

# Sugeno 형태의 퍼지 논리를 이용한 도립 진자의 적응 퍼지 제어

박 해 민, 원 성 운, 김 영 태

동국대학교 전기공학과

전화 : 02-2065-9075 / 핸드폰 : 017-520-2715

## Adaptive Fuzzy Control of Inverted Pendulum Using the Sugeno-Type of Fuzzy Logic

Hae-Min Park, Sung-Woon Won, Young-Tae Kim  
Dept. of Electrical Engineering, Dongguk University  
E-mail : studpark01@hananet.net

### Abstract

This paper proposes the control problem of an inverted pendulum system based on Sugeno-Type of fuzzy logic. The universal approximating capability, learning ability, adaptation capability and disturbance rejection are collected in one control strategy. The proposed scheme does not require an accurate dynamic model and the joint acceleration measurement, yet it guarantees asymptotic trajectory tracking. Experimental results perform with an inverted pendulum to show the effectiveness of the approach.

### 1. 서론

도립 진자 시스템(inverted-pendulum system)은 활차(cart)를 정해진 길이 내에서 좌우로 이동하여 활차 상에 설치된 진자를 불안정 평형점으로 위치시키는 것이다. 로켓이나 2족 보행 로봇의 자세 제어에 응용되기도 하며 특유의 구조적인 불안정성 및 비선형성을 지니고 있어 많은 연

구자들에게 의해 다양한 종류의 제어가 제안되고 있다. 일반적인 제어 이론에서의 대부분의 문제들은 주로 시스템 모델링에 기초한 수학적인 방법들에 의해 해결되어지고 있다. 그러나 실제적으로 수학적인 방법으로 해결할 수 없는 매우 복잡한 산업 과정들에 대해서는 정확한 해결 방법을 제시하지 못하고 있다. 퍼지논리 제어(FLC)는 시스템의 수학적인 모델을 얻기가 어렵거나 불가능한 것을 보완하기 위하여 전문가의 지식과 경험을 이용할 수 있는 제어 방법이다.

퍼지 제어 시스템의 체계적인 분석과 설계 방법을 보면, Sugeno는 새로운 종류의 퍼지 추론 시스템을 제안하였다. Sugeno 퍼지모델은 결론부가 선형 함수로 이루어져 있으므로 퍼지논리 제어기의 분석에 유용한 모델이며, 콤팩트(compact) 집합 안에 있는 어떠한 종류의 연속이며 실수인 함수를 어느 정도의 정확성으로 항상 근사화 할수 있음을 보였다. Wang은 퍼지 기저 함수의 개념을 도입하여 비선형 시스템에 대한 적응퍼지 제어기의 안정도 해석에 대한 수학적인 틀을 구축하였으며 퍼지 논리 시스템은 콤팩트 입력 공간

에서 어떤 정도의 정확성에 대하여 모든 비선형 함수를 균일하게 근사화 할 수 있음을 보였다.

본 논문에서는 앞에서 언급한 문제점들을 해결하기 위해 퍼지 논리와 적응 제어 개념들을 조합한 제어 방법을 제시하였다. 제안된 제어기는 시스템의 정확한 수학적 모델을 요구하지 않으며 적분항을 포함시킴으로써 정상 상태에서의 오차를 줄일 수 있으며, 제한 미분항을 고려함으로써 Lyapunov 함수의 일차 미분값이 확실히 음의 부호를 갖게 하였으며 결과적으로 점근적으로 안정됨을 수학적인 증명을 통하여 보여주었다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서 Sugeno 퍼지 논리 시스템의 기본적인 구조를 보여 주었으며, 3 절에서는 적응 퍼지 제어 이론을 소개하였다. 4절에서는 제안한 제어방법을 독립 진자 시스템에 적용하여 그 효율성을 시뮬레이션과 실험을 통하여 입증하였다.

## II. 퍼지 논리 시스템

퍼지 논리 지식의 기본은 And와 Or같은 연산자들이 입출력들과 관련이 있는 언어적 변수들과의 집합으로 구성된 퍼지 IF-THEN 규칙들의 집합으로 되어 있다. 본 논문에서는 식(1)과 같은 퍼지 IF-THEN 규칙으로 표현 할 수 있는 Sugeno 형태의 시스템을 고려하였다.

$$\begin{aligned} R^0: & \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } A_n^i, \\ \text{THEN } & y^i(x) = k_1^i x_1 + k_2^i x_2 + \dots + k_n^i x_n \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in U \subset R^n$  와  $y^i(x) \in R$  은 퍼지 논리 시스템의 입력과 출력을 나타낸다.

$A_l^i$ 은  $U$ 공간에서의 퍼지 집합이며,  $K_l^i$ 은 퍼지 규칙의 결론부의 계수이다.  $i=1, 2, \dots, n$ 은 퍼지 입력의 수,  $l=1, 2, \dots, m$ 은 퍼지 규칙의 수를 나타낸다. Sugeno형태의 퍼지 규칙의 IF부분은 보통퍼지 IF-THEN 규칙과 동일하나 THEN부분은 입력변수의 선형조합임을 알 수 있다. 만일 입력  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in U \subset R^n$  이면 Sugeno 퍼지 시스템의 출력  $f(x) = (x_1, \dots, x_n)^T \in V \subset R$  는 식 (2)와 같은 가중치 평균으로 표현된다.

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^m w^i (k_1^i x_1 + \dots + k_n^i x_n)}{\sum_{i=1}^m w^i} \quad (2)$$

여기서, 가중치  $w^i$ 은 식 (3)과 같다.

$$w^i = \prod_{l=1}^n \mu_{A_l^i}(x_l) \quad (3)$$

만일 소속 함수  $\mu_{A_l^i}(x_l)$  를 고정시키고,  $k_l^i$  을 조정 가능한 변수로 보면, 식 (2)는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$f(x) = \varphi^T \xi(x) \quad (4)$$

$\varphi = (k_1^1, \dots, k_n^1, k_1^2, \dots, k_n^2, \dots, k_1^n, \dots, k_n^n)^T$ 은 변수벡터이며,  $\xi(x) = (\xi_1^1(x), \dots, \xi_n^1(x), \dots, \xi_1^n(x), \dots, \xi_n^n(x))^T$ 은 다음과 같은 형태의 회기벡터(regressive vector)로 볼 수 있다.

$$\xi_l^i(x) = \frac{(\prod_{l=1}^n \mu_{A_l^i}(x_l)) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^m (\prod_{l=1}^n \mu_{A_l^i}(x_l))} \quad (5)$$

식 (4)와 같은 형태의 퍼지 논리 시스템은 보편적 근사기임을 알 수 있으며, 콤팩트(compact)입력 공간에서 어떤 정도의 정확성에 대하여 모든 비선형 함수를 균일하게 근사화 할 수 있다.

## III. 독립진자의 적응퍼지 제어기 설계

독립진자의 운동방정식을 행렬 벡터 표기로 표시하면 다음과 같다.

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (6)$$

여기서,  $M$ 은 관성,  $N$ 은 원심력,  $G$ 는 중력을 각각 나타내는 벡터이다. 한편,  $M(q)$ 가 양한정(positive definite)이므로, 식 (7)과 같이 표현할 수 있다.

$$M(q)\ddot{q} + d(q, \dot{q}) = \tau \quad (7)$$

여기서,  $d(q, \dot{q}) = N(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$ 이다. 식 (7)을 토크  $\tau$  를 가진 시스템의 입출력 동적 모델로써 생각할 수 있으며,  $d$ 는 중력, 마찰력, 원심력을 포함하는 외란 토크로 고려할 수 있다.

식 (8)과 같은 여과된 추적 오차(filtered tracking error)를 정의하자.

$$e(t) = q - \hat{q}, \quad (8)$$

여기서,  $\hat{q}_d = k_1(q - q_d) - k_2 \int (q - q_d)$ 이며  $q_d$ 는 기준이 되는 변위 벡터이다. 식 (7)과 식 (8)로부터

$$M_1 \ddot{e}(t) = M(q)\ddot{q} - M(q)\ddot{q}_r - \Delta M(q)\ddot{e} \quad (9)$$

$$= -d(q, \dot{q}) - M(q)\ddot{q}_r + \tau - \Delta M(q)\ddot{e} = f + \tau$$

여기서,  $f = -d(q, \dot{q}) - M(q)\ddot{q}_r - \Delta M(q)\ddot{e}$ 는 비선형 함수이며,  $M(q)$ 는 항상 양수인 시변 유효관성이므로 기준경로가 주어지면 항상 최소한계값  $M_1$ 이 존재한다. 즉  $0 \leq M_1 \leq M(q)$ ,  $M(q) = M_1 + \Delta M(q)$ 이다.

유효관성  $M(q)$ 를 정확히 알 수 있다면 최적제어를 쉽게 설계할 수 있다. 그러나, 실질적으로  $f$ 의 정확한 값을 얻기가 어렵기 때문에, 본 논문에서는 식 (4)와 같은 형태의 퍼지논리 시스템  $\gamma(q/\varphi)$ 로 대체하여, 식 (10)과 같은 적응퍼지 제어기(adaptive fuzzy controller)를 제안하였다.

$$\tau = -\gamma(q/\varphi) - k_3 \dot{e}(t) \quad (10)$$

여기서,  $k_3 \dot{e}(t)$ 는 Lyapunov함수의 미분값  $\dot{v}_i$ 를 더 큰 음수로 만들기 위해 고려되었다.

식 (10)을 식 (9)에 대입하면

$$M_1 \ddot{e}(t) = f - \gamma(q/\varphi) - k_3 \dot{e}(t) \quad (11)$$

다음과 같은 최소 근사 오차(minimum approximation error)  $w$ 를 정의하자.

$$w = f - \gamma(q/\varphi^*) \quad (12)$$

여기서,  $\varphi^*$ 는 퍼지 논리 시스템의 최적 변수 벡터이다. 그러면,

$$M_1 \ddot{e}(t) = -k_3 \dot{e}(t) + \gamma(q/\varphi^*) - \gamma(q/\varphi) + w \quad (13)$$

만일  $\gamma$ 를 식 (4)와 같은 형태의 퍼지논리 시스템으로 고려하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M_1 \ddot{e}(t) = -k_3 \dot{e}(t) + \phi^T \xi(q) + w \quad (14)$$

여기서,  $\phi = \varphi^* - \varphi$ , 그리고  $\xi(q)$ 는 식 (5)와 같은 퍼지 기저함수이다. 안정도 해석을 위하여 다음과 같은 Lyapunov 함수를 고려하면,

$$v = \frac{1}{2} M_1 \dot{e}^2 + \frac{1}{2} r \phi^T \phi \quad (15)$$

$e$ 는 식 (8)이며,  $r$ 은 양의 상수이다. 따라서,  $v$ 를 미분하면,

$$\begin{aligned} \dot{v} &= M_1 \dot{e} \ddot{e} + \frac{1}{r} \phi^T \dot{\phi} \\ &= \dot{e} [-k_3 \dot{e}(t) + \phi^T \xi(q) + w] - \frac{1}{r} \phi^T \dot{\phi} \quad (16) \end{aligned}$$

$$= -k_3 \dot{e}^2(t) + \frac{1}{r} \phi^T [r \dot{e}(t) \xi(q) - \dot{\phi}] + \dot{e}(t)w$$

$\dot{e}(t)w$ 는 최소 근사 오차이며, 보편적 근사 정리에 의해  $w$ 는 매우 작은 값이 됨을 알 수 있다. 그러면, 적응법칙을 다음과 같이 취하자.

$$\dot{\varphi} = r e \xi(q) \quad (17)$$

그러면, 아래 식을 항상 만족하는 양의 상수  $k_3$ 를 찾을 수 있다.

$$\dot{v} < 0 \quad (18)$$

Babalat의 정리[4]를 사용하면,  $v$ 가 영으로 수렴함을 알 수 있다. 식 (8)로부터  $v$ 가 영(zero)으로 수렴하면 위치 추종 오차  $e$ 도 영으로 수렴하게 된다. 그래서 시스템은 점근적으로 안정하게 된다. 전체적인 점근적 안정함(global asymptotic stability)을 보이기 위하여 식 (7)과 같은 시스템에서 Lyapunov 함수  $v$ 를 고려하면  $v > 0$  과  $\dot{v} < 0$  임을 알 수 있다. 따라서 시스템은 적응퍼지 제어기로 전체적으로 점근 안정하게 된다.

#### IV. 시뮬레이션 및 실험

3 절에서 제안한 적응 퍼지 제어기의 타당성을 검증하기 위해 제어대상으로 도립 진자에 적용하였다. 본 논문에서는 도립 진자의 수직각과 제로 위치를 고려하였으며, 기준 궤적 경로를 추적하기 위하여 도립 진자의 동적 방정식을 Matlab 명령어 "ode45"를 사용하여 1ms 샘플링 주기로 시뮬레이션을 하였다. 실험에 사용되어진 변수 값은 다음과 같다.

- \*\* Parameters of the pendulum-cart set-up
- Track limits :  $\pm 0.5m$
- Gravity :  $9.81 m/s^2$
- Distance between mass center and axis of rotation :  $0.017m$
- Mass of cart :  $1.12 kg$
- Magnitude of control force :  $17.0 N$
- Moment of inertia of system :  $0.0136 kgm^2$
- Friction coefficient of pole rotation: negligible
- Friction coefficient of cart :  $0.05Ns/m$

도립 진자 시스템의 진자와 활차 장치에 있는 센서들은 컨버터와의 연결을 통해 활차 위치와 진자의 각을 두 개의 광학 encoder를 사용하여 검출한다. 본 논문에서 제안하는 적응퍼지 제어를 이용한 실험에 의해 그림 4. 는 약 12초 후에 진자각이 기준위치를 추종해 감을 볼 수 있으며, 또한 17초 후부터 활차도 기준위치로 추종함을 보여주었다. 실험 결과를 확인함으로써 본 논

문에서 제안하는 제어기의 타당성을 확인 할 수 있었다.

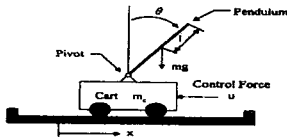


그림.1. 독립진자 시스템

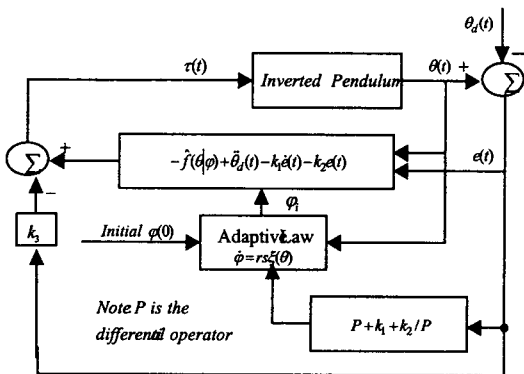
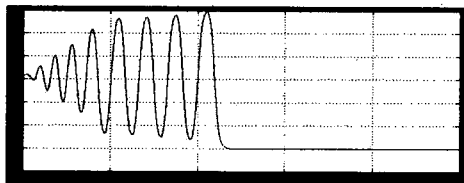
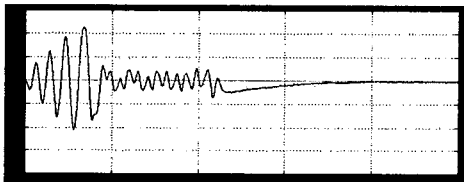


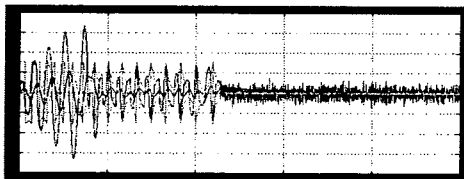
그림.2. 적응퍼지 제어기



Angle Position

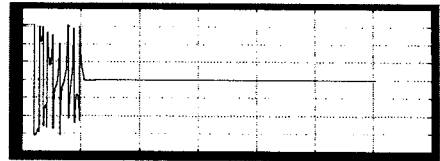


Cart Position & Desired Position

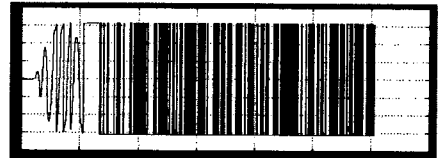


Error

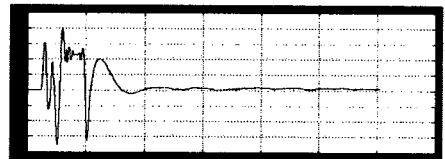
그림.3. 제안된 제어기의 모의실험 결과



Angle-up Position



Angle-down Position



Cart Position

그림.4. 제안된 제어기의 실험 결과

## V. 결론

본 논문에서는 구조적인 불안정성 및 비선형성을 지닌 독립진자 시스템에 적응퍼지 제어기를 제안하였다. 적응제어 개념은 불확실한 파라미터로 구성된 시스템의 적응 능력을 개선하였으며, 외란에도 강인함을 보였다. 제안된 제어기는 시스템의 정확한 수학적 모델을 요구하지 않으며 적분항을 포함시킴으로써 정상 상태에서의 오차를 줄일 수 있으며 개환 미분항을 고려함으로써 Lyapunov 함수의 일차 미분값이 확실히 음의 부호를 갖게 하여, 결과적으로 점근적으로 안정됨을 보여주었고, 시뮬레이션과 실험을 통해 제안된 적응퍼지 제어기의 효율성을 보였다.

### [참 고 문 헌]

- [1] L.X.Wang, and J.M.Mendel, "Fuzzy Basis Functions, Universal Approximation, Orthogonal Least Squares Learning," IEEE Trans. Neural Networks, Vol.3, pp. 807-814, 1992
- [2] L.X.Wang, *Adaptive Fuzzy systems and control : Design and Stability Analysis*, Prentice-Hall, 1994
- [3] Sasty, S. and M.Bodson, *Adaptive Control : Stability, Convergence, and Robustness*, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1989
- [4] J.J.E.Slotine and W.Li, *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1991