모수가 포함되는 커버리지 확률이 목표로 하는 신뢰수준보다 상대적으로 크다는 문제점이 있다. Blyth-Still 방법은 이러한 문제점을 개선시켰다. 그러나, Blyth-Still에 의해서 표로 보고된 신뢰구간을 적용할 경우 표본의 크기와 이항 모수의 값에 따라서 커버리지 확률이 목표하는 신뢰수준보다 작은 경우가 발생한다. 그러나, 이는 Blyth-Still 방법 자체의 문제점이 아니며 단지 보고된 표의 유의한 소수점 자릿수와 관계가 있다. 본 논문은 Blyth-Still 방법에 의한 좀 더 정확한 신뢰구간을 제시한다.

주요용어 : 유의수준; 이항 모수; 커버리지 확률.

1. 서론 및 연구동기

표본의 크기가 작을 경우에 이항분포의 모수에 대한 신뢰구간에 대한 연구는 Clopper와 Pearson의 연구(Clopper and Pearson 1934) 이후에 많은 학자들에 의해서 진행되어 왔다(예, Pearson and Hartley 1954; Stern 1954; Crow 1956; Blyth and Still 1983; Blyth 1986; Agresti and Cull 1998). Clopper-Pearson이 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 신뢰구간의 상하 양측의 꼬리부분의 확률이 모두 $\alpha/2$ 이하인 신뢰구간이다. Clopper-Pearson 신뢰구간에 이항 모수가 실제로 포함되는 커버리지 확률은 목표하는 신뢰수준 $1-\alpha$ 보다 크다는 사실이 많은 학자들의 비판대상이었다(예, Stern 1954; Crow 1956; Blyth and Still 1983; Blyth 1986; Agresti and Cull 1998). 신뢰구간의 상하 양측에 꼬리 부분이 반드시 존재하는 Clopper-Pearson 신뢰구간과는 달리 상하 단측에만 꼬리가 존재하는 경우도 신뢰구간의 범주에 포함시킴으로써 커버리지 확률이 신뢰수준보다 과대하게 나타나는 현상은 해결되었으며(Stern 1954; Crow 1956) Blyth와 Still(1983)에 의해서 명쾌하게 정리되고 표본의 크기에 따른 신뢰구간이 현실화되었다.

Blyth-Still 방법에 의하여 표로 작성된 신뢰구간(Blyth and Still 1983)을 적용할 경우에 주어진 표본의 크기와 이항 모수의 값에 따라서 커버리지 확률이 신뢰수준보다 작은 경우가 발생한다. 그러나 이는 Blyth-Still 방법 자체의 문제점이 아니며 단지 보고된 표의 유의한 소수점 자릿수와 관계가 있다. 본 논문에서는 소수점 넷째 자리까지의 신뢰구간을 계산하여 사용하였다.

2. 새로 계산된 Blyth-Still 신뢰구간

Blyth-Still 방법에 의하여 표로 작성된 신뢰구간(Blyth and Still 1983)을 적용할 경우에는 주

1) 고려대학교 정보통계학과 부교수, 충남 연기군 조치원을 서창동, 339-700, syoo@korea.ac.kr

이항 모수의 Blyth-Still 신뢰구간에 대한 소고

어진 표본의 크기와 이항 모수의 값에 따라서 커버리지 확률이 신뢰수준보다 작은 경우가 발생한다. 예를 들어, 표본의 크기가 $n=6$ 일 때, $p=.009$, $p=.0095$, $p=.9905$, 그리고 $p=.9905$ 인 경우에 커버리지 확률이 신뢰수준보다 작다. 표본의 크기가 6과 15인 경우의 Blyth와 Still에 의해서 보고된 표를 이용할 경우의 커버리지 확률은 <그림 1>에서 볼 수 있다. 그러나, 커버리지 확률이 신뢰수준보다 작은 현상이 발생하는 것은 Blyth-Still 방법 자체의 문제점이 아니며 단지 보고된 표의 유의한 소수점 자리수와 관계가 있다. 본 연구를 통하여 Blyth-Still 방법에 의한 95% 신뢰구간을 새롭게 구하였으며 <표-1>은 새롭게 계산된 95% 신뢰구간을 보여주고 있고, <그림 1>은 새롭게 계산된 신뢰구간을 토대로 한 커버리지 확률을 보여주고 있다.

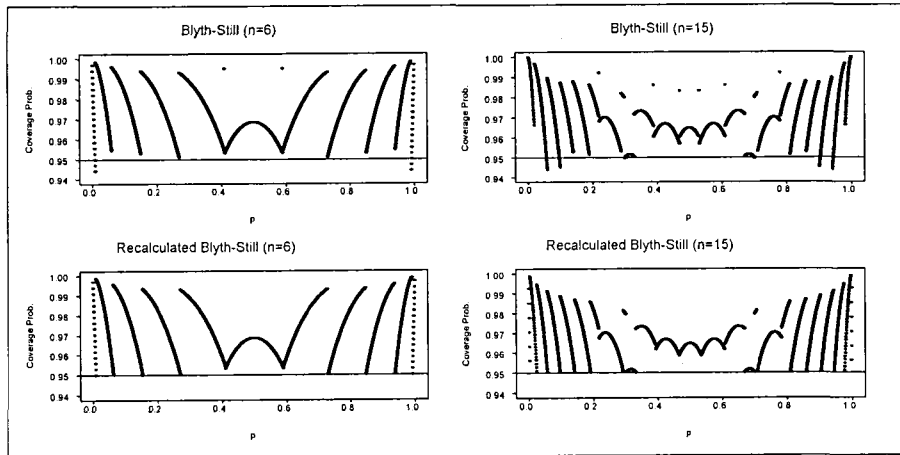


그림 1. 95% Blyth-Still 신뢰구간과 Recalculated Blyth-Still 신뢰구간의
커버리지 확률 ($n=6, 15$)

참고문헌

- Agresti, A., and Coull, B. A. (1998) "Approximate is Better than Exact for Interval Estimation of Binomial Proportions," *The American Statistician*, 52, 119-126.
- Blyth, C. R. (1986), "Approximate Binomial Confidence Limits," *Journal of the American Statistical Association*, 81, 843-855.
- Blyth, C. R., and Still, H. A. (1983), "Binomial Confidence Intervals," *Journal of the American Statistical Association*, 78, 108-116.
- Clopper, C. J., and Pearson, E. S. (1934), "The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of the Binomial," *Biometrika*, 26, 404-413.
- Crow, E. L. (1956), "Confidence Intervals for Proportion," *Biometrika*, 43, 423-435.
- Leemis, L. M., and Trivedi, K. S. (1996) "A Comparison of Approximate Interval Estimators for the Bernoulli Parameter," *The American Statistician*, 50, 63-68.
- Pearson, E. S., and Hartley, H. O. (1954), *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, London: The Syndics of the Cambridge University Press.
- Sterne, T. E. (1954), "Some Remarks on Confidence of Fiducial Limits," *Biometrika*, 41, 275-278.

X	n = 1		n = 2		n = 3		n = 4		n = 5		n = 6		X
	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	
0	.0005	.9495	.0005	.7760	.0005	.6315	.0005	.5270	.0005	.5000	.0005	.4100	0
1	.0505	.9995	.0255	.9745	.0170	.8645	.0130	.7510	.0105	.6570	.0090	.5895	1
2			.2240	.9995	.1355	.9830	.0980	.9020	.0765	.8105	.0630	.7285	2
3					.3685	.9995	.2490	.9870	.1895	.9235	.1535	.8465	3
X	n = 7		n = 8		n = 9		n = 10		n = 11		n = 12		X
	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	
0	.0005	.3770	.0005	.3575	.0005	.3165	.0005	.2855	.0005	.2605	.0005	.2405	0
1	.0075	.5540	.0065	.5000	.0060	.4430	.0055	.4440	.0050	.4010	.0045	.3665	1
2	.0535	.6585	.0465	.6420	.0415	.5580	.0370	.5555	.0335	.4995	.0305	.4565	2
3	.1290	.7745	.1115	.7105	.0980	.6830	.0875	.6190	.0790	.5985	.0720	.5430	3
4	.2255	.8710	.1930	.8070	.1690	.7485	.1505	.7140	.1355	.6670	.1230	.6330	4
5	.3415	.9465	.2895	.8885	.2515	.8310	.2225	.7775	.2000	.7390	.1815	.7060	5
6	.4460	.9925	.3580	.9535	.3170	.9020	.2860	.8495	.2610	.8000	.2410	.7590	6
X	n = 13		n = 14		n = 15		n = 16		n = 17		n = 18		X
	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	
0	.0005	.2205	.0005	.2350	.0005	.2170	.0005	.2020	.0005	.1890	.0005	.1775	0
1	.0040	.3385	.0040	.3160	.0035	.3020	.0035	.3015	.0035	.2815	.0030	.2655	1
2	.0285	.4335	.0260	.4230	.0245	.3935	.0230	.3690	.0215	.3475	.0205	.3290	2
3	.0665	.5195	.0615	.5000	.0570	.4650	.0535	.4355	.0500	.4165	.0475	.4115	3
4	.1130	.5865	.1045	.5765	.0970	.5345	.0905	.4995	.0850	.4885	.0800	.4705	4
5	.1660	.6610	.1530	.6285	.1420	.6060	.1325	.5640	.1240	.5440	.1165	.5290	5
6	.2240	.7395	.2065	.6835	.1910	.6675	.1780	.6305	.1665	.5935	.1565	.5880	6
7	.2605	.7760	.2355	.7645	.2175	.7060	.2025	.6980	.1895	.6520	.1780	.6250	7
8	.3390	.8340	.3165	.7935	.2940	.7825	.2720	.7280	.2535	.7180	.2365	.6705	8
9	.4135	.8870	.3715	.8470	.3325	.8090	.3020	.7975	.2820	.7465	.2660	.7340	9

<표-1> 이항분포의 모수에 대한 95% Blyth-Still 신뢰구간

註: 주어진 n에 대하여 X가 n/2보다 큰 경우의 신뢰구간은 n-X인 경우의 신뢰구간을 이용하여 구한다. 예를 들어, n=8, X=1인 경우의 95% 신뢰구간은 (.0065, .5000)이기 때문에, X=7인 경우의 신뢰구간은 (1-.0065, 1-.5000)=(.9935, .5000)이다.

이항 모수의 Blyth-Still 신뢰구간에 대한 소고

X	n = 19		n = 20		n = 21		n = 22		n = 23		n = 24		X
	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	
0	.0005	.1685	.0005	.1600	.0005	.1525	.0005	.1455	.0005	.1395	.0005	.1335	0
1	.0030	.2515	.0030	.2390	.0025	.2275	.0025	.2175	.0025	.2085	.0025	.2000	1
2	.0195	.3155	.0185	.3185	.0175	.3005	.0165	.2860	.0160	.2735	.0155	.2620	2
3	.0445	.3890	.0425	.3695	.0405	.3515	.0385	.3360	.0370	.3220	.0350	.3095	3
4	.0755	.4450	.0715	.4225	.0680	.4025	.0650	.3885	.0620	.3845	.0595	.3695	4
5	.1100	.5000	.1045	.4740	.0990	.4550	.0945	.4485	.0900	.4335	.0860	.4135	5
6	.1475	.5545	.1400	.5255	.1325	.5060	.1265	.5000	.1205	.4775	.1150	.4570	6
7	.1690	.6105	.1605	.5770	.1530	.5510	.1460	.5510	.1400	.5220	.1340	.5000	7
8	.2220	.6550	.2090	.6300	.1975	.5970	.1870	.5820	.1780	.5660	.1695	.5425	8
9	.2520	.6880	.2395	.6810	.2280	.6480	.2180	.6170	.2090	.6150	.2005	.5860	9
10	.3120	.7480	.2930	.7070	.2760	.6990	.2605	.6635	.2470	.6395	.2340	.6300	10
11	.3450	.7780	.3190	.7605	.3010	.7240	.2865	.7135	.2740	.6775	.2625	.6610	11
12	.3895	.8310	.3700	.7910	.3520	.7720	.3365	.7395	.3225	.7260	.3100	.6900	12
X	n = 25		n = 26		n = 27		n = 28		n = 29		n = 30		X
	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	하한	상한	
0	.0005	.1285	.0005	.1235	.0005	.1190	.0005	.1150	.0005	.1110	.0005	.1075	0
1	.0025	.1925	.0020	.1855	.0020	.1790	.0020	.1730	.0020	.1680	.0020	.1630	1
2	.0145	.2520	.0140	.2425	.0135	.2335	.0130	.2255	.0125	.2180	.0120	.2110	2
3	.0340	.3030	.0325	.3030	.0310	.2895	.0300	.2780	.0290	.2685	.0280	.2595	3
4	.0570	.3545	.0545	.3410	.0525	.3280	.0505	.3170	.0490	.3060	.0470	.2965	4
5	.0825	.3970	.0790	.3815	.0760	.3680	.0735	.3570	.0705	.3565	.0685	.3440	5
6	.1105	.4385	.1060	.4220	.1015	.4145	.0980	.4040	.0945	.3960	.0910	.3805	6
7	.1290	.4795	.1240	.4650	.1195	.4565	.1155	.4460	.1115	.4290	.1080	.4145	7
8	.1615	.5200	.1545	.5055	.1480	.4995	.1420	.4820	.1365	.4645	.1310	.4490	8
9	.1930	.5610	.1860	.5420	.1795	.5430	.1735	.5175	.1685	.5000	.1635	.4830	9
10	.2225	.6025	.2120	.5775	.2020	.5700	.1925	.5535	.1840	.5350	.1755	.5165	10
11	.2525	.6450	.2430	.6180	.2340	.5980	.2260	.5955	.2185	.5705	.2115	.5505	11
12	.2960	.6825	.2825	.6585	.2695	.6315	.2580	.6190	.2470	.6035	.2365	.5850	12
13	.3175	.7040	.3035	.6965	.2900	.6715	.2785	.6450	.2690	.6430	.2600	.6190	13
14	.3550	.7475	.3415	.7175	.3285	.7100	.3175	.6825	.3065	.6605	.2970	.6555	14
15	.3975	.7775	.3820	.7570	.3685	.7305	.3550	.7215	.3395	.6935	.3245	.6755	15

<표-1> 이항분포의 모수에 대한 95% Blyth-Still 신뢰구간 (계속)