2002 Proceedings of the Autumn Conference, Korean Statistical Society

Analysis of Forward Recurrence Time in Alternating Renewal Process

Eui Yong Lee[1] Hye Ran An[2] Seung Kyoung Choi[3]

Abstract

In this paper, we obtain an explicit formula of the Laplace transform of the forward recurrence time at finite time $t>0$ in an alternating renewal process, by adopting a Markovian approach. As a consequence, we obtain the first two moments of the forward recurrence time.

Keywords : Alternating renewal process, Forward recurrence time, Laplace transform

1. 서 론

교대재생과정(Alternating renewal process)은 시스템의 상태가 작동과 고장사이를 오가며 진행되는 재생과정이다. 시스템의 작동기간 $X_1, X_2, \cdots$는 서로 독립이고, 분포함수 G를 가지며, 시스템의 수리기간 $Y_1, Y_2, \cdots$ 은 서로 독립이고, 평균이 $1/\lambda$ 인 지수분포를 따른다고 가정한다. 시스템의 잔여수명을 $v(t)$라 정의할 때, $v(t)$는 시스템이 시간 t에서 살아 있다는 조건하에 고장날 때까지의 남은 시간이다. 본 연구에서는 $v(t)$의 확률분포함수를 $F(x, t)$로 놓고, 마프코프적인 방법을 이용하여 $F(x, t)$의 라플라스변환인 $f^*(s,t) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x,t)$를 구한다. 이를 토대로 잔여수명의 유한한 시간 t시점에서의 1, 2차 적률을 구한다.

2. 잔여수명의 라플라스변환

작은구간 $[t, t+\Delta t]$에서 $v(t)$와 $v(t+\Delta t)$ 사이의 관계를 구해 보면 다음과 같다.

1) Professor, Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742.
E-mail : eylee@sookmyung.ac.kr
2) Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742.
E-mail : ran4504@hanmail.net
3) Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul 140-742.
E-mail : csk76@hanmail.net

$$v(t+\triangle t) = \begin{cases} v(t) - \triangle t\,, & v(t) > \triangle t \\ 0 & ,\ 0 \le v(t) < \triangle t \text{ 이고 } [t, t+\triangle t] \text{에서 재생점이 없을때} \\ x - \triangle t' & ,\ 0 \le v(t) < \triangle t \text{ 이고 } [t, t+\triangle t] \text{에서 재생점이 있을때} \end{cases}$$

여기서, $0 < \triangle t' < \triangle t$, $X \sim G$. 따라서,

$$\begin{aligned} \Pr\{v(t+\triangle t) \le x\} &= \Pr\{v(t+\triangle t) \le x\,,\ v(t) > \triangle t\} + \Pr\{v(t+\triangle t) \le x\,,\ 0 \le v(t) < \triangle t\} \\ &= \Pr\{v(t+\triangle t) \le x\,,\ v(t) > \triangle t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \Pr\{v(t+\triangle t) \le x\,,\ v(t) \le \triangle t,\ [t, t+\triangle t] \text{에서 재생점이 없을때}\} \\ &\quad + \Pr\{v(t+\triangle t) \le x\,,\ v(t) \le \triangle t,\ [t, t+\triangle t] \text{에서 재생점이 있을때}\} \\ &\quad = \Pr\{v(t+\triangle t) \le x\,,\ v(t) > \triangle t\} + \Pr\{0 \le x, v(t) \le \triangle t\}(1 - \lambda\triangle t + O(\triangle t)) \\ &\quad + \Pr\{(x - \triangle t' \le x, v(t) \le \triangle t\}(\lambda\triangle t + O(\triangle t)). \end{aligned}$$

이다. 위 식을 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} &\Pr\{v(t+\triangle t) \le x\} - \Pr\{v(t) \le x\} = \triangle t \frac{\partial}{\partial x} \Pr\{v(t) \le x\} \\ &+ \Pr\{v(t) \le \triangle t\}(-\lambda\triangle t + O(\triangle t)) \\ &+ \Pr\{(x - \triangle t' \le x, v(t) \le \triangle t\}(\lambda\triangle t + O(\triangle t)). \end{aligned} \qquad (2.1)$$

식(2.1)을 변형하여 우리는 $F(x, t)$에 관한 편미분방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} F(t,x) - \lambda F(t,0)(1 - G(x)). \qquad (2.2)$$

식(2.2)의 양변에 라플라스변환을 취하면

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\partial}{\partial t} F(t,x)\,dx = f^*(t,s) - F(t,0) - \lambda F(t,0) \int_0^{\infty} \overline{G(x)}\,dx$$ 이 되고,

우리는 $f^*(t,s)$ 에 관한 미분 방정식을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{s} f^*(t,s) = f^*(t,s) - F(t.0) - \lambda F(t.0)\Big[\frac{1}{s} - \frac{1}{s} g^*(s)\Big].$$

위 미분방정식을 풀면 $f^*(t,s)$는 다음과 같이 구해진다.

$$f^*(t,s) = e^{st}[\{\lambda(g^*(s) - 1\} - s](\frac{1}{s+\lambda})\Big[\int_0^t e^{-xs} dH_{1(x)} - e^{-st}(H_{1(t)} - H_{2(t)})\Big] + g^*(s).$$

1차적률 $E[v(t)]$ 과 2차적률 $E[v^2(t)]$ 을 구하면

$$E[v(t)] = (-1)\frac{d}{ds}f^*(t,s) \mid_{s=0}$$
$$= \mu - t + \frac{\lambda\mu+1}{\lambda}H_2(t)$$

$$E[v^2(t)] = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}f^*(t,s) \mid_{s=0}$$
$$= t^2 - 2t + \mu_2 + \left(\mu_2 + \frac{2\mu}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}\right)H_2(t) + \frac{2(\mu\lambda+1)}{\lambda}\int_0^t (x-t)dH_1(x)$$ 이다.

참고문헌

[1] Baxter, L. A.(1983). The moments of forward recurrence times of an alternating renewal process, European Journal of Operational Research, 12, pp. 205-207.

[2] Coleman, R.(1982). The moments of forward recurrence time, European Journal of Operational Research, 9, pp.181-183.

[3] Cox, D. R.(1961). Renewal Theory, John Wiley & Sons, New York.

[4] Karlin, S. and Taylor, H. M.(1975). A First Course in Stochastic Processes, 2nd ed., Academic Press, New York.

[5] Lee, E. Y. and Sim, G. C.(1999). A Markovian approach to the forward recurrence time in the renewal process, 1999 Proceedings of the Spring Conference of Korean Statistical Society.

[6] Ross, S. M.(1996). Stochastic Processes, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York.