2002 Proceedings of the Autumn Conference, Korean Statistical Society

# Availabilities of Some Repairable Network System

**Jung Yeon Lee[1], Jongwoo Kim[2], Eui Yong Lee[3]**


## Abstract

In this paper, we define an availability of network, when the states of links are modeled by alternating renewal processes. The actual availabilities of some simple networks are obtained and compared to each other.


*keywords*: network availability, alternating renewal processes, renewal function

## 1. 서론

교대재생과정(alternating renewal process)을 따르는 응집시스템(coherent system)에서의 가동성(availability)은 Baxter(1983)에 의해 소개되었고 직렬시스템과 병렬시스템에서의 평균 고장 수와 수리 수가 구해졌다. 이 논문에서는 네트워크에서의 가동성에 대하여 정의하고, 각 링크가 교대재생과정을 따르는 경우, 네트워크에서의 가동성을 구하는 방법을 제시하고 실제로 가동성을 구하고 이들을 비교한다. 끝으로, 네트워크의 평균 고장수와 수리수를 구하는 방법도 함께 제시된다.

## 2. 네트워크 시스템의 가동성

네트워크 시스템에서 노드(node)들의 집합을 $V=\{1,2,3,\ldots,N\}$이라 할 때, 임의의 서로 다른 두 노드 $i$, $j$에 대하여 시점 $t$에서 이 노드들을 잇는 링크(link, 또는 아크 arc) $(i,j)$의 지시함수(indicator function)를

$$X_{ij}(t)=\begin{cases}1, t\text{시점에서 링크}(i,j)\text{가 가동중일 경우}\\ 0, \text{그렇지 않을 경우}\end{cases}$$

라 정의하고 $L$를 모든 링크들의 집합이라 하면, 시점 $t$에서 네트워크 시스템의 구조함수(structure function)를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$X(t)=\phi(X_{ij}(t)|(i,j)\in L)=\begin{cases}1, t\text{시점에서 모든 링크가 작동할 경우}\\ 0, \text{그렇지 않을 경우}\end{cases}$$

여기서 모든 노드들은 완전하다고 가정한다.

임의의 링크 $(i,j)$의 시점 $t$에서 가동성은 다음과 같이 정의된다.

$$A_{ij}(t)=\Pr\{X_{ij}(t)=1\}=E[X_{ij}(t)]$$

따라서 시점 $t$에서 네트워크 시스템의 가동성은

1) (140-742) 서울 용산구 청파동 2가 53-12 숙명여자대학교 통계학과 석사과정
2) (790-784) 경북 포항시 남구 효자동 산 31 포항공과대학교 수학과 박사과정
3) (140-742) 서울 용산구 청파동 2가 53-12 숙명여자대학교 통계학과 교수

$$\begin{aligned} A(t) &= \Pr\{\, X(t)=1\} \\ &= E[\, X(t)] \\ &= h(E[X_{ij}(t)] \mid (i,j) \in L) \\ &= h(A_{ij}(t) \mid (i,j) \in L) \end{aligned}$$

이고 여기서 $h$는 구조함수 $\phi$의 신뢰도 함수(reliability function)이다.

## 2.1. 원형(Circular) 네트워크의 가동성

먼저 원형 네트워크에서의 가동성에 대하여 알아보도록 하겠다. 원형 네트워크 중 가장 간단한 형태인 노드가 3개일 때의 가동성을 구해보면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} X(t) &= \phi(X_{12}(t), X_{23}(t), X_{13}(t)) \\ &= X_{12}(t)X_{23}(t) + X_{23}(t)X_{13}(t) + X_{13}(t)X_{12}(t) - 2X_{12}(t)X_{23}(t)X_{13}(t) \end{aligned}$$

위의 구조함수를 이용하여 가동성을 계산해보면

$$\begin{aligned} A(t) &= E[\, X(t)] \\ &= A_{12}(t)A_{23}(t) + A_{23}(t)A_{13}(t) + A_{13}(t)A_{12}(t) - 2A_{12}(t)A_{23}(t)A_{13}(t) \end{aligned}$$

이다. 이 결과가 일반적인 $n$개의 노드로 이루어진 원형 네트워크에서는 다음과 같이 얻어진다.

$$A(t) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i \neq j} A_{i,i+1}(t) - (n-1) \prod_{i=1}^{n} A_{i,i+1}(t)$$

여기서 $A_{n,n+1}(t) = A_{1n}(t)$이다.

## 2.2. 브릿지(Bridge) 네트워크의 가동성

브릿지 네트워크의 가동성은

$$\begin{aligned} A(t) = \; & A_{12}(t)A_{13}(t)A_{24}(t) + A_{12}(t)A_{13}(t)A_{34}(t) + A_{12}(t)A_{24}(t)A_{34}(t) \\ & + A_{13}(t)A_{24}(t)A_{34}(t) + A_{12}(t)A_{23}(t)A_{24}(t) + A_{12}(t)A_{23}(t)A_{34}(t) \\ & + A_{13}(t)A_{23}(t)A_{24}(t) + A_{13}(t)A_{23}(t)A_{34}(t) \\ & - 2A_{12}(t)A_{13}(t)A_{23}(t)A_{24}(t) - 2A_{12}(t)A_{13}(t)A_{23}(t)A_{34}(t) \\ & - 2A_{12}(t)A_{23}(t)A_{24}(t)A_{34}(t) - 2A_{13}(t)A_{23}(t)A_{24}(t)A_{34}(t) \\ & - 3A_{12}(t)A_{13}(t)A_{24}(t)A_{34}(t) + 4A_{12}(t)A_{13}(t)A_{23}(t)A_{24}(t)A_{34}(t) \end{aligned}$$

이다.

완전(complete) 네트워크에서도 원형이나 브릿지 네트워크에서처럼 가동성을 구할 수 있다.

# 3. 가동성의 형태 및 비교

각 링크가 독립적으로 가동시간의 분포함수 $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$와 수리시간의 분포함수 $G(t) = 1 - e^{-\beta t}$로 이루어진 교대재생과정을 따른다고 할 때 노드의 수가 4개인 원형, 브릿지, 완전 네트워크의 가동성을 비교하자. 먼저 각 링크의 가동성은

$$\begin{aligned} A(t) &= \overline{F}(t) + \overline{F} * \Xi(t) \\ &= \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)t} \end{aligned}$$

이고, 여기서 $\Xi(t) = \sum_{n=1}^{n} F^{(n)} * G^{(n)}(t)$이다.

$A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$를 각각 원형, 브릿지, 완전 네트워크의 가동성이라 하면

$$A_1(t) = 4\{A(t)\}^3 - 3\{A(t)\}^4$$
$$A_2(t) = 8\{A(t)\}^3 - 11\{A(t)\}^4 + 4\{A(t)\}^5$$
$$A_3(t) = 16\{A(t)\}^3 - 33\{A(t)\}^4 + 24\{A(t)\}^5 - 6\{A(t)\}^6$$

로 주어짐을 알 수 있다.

$A(0)=1$, $\lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$, $\frac{dA(t)}{dt} = -\alpha e^{-(\alpha+\beta)t}$이므로, 모든 $t>0$에 대하여 $\frac{dA_i(t)}{dt} < 0, (i=1,2,3)$임을 알 수 있고 $A_i(0)=1, (i=1,2,3)$이다. 따라서 $A_i(t), (i=1,2,3)$은 모두 1에서 출발하여 감소하는 함수이다. 그리고 $\lim_{t\to 0}\frac{dA_i(t)}{dt} = \lim_{t\to\infty}\frac{dA_i(t)}{dt} = 0, (i=1,2,3)$임도 알 수 있다. 모든 $t\ge 0$에 대하여

$$A_2(t) - A_1(t) = 4\{A(t)\}^3\{1-A(t)\}^2 \ge 0$$
$$A_3(t) - A_2(t) = 2\{A(t)\}^3\{1-A(t)\}^2\{1+3(1-A(t))\} \ge 0$$

이므로

$$A_1(t) \le A_2(t) \le A_3(t)$$

이다. 이 식에서 "="은 $t=0$에서만 성립한다.

## 4. 평균 고장수와 수리수

링크 $(i,j)$의 신뢰 중요도(reliability importance)는 $\frac{\partial A(t)}{\partial A_{ij}(t)}$로 정의되므로, 3절의 조건하에서 구간 $(0,t]$에서 평균 네트워크 고장 수는

$$\Lambda(t) = \sum_{(i,j)\in L}\int_0^t \lambda(u) I_{ij}(u)\,du$$

이고, 평균 네트워크 수리 수는

$$\Xi(t) = \sum_{(i,j)\in L}\int_0^t \xi(u) I_{ij}(u)\,du$$

이다.

여기서 $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n+1)} * G^{(n)}(t)$, $\lambda(t) = \frac{d\Lambda(t)}{dt}$, $\xi(t) = \frac{d\Xi(t)}{dt}$이다.

이때 모든 $n\ge 1$에 대하여,

$$\int_0^t \lambda(u)\{A(u)\}^n du = \frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha+\beta)^{n+2}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \frac{1-e^{-(\alpha+\beta)(n-k+1)t}}{n-k+1}$$

$$\int_0^t \xi(u)\{A(u)\}^n du = \frac{\alpha^{n+1}\beta}{(\alpha+\beta)^{n+2}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \left[\frac{1-e^{-(\alpha+\beta)(n-k)t}}{n-k} - \frac{1-e^{-(\alpha+\beta)(n-k-1)t}}{n-k-1}\right]$$

이므로 모든 경우의 $\Lambda(t)$와 $\Xi(t)$를 구할 수 있다.

## 참고문헌

Barlow, R.E. and Proschan, F. (1973), Availability theory for multicomponent systems. In *Multivariate Analysis* III, ed. P.R. Krishnaiah, Academic Press, New York, 319-335.

Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975), Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Holt, Rienehart and Winston, New York.

Baxter, L.A. (1981a), Availability measures for a two-state system. *J. Appl. Prob.*, **18**, 227-235.

Baxter, L.A. (1981b), A Two-state system with partial availability in the failed state. *Naval Res. Logist. Quart.*, **28**, 231-236.

Baxter, L.A. (1983), Availability Measures for coherent systems of separately maintained components. *J. Appl. Prob.*, **20**, 627-636.

Cox, D.R. (1962), Renewal Theory. Methuen, London.