

기동표적에 대한 슬라이딩 모드 유도법칙을 이용한 미사일 강인유도

이점효, 김경중, 김은태, 박민용
연세대 전기전자공학과

전화 : 02-2123-2868 / 핸드폰 : 017-610-3635

Robust Guidance of Missile Against Maneuvering Target Based on Sliding-Mode Guidance Law

Jeom-Hyo Lee, Kyung-Jung Kim, Eun-Tai Kim, Mignon Park
ICS Lab., Dept. of Electrical and Electronic Engr., Yonsei University
E-mail : weaponlee@hanmir.com

Abstract

The optimal guidance has advantages of accuracy and economic energy consumption but it is difficult to implement due to its dependence on the target information such as the relative range, the relative velocity and the acceleration of target. This paper uses optimal guidance and sliding-mode guidance to obtain a new guidance method. The suggested method shows robustness against target maneuvers, good dynamic performance, energy saving of missile and terminal accuracy. Its effectiveness is demonstrated by the simulation results.

능을 모의실험을 통해 검증하였다.

II. 유도법칙 모델식

2차원에서의 미사일과 목표물간의 교전 기하학은 그림 1.과 같다.

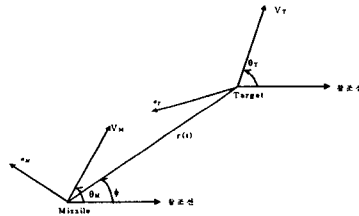


그림 1. 미사일과 목표물간의 교전 기하학

그림의 미사일과 목표물간의 운동 방정식을 표현하면 다음과 같다[2,3].

$$\dot{r}(t) = V_T \cos(\phi - \theta_T) - V_M \cos(\phi - \theta_M) \quad (1)$$

$$r(t)\dot{\phi} = -V_T \sin(\phi - \theta_T) + V_M \sin(\phi - \theta_M) \quad (2)$$

여기서, $r(t)$: 목표물과 미사일간의 상대거리

ϕ : 조준선과 참조선 사이의 각

$\dot{\phi}$: 조준선과 참조선 사이의 각속도

$V_r = \dot{r}(t)$ 와 $V_\phi = r(t)\dot{\phi}$ 을 식(1)과 식(2)에 각각 대입 후 시간에 대해 미분하면

$$\begin{aligned} \dot{V}_r = & \dot{\phi}[-V_T \sin(\phi - \theta_T) + V_M \sin(\phi - \theta_M)] + \\ & [V_T \cos(\phi - \theta_T) + V_T \dot{\theta}_T \sin(\phi - \theta_T)] - \\ & [V_M \cos(\phi - \theta_M) + V_M \dot{\theta}_M \sin(\phi - \theta_M)] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_\phi = & -\dot{\phi}[V_T \cos(\phi - \theta_T) - V_M \cos(\phi - \theta_M)] + \\ & [V_T \dot{\theta}_T \cos(\phi - \theta_T) - \dot{V}_T \sin(\phi - \theta_T)] - \\ & [V_M \dot{\theta}_M \cos(\phi - \theta_M) - \dot{V}_M \sin(\phi - \theta_M)] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,

$$\omega_r = \dot{V}_r \cos(\phi - \theta_T) + V_T \dot{\theta}_T \sin(\phi - \theta_T) \quad (5)$$

I. 서론

비례항법 법칙은 미사일의 발사 침로를 조준선 각속도에 비례적으로 조절함으로써 기동하지 않는 목표물에 대해 조준선 각속도를 0으로 만드는 것이다. 비록 비례 항법이 장거리의 교전 기하학에서는 성능이 좋을지라도 목표물이 고속으로 기동하거나 미사일의 발사각이 클 경우는 성능이 감소한다. 최적 유도법칙은 제한구조 형태의 해를 얻기 위해서 선형 2차 최적제어 이론으로부터 유도되었고 고속으로 기동하는 목표물의 시나리오에 대처하기 위해서 목표물의 기동을 고려하였다. 하지만 시스템의 불확실성 즉, 상대적인 거리와 속도 및 목표물 가속도에 대한 의존성 때문에 성능은 우수하지 못했다. 슬라이딩 모드 제어는 변수의 변화와 외부외란에 대해 강인하여 유도법칙 설계시 많이 이용되었다[4].

본 논문에서는 최적 유도법칙과 슬라이딩 모드 유도법칙을 이용하여 새로운 유도법칙을 제안하며 제안된 유도법칙은 외부 외란과 변수 변화에 강인하여 기동하는 목표물에 대한 강인성과 종말단계에서의 정확한 명중률등 우수한 동적 성

$$u_r = \dot{V}_M \cos(\phi - \theta_M) + V_M \dot{\theta}_M \sin(\phi - \theta_M) \quad (6)$$

$$\omega_\phi = V_r \dot{\theta}_r \cos(\phi - \theta_r) - \dot{V}_r \sin(\phi - \theta_r) \quad (7)$$

$$u_\phi = V_M \dot{\theta}_M \cos(\phi - \theta_M) - \dot{V}_M \sin(\phi - \theta_M) \quad (8)$$

로 놓고 식(5)에서 (8)까지를 식(3)과 식(4)에 대입 후 식(1)과 (2)를 고려하면

$$\dot{V}_r = \frac{V_\phi^2}{r(t)} + \omega_r - u_r \quad (9)$$

$$\dot{V}_\phi = -\frac{V_r \cdot V_\phi}{r(t)} + \omega_\phi - u_\phi \quad (10)$$

$$\dot{V}_\phi = -V_r V_\phi / r(t) + \omega_\phi - u_\phi$$

$$\dot{r}(t)\dot{\phi} + r(t)\dot{\phi} = -r(t)r(t)\dot{\phi}/r(t) + \omega_\phi + u_\phi$$

$$\Rightarrow r(t)\dot{\phi} = -2r(t)\dot{\phi} + \omega_\phi + u_\phi$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = -2r(t)\dot{\phi}/r(t) + \frac{1}{r(t)}\omega_\phi - \frac{1}{r(t)}u_\phi \quad (11)$$

미사일의 가속도는 미사일 속도의 크기 변화를 \dot{V}_M 과 미사일 속도의 회전을 $\dot{\theta}_M$ 에 의해 유도될 수 있으며 그림2와 같이 조준선에 대한 수직 및 수평 방향의 구성 성분으로 각각 표현될 수 있다. 그림 2를 참조하면 식(6)의 두 개의 항목은 조준선의 수평 방향의 구성 요소이며 식(8)의 두 개의 항목은 조준선의 수직 방향의 구성 요소임을 알 수 있다. 따라서, u_r , u_ϕ 는 각각 조준선의 수평, 수직 방향의 미사일 가속도의 구성 요소임을 알 수 있다. 미사일의 경우와 마찬가지로 ω_r , ω_ϕ 도 각각 조준선의 수평, 수직방향의 목표물의 가속도의 구성 요소임을 쉽게 알 수 있다.

$x = \dot{\phi}$ 이라고 두면 식(11)은 다음과 같이 변환된다.

$$\dot{x} = -2\dot{r}(t)x/r(t) + \omega_\phi/r(t) - u_\phi/r(t) \quad (12)$$

식(12)에서 조준선의 수직성분의 미사일 가속도 u_ϕ 를 제어변수(control variable)로 보고 조준선의 수직성분의 목표물 가속도 ω_ϕ 를 외란변수(disturbance variable)로 볼 수 있다.

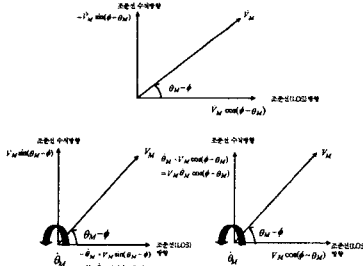


그림 2. 미사일 가속도의 구성성분

III. 최적 유도법칙

$A(t) = -2\dot{r}(t)/r(t)$ 와 $B(t) = -1/r(t)$ 및 $u = u_\phi$ 로 두고 $\omega_\phi = 0$ 이라고 가정하면 식(12)는 다음과 같이 다

시 쓸 수 있다.

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (13)$$

식(13)의 최적의 해를 구하기 위해 다음의 2차 가격함수 J 를 정의한다.

$$J(u) = cx(t_f)^2 + \int_{t_0}^{t_f} [Q(t)x^2 + R(t)u^2] dt \quad (14)$$

여기서 $Q(t) \geq 0$, $R(t) > 0$, $c =$ 상수 (> 0) 는 가중 인자이다. 가격함수 $J(u)$ 를 최소화하는 최적제어는

$$u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x \quad (15)$$

여기서, $K(t)$ 는 Riccati equation 을 만족하므로

$$\dot{K}(t) + 2A(t)K(t) - R^{-1}B^T(t)K(t)^2 + Q(t) = 0 \quad (16)$$

$$K(t_f) = c \rightarrow \infty \quad (17)$$

$$\psi(t) = K^{-1}(t) \quad (18)$$

라고 놓으면, 식(16)와 (17)는 다음과 같이 변환된다.

$$\dot{\psi}(t) - 2A(t)\psi(t) + R^{-1}(t)B^2(t) - Q(t)\psi^2(t) = 0 \quad (19)$$

$$\psi(t) = K^{-1}(t) \quad (20)$$

$Q(t) = 0$ 이라고 두면 식(19)은 시간에 따라 변하는 변수를 가진 시변 미분방정식이 된다.

$$\dot{\psi}(t) - 2A(t)\psi(t) + R^{-1}(t)B^2(t) = 0 \quad (21)$$

식(20)의 최종값 조건을 고려하면 식(21)의 해는

$$\psi(t) = e^{\int_{t_0}^t 2A(\tau)d\tau} \cdot \left[\int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\tau} 2A(\tau_1)d\tau_1} R^{-1}(\tau_1)B^2(\tau_1)d\tau_1 \right] \quad (22)$$

$A(t) = -2\dot{r}(t)/r(t)$, $B(t) = -1/r(t)$ 로 놓고 식(22)에 대입하면

$$\psi(t) = \frac{1}{r^4(t)} \left[\int_{t_0}^t r^{-1}(\tau_1) \frac{r^2(\tau_1)}{r(\tau_1)} d\tau_1 \right] \quad (23)$$

미사일과 목표물간의 상대거리는 계속 가까워지므로 $\dot{r}(t)$ 는 음수인 것을 고려하면,

$$R(t) = -1/\dot{r}(t) \quad (24)$$

로 놓으면 식(23)은 다음과 같이 변환될 수 있다.

$$\psi(t) = \frac{1}{3r^4(t)} [r^3(t) - r^3(t_f)] \quad (25)$$

식(25), (18), (24)와 $B(t) = -1/r(t)$ 를 식(15)에 대입하면 최적제어 법칙을 얻을 수 있다.

$$u(t) = -R^{-1}(t)B(t)K(t)x = -\frac{3r^3(t)\dot{r}(t)}{[r^3(t) - r^3(t_f)]} \cdot x = \frac{3r^3(t)\dot{r}(t)}{r^3(t_f) - r^3(t)} \cdot x = N(t) \cdot x \quad (26)$$

IV. 슬라이딩 모드 유도법칙

3장에서 목표물의 기동 ω_ϕ 는 0으로 가정했으므로 기동하는 목표물을 추적할 때에는 최적 유도법칙은 조준선의 각속도를 0으로 유지할 수 없다. 이러한 결점을 보완하기 위해서 슬라이딩 모드 제어이론을 이용하여 새로운 유도방법을 만들 수 있다. 조준선의 각속도를 0으로 만들기 위해서 슬라이딩 면은 다음과 같이 선정할 수 있다.

$$s(x, t) = x - \dot{\phi}(t) = 0 \quad (27)$$

식 (26)와 $A(t)$ 와 $B(t)$ 의 정의를 식 (13)에 대입하면 슬라이딩 면 외부의 최적 운동을 얻을 수 있다.

$$\dot{x} = \left[-\frac{2\dot{r}(t)}{r(t)} - \frac{N(t)}{r(t)} \right] \cdot x \quad (28)$$

$$\dot{s} = -G(t)s - k(t)\text{sgn}(s) \quad (29)$$

여기서

$$G(t) = \frac{2\dot{r}(t)}{r(t)} + \frac{N(t)}{r(t)}, \quad k(t) = \frac{\varepsilon}{r(t)}, \quad \varepsilon = \text{상수} > 0 \text{ 이다.}$$

식 (27)와 식 (13)을 식 (29)에 대입하면 최적 슬라이딩 유도법칙을 얻을 수 있다.

$$-\frac{2\dot{r}(t)}{r(t)}x - \frac{1}{r(t)}u = -\frac{2\dot{r}(t)}{r(t)}x - \frac{N(t)}{r(t)}x - \frac{\varepsilon}{r(t)}\text{sgn}(s) \\ u = N(t)x + \varepsilon \text{sgn}(x) \quad (30)$$

여기서 $N(t) = \frac{3r^3(t) \cdot \dot{r}(t)}{r^3(t_f) - r^3(t)}$ 이다. (31)

정리 1.

Guidance model 식(12)는 제어기 식(30)으로 제어할 때 기동하는 목표물에 대해서 강인하고 상태변수 x 는 0으로 수렴한다.

(중명)

Lyapunov의 안정성 이론에 의해 후보함수를

$V = \frac{1}{2}x^2$ 이라고 놓자. 그러면 식(12)는 식(32)과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)u + D(t)f \quad (32)$$

여기서,

$$A(t) = -\frac{2\dot{r}(t)}{r(t)}, \quad B(t) = -\frac{1}{r(t)}, \quad D(t) = \frac{1}{r(t)}, \quad u = u_\phi, \quad f = \omega_\phi$$

이다. 후보함수 V 를 시간에 대해 미분하고 식 (32)를 고려하면 식 (33)이 된다.

$$\dot{V} = x \cdot \dot{x} = x \cdot \left[-\frac{2\dot{r}(t)}{r(t)}x - \frac{u}{r(t)} + \frac{f}{r(t)} \right] \quad (33)$$

식 (30)을 식 (33)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\dot{V} = x \cdot \left[-\frac{2\dot{r}(t)}{r(t)}x - \left\{ \frac{N(t)x + \varepsilon \text{sgn} x}{r(t)} \right\} + \frac{f}{r(t)} \right] \\ = -G(t)x^2 - \frac{(\varepsilon \text{sgn} x - f)}{r(t)} \cdot x \quad (34)$$

식 (31)을 $G(t)$ 를 정의한 방정식에 대입후 $\dot{r}(t) < 0$ 와 $\dot{r}(t) > 0$ 를 고려하면 식 (35)이 된다.

$$G(t) = \frac{\dot{r}(t)[2r^3(t_f) + r^3(t)]}{r(t)[r^3(t_f) - r^3(t)]} > 0 \quad (35)$$

여기서 $r(t)$ 는 목표물과 미사일간의 상대거리 이므로 $r(t) > r(t_f)$ 이므로 식 (35)가 성립한다. 따라서, 식 (34)의 첫번째 항목이 음수이며, $\varepsilon > |f|$ 가 만족하면 두번째 항목도 음수이다. 그러므로 $\dot{V} < 0$ 이다. 실제 상황의 유도 문제에서 식(30)에 있는 sign 함수 $\text{sgn}x$ 는 채터링(chattering)을 없애

기 위해 함수 $\text{sat}(\frac{s}{\Phi})$ 로 대체하여 사용하고 유도 법칙은 식 (36)과 같이 쓸 수 있다.

$$u = \frac{3r^3(t) \cdot \dot{r}(t)}{r^3(t_f) - r^3(t)}x + \varepsilon \cdot \text{sat}\left(\frac{s}{\Phi}\right) \quad (36)$$

전체 유도 시간에서 $\dot{r}(t)$ 의 변화 값은 크지 않다. 사실상 슬라이딩 모드 제어 시스템은 변수 변화에 대해 강인하므로 $\dot{r}(t)$ 는 온라인으로 추정할 필요가 없고 $\dot{r}(t) = \hat{\dot{r}}(0)$ 상수로 가정할 수 있다. 여기서 $\hat{\dot{r}}(0)$ 은 유도 초기 어느 한 순간에서의 $\dot{r}(t)$ 의 추정치이다[4]. 식(36)으로부터 $t \rightarrow t_f$ 일때 $r(t) \rightarrow r(t_f)$ 와 $N(t) \rightarrow \infty$ 가 된다. 대부분의 유도기간에서 $r(t) \gg r(t_f)$ 이므로 $N(t) \approx -3\dot{r}(t)$ 이다.

특히 $r(t_f)$ 가 0으로 수렴하면 $N(t)$ 는 $-3\dot{r}(t)$ 로 수렴하는데 이것은 $N(t)$ 가 비례항법의 비율을 나타내는 것을 의미한다. 실제 상황에서는 $r(t_f)$ 를 실시간으로 계산하기가 어렵기 때문에 일반적으로 $N(t) = -3\dot{r}(t)$ 라는 값이 수용가능하다[4].

$$u = -3\hat{\dot{r}}(0)x + \varepsilon \cdot \text{sat}\left(\frac{s}{\Phi}\right) \quad (37)$$

V. 실험결과 및 고찰

시뮬레이션을 위한 데이터는 표1.과 같으며 목표물의 기동은 미사일 발사후 2초후에 기동한다고 가정한다.

표 1. 시뮬레이션을 위한 데이터

구분	데이
$r(0)$	$r(0) = 60 \text{ Km}$
V_T	$V_T = 0.497 \text{ Km/s}$ (마 하 1.5)
θ_T	$\theta_T = \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$
V_M	$V_M = 0.663 \text{ Km/s}$ (마 하 2)
ε	100
Φ	10^{-4}
$\hat{\dot{r}}(0)$	$\hat{\dot{r}}(0) = 10 \text{ Km/s}$
$\phi(0)$	$\phi(0) = 1^\circ$
$\dot{\phi}(0)$	$\dot{\phi}(0) = -0.1^\circ$

제한된 유도법칙을 이용하여 조준선의 각속도의 변화를 나타내면 그림 3과 같다.

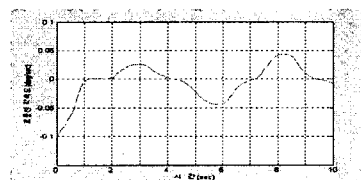


그림 3. 제한된 유도법칙의 조준선 각속도의 변화

처음 2초 동안 조준선 각속도는 0에 빠르게 도달하고 오버슈트도 생기지 않는다. 하지만 목표물이 2초 후에 회피기동을 시작한 후에는 약간의 오버슈트가 발생한다. 하지만 $\text{sgn}(s)$ 함수를 연속적인 스위칭 함수 $\text{sat}(s/\Phi)$ 로 대체했기 때문에 조준선의 각속도는 0 부근에 제한된다. 이것은 종말 유도단계에서 미사일이 목표물을 명중시킬 수 있다는 것을 의미한다.

비례항법과의 비교를 위해 그림 4에서는 같은 조건하에서 비례항법의 조준선 각속도의 변화를 알아 보았다.

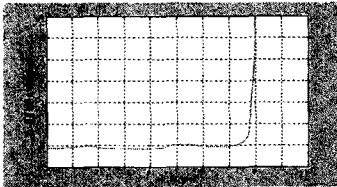


그림 4. 비례항법의 조준선 각속도의 변화

그림 4를 보면 목표물이 기동을 시작한 후에는 조준선 각속도가 빠르게 발산하는 것을 볼 수 있다. 이것은 종말유도의 정확성에 나쁜 영향을 미친다. 따라서 최종명중거리오차(Miss Distance)도 크게 나타날 것이다.

그림 5과 6는 제안된 유도법칙의 유도명령과 비례항법의 유도명령이 각각 나타나 있다.

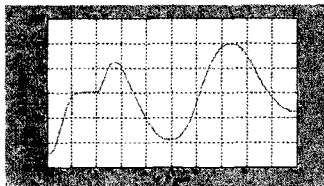


그림 5. 제안된 유도법칙의 유도명령 변화

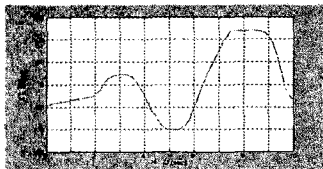


그림 6. 비례항법의 유도명령 변화

위 두 그림을 비교해보면 제안된 유도법칙은 목표물이 기동하는 동안에 미사일의 가속도를 어느 범위에 제한하지 않지만 비례항법은 미사일이 목표물에 근접할수록 미사일 가속도를 제한한다. 따라서 제안된 유도법칙은 목표물이 기동하더라도 조준선 각속도를 제한하는 능력이 있지만, 비례항법 유도법칙은 이러한 능력이 없어 조준선 각속도를 발산하게 한다.

다음으로 목표물이 유도 과정 초기부터 기동하는 경우를 생각해본다. 이것은 유도하는 전 기간

동안 외란 f 가 존재한다는 것을 의미한다. 이 경우의 조준선의 각속도의 변화는 그림 6과 같다.

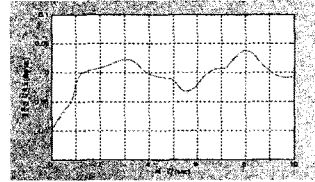


그림 7. 표적이 유도 초기부터 회피 기동시 조준선 각속도의 변화

그림 3과 비교해보면 외란이 전과정 동안 존재하는 조건 하에서 슬라이딩 경계면 $s=0$ 에 접근하는 x 의 운동은 외란이 없는 조건 하에서의 운동과 거의 일치한다. 이것은 스위칭 함수가 외란의 영향을 제거한 것을 의미한다. 목표물의 기동이 유도되는 전 기간 동안 지속되더라도 x 는 0 근처에 항상 제한된다. 0부근에서의 범위의 크기는 매우 작기 때문에 종말 단계에서의 유도의 정확성을 확신할 수 있다.

VI. 결 론

본 논문에서는 기동하는 표적을 추적하기 위해 슬라이딩 모드 유도법칙과 최적제어 유도법칙을 이용하여 목표물의 기동에 대해 강인하고 종말단계에서 정확하게 유도되는 새로운 유도법칙을 도출하였다. 도출한 유도법칙의 기동하는 목표물에 대한 강인성과 종말단계에서의 유도정확성을 컴퓨터를 이용한 모의실험을 통해 그 효용성을 확인하였다.

[References]

- [1]Brierley S. D., R.Longchamp, "Application of Sliding-Mode Control to Air-Air Interception Problem," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES 26, No.2, pp. 306-325, 1990.
- [2]Babu K. R., I. G. Sarma, and K. N. Swam "Two Robust Homing Missile Guidance Laws Based On Sliding Mode Control Theory, Indian Institute of science, Bangalore-560 012, India.
- [3]Babu K. R., I. G. Sarma, and K. N. Swamy, "Switched Bias Proportional Navigation for Homing Guidance against Highly Maneuvering Target" ,Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.17, No.6, pp. 1357-1363,1994.
- [4]Zhou D., C, D. Mu, and W. L. Xu "Adaptive Sliding-Mode Guidance of a Homing Missile", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.22, No.4, pp. 589-594, 1999.