

**비최소 위상이 있는 시스템에서 CDM을 사용하여 PID제어기 동조
송재훈, 서병설**
한양대학교 전기공학과
 전화:02-2290-0364 / 핸드폰:016-282-8210

**PID CONTROLLER TUNING USING CDM WITH SYSTEM INCLUDING
NONMINIMUM PHASE**
Jae-Hun Song, Byung-Suhl Suh
Dept. of Electrical Engineering, Hanyang University
Tel.02-2290-0364

Abstract

This paper proposes the new PID controller tuning Method for nonminimum phase plant by using CDM. The proposed method effectively handles with the problem of overshoot in the nonminimum phase plant occurring by the previous Z-N method and it proposes the PID controller tuning method with CDM, when failing to find critical gain in PID controller tuning using Z-N method

1. 서론

현재 제어 기술자들의 주요 관심사는 복잡한 시스템에 대해서 시스템의 응답이 설계사양을 만족하고 안정도를 보장할 수 있는 제어를 설계하는 것이다. 이런 설계 방법으로서 최근에는 LQG-LTR[1], H_∞ [2][3]설계 방법과 같은 강인성을 보장할 수 있는 설계 방법이 연구되어 왔다. 이에 관한 연구로서, grumble[4]는 H_∞ 설계 방법으로 PID제어기 설계를 시도 하였으며, Suh[5][15], He[6] 등은 LQR방법으로 강인성을 보장하는 PID제어기의 설계를 제안 하였다. 그러나, 이 설계 방법은 수학적으로 난해하고, 복잡한 제어 이론이 요구 되어 실용적인 면에서 상당한 제한을 가지고 있다. 또한, 제어기 구조가 복잡하여 구현하기 힘들거나, 플랜트의 차수가 제한적인 문제점을 가지고 있으므로,

Ziegler-Nichols (Z-N)[7]동조규칙에 의한 PID제어기 설계가 아직까지 산업계에서 널리 사용되고 있다. 그러나, PID동조 방법이 고도의 수행능력을 요구하는 시스템에서는 만족하지 못하는 결과를 초래하며[8][11][15] 특히, 비최소 위상 플랜트를 갖는 시스템에서는 더욱 큰 문제를 일으킨다. 시간지연이 작은 시스템 즉, 비최소 위상이 작은 시스템에서 초차 단위 계단 입력의 응답에 있어서 overshoot 가 크게 일어나는 문제점이 발생 된다.

이러한 문제를 개선하는 연구로서 Hang[9]등은 Z-N의 PID제어기 동조방법 중 PID파라미터의 비례성분에 weighting factor (β)을 첨가하여 시간영역에서 설계사양인 오버슈트를 조절하는 방법(Refinement Ziegler-Nichols)으로, 비최소 위상값(dead-time)이 작을 때는 Z-N방법의 PID제어기 동조를 했을 때 보다 단위 응답 오버슈

트를 감소 시켰지만 비최소 위상값(dead-time)이 클 때는 오히려, 시간영역에서 오버슈트가 Z-N방법으로 동조했을 때 보다 커진다는 문제점을 초래 하였다. 이러한 문제점을 해결 하고자, 본 논문은 비최소 위상

(dead-time)값의 크기에 관계없이 단위응답 오버슈트를 줄이기 위해 Manabe[10]가 제시한 CDM(coefficient diagram method)표준형을 이용하여 PID제어기 설계방법을 제시 한다. 본 논문에서 적용한 CDM을 이용하여 PID제어기를 설계하면, 비최소 위상값의 크기에 관계없이 PID제어기 파라미터들은 CDM표준형에 의해 시정수가 매개변수로 나타나게 되므로 각각의 시정수에 따라 PID설계 파라미터들을 선정할 수 있다. 또한, Ziegler-Nichols(Z-N) 동조규칙은 최종주기를 알아야하기 때문에, 비감쇠 진동이 일어나지 않은 시스템에 대해서는 적용을 할 수 없다. 하지만, 본 논문에서 제안한 CDM을 이용한 PID동조방법은 임계진동이 일어나지 않은 시스템 대해서도 PID설계 파라미터를 선정할 수 있다.

2. CDM

CDM표준형[10]에 바탕을 둔 성능지수는 다음과 같다.
 [정 의] :

$$ISME = \int_0^{\infty} (\epsilon(t))^2 dt, \quad \epsilon(t) = y^*(t) - y(t)$$

여기서 $y^*(t)$ 는 설계자가 원하는 시스템의 출력형태이며, 동시에 성능 지수의 기준입력이다. 일반적인 성능 지수가 단위 계단 입력에 대한 오차를 최소화 하는데 반해, CDM표준형에서는 10%, 50%, 90%, 99%을 기준입력으로 ISME를 최소화하는 응답데이터를 지나는 함수를 구하는 것이다. 그림1에서 CDM블록다이어그램의 특성다항식은 식 (2-1)으로 정해진다.

$$\text{특성다항식 } P(s) = A(s)D(s) + B(s)N(s) \quad (2-1)$$

$$= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

에서, 안정지수와 시정수는 식(2-2)(2-3)으로 정의 되며,

$$(\text{안정지수}) r_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1} a_{i+1}}, \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad (2-2)$$

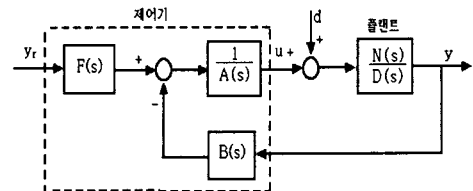


그림 1. CDM에서 블록다이어그램

$$(\text{시정수}) \tau = \frac{a_1}{a_0} \quad (2-3)$$

각각의 계수를 안정지수로 나타내면,

$$a_i = \frac{a_0 \tau^i}{r_{i-1} r_{i-2}^2 \dots r_{i-2}^2 r_{i-1}^2} \quad (2-4)$$

τ, a_0 를 변수로 하여 특성다항식 P(s)에서 각각의 계수를 시정수와 안정지수로 표현하여 다시 쓰면, 식(2-5)로 표현된다.

$$P(s) = a_0 \left[\prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{1}{r_{i-j}} \right) \right] + \tau s + 1 \quad (2-5)$$

(안정도 한정지수)

$$r_i = \frac{1}{r_{i-1}} + \frac{1}{r_{i+1}} \quad (2-6)$$

$i=1,2,\dots,n-2, \quad r_n = r_0 = \infty$

Routh-Hurwitz 판별식은 특성다항식의 안정도에 대한 필요조건이지만, 제어를 설계하는 데는 적절하지 않다. 그래서, CDM에서는 Lipatov[14]가 제시한 식(2-7)충분조건을 이용한다.

$$a_i > 1.1237 \left[\frac{a_{i-1}}{a_{i+1}} a_{i+2} + \frac{a_{i+1}}{a_{i-1}} a_{i-2} \right] \quad (2-7)$$

$$r_i > 1.1237 r_i^*, \quad i=2,3,\dots,(n-2)$$

즉, 식(2-7)을 만족하는 a_i 계수를 선택하는 것은 특성다항식 P(s)(식2-5)가 안정될 충분조건이다.

$$T_1(s) = \frac{a_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2-8)$$

$$T_2(s) = \frac{a_1 s + a_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2-9)$$

특성다항식의 계수가 안정지수 $[r_1 r_2 \dots r_{n-1} r_n] = [2.5 \ 2 \dots 2]$ 인 Manabe의 CDM 표준형인 식(2-8)(2-9)형인 페루프 전달함수를 고려하면 그림2는 차수에 관계없이 오버슈트가 발생하지 않고, 고차 일수록 느린 응답 곡선을 갖는 반면, 차수와 관계없이 거의 유사한 단위응답 곡선을 갖는다. 그림3에서는 영점이 있는 시스템으로서 40%까지 오버슈트가 생긴다.(참고문헌[12]참조)

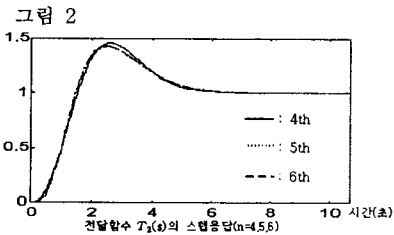
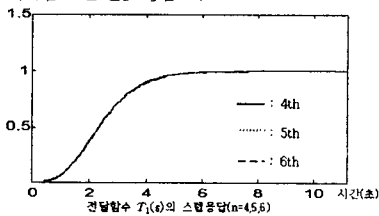


그림 3

정착시작; $(\tau_s) \quad \tau_s = (2.5-3) \tau \quad (2-10)$

정착시간은 식(2-10)로 주어진다. 그래서, 시정수 τ 를 지정하므로서 원하는 정착시간을 갖도록 설계할 수 있다.

제어기의 파라미터 각각들이 양수인 시정수(τ)을 매개 변수로 정해지며 동시에, PID제어기 파라미터들 각각이 양수이기 때문에 최소위상이나 비최소 위상에 관계없이 어떤 시스템에서도 CDM방법은 간단하면서도 로버스트한 제어를 설계할 수 있다. (참고문헌[10]참조)

본 논문은 위의 CDM의 성질을 이용하여, 플랜트가 비최소 위상을 가진 시스템에서 Z-N동조 규칙으로 제어를 설계한 것보다 CDM으로 제어를 설계한 것이 더 효율적으로 오버슈트를 조절할 수 있음을 보이고자 한다. 또한, 비감쇠진동이 일어나지 않은 시스템에서도 CDM을 이용하여 PID제어기 동조 규칙을 제안하고자 한다

3.비최소위상 시스템에 대한 CDM적용

CDM표준형 안정지수가 $[r_1 r_2 \dots r_{n-1} r_n] = [2.5 \ 2 \dots 2 \ 2]$)을 이용하여 비최소 위상을 가진 시스템에서 PID제어기를 설계하여 Ziegler-Nichols동조규칙과 비교하고자 한다.

플랜트가 $P_1(s) = \frac{K_m (-d_m s + 1)}{(\tau_m s + 1)(d_m s + 1)}$ 라 정해지면, 전달함수는 식 (3-1)로 나타나게 된다. 그림4에서처럼 PID제어를 피드백 시킨 전달함수는 식(3-1)정해진다.

$$N(s) = -d_m K_m D s^3 + (-d_m K_m P + K_m D) s^2 + (-d_m K_m I) s + K_m D$$

$$D(s) = (-d_m K_m I + \tau_m d_m) s^3 + (-d_m K_m P + K_m I + d_m \tau_m) s^2 + (-d_m K_m + K_m P + 1) s + K_m I$$

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3-1)$$

분모 D(s)을 Manabe 의해 제시된 CDM의 표준형 (안정지수가 $[r_1 r_2 r_3 \dots] = [2.5 \ 2 \ 2 \dots]$)인 식(2-2)-식(2-5)을 이용하여 정하면 분자도 정해져서, 전달함수 P(s)는 식(3-2)로 정해진다.

$$\text{단, } a_0 = 2(\tau_m + d_m) / [(0.08 \tau^2 / d_m) + 0.4 \tau^2 + d_m \tau + d_m^2]$$

$$\tau \text{는 시정수라 할 때,}$$

$$[(0.08 a_0 \tau^3 - T_m d_m) s^3 + (0.4 a_0 \tau^2 - (T_m + d_m)) s^2 + (a_0 \tau - 1) s + a_0] / [(0.08 \tau^3 s^3 + 0.4 a_0 \tau^2 s^2 + a_0 \tau s + a_0)] \quad (3-2)$$

식(3-2)과 식(3-1)을 같으므로 PID제어기 파라미

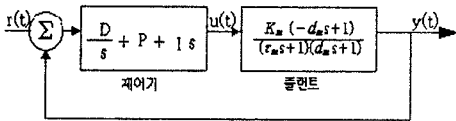


그림4.PID제어기 블럭다이어그램

터들을 구하면, 식(3-3)(3-4)(3-5)로 정해진다.

$$P = (a_0 \tau + d_m a_0 - 1) / K_m \quad (3-3)$$

$$I = a_0 / K_m \quad (3-4)$$

$$D = (\tau_m d_m - 0.08 a_0 \tau^2) / d_m K_m \quad (3-5)$$

식(3-2)(3-3)(3-4)처럼 제어기파라미터들이 시정수를 매개변수로 나타나며, 정착시간은 식(2-10)으로 정해지고,

오버슈트는 식(3-2) $P(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ 을 주파수 영역에서 시간영역으로 역변환하여 근사적인 오버슈트를 구하면

식 (3-5)와 같다.

$$a0 = \frac{2 \times (Tm + dm)}{((0.08/dm) \times \tau^3 + 0.4 \times \tau^2 + dm \times \tau + dm^2)}$$

$$N(\tau) = 5.68 - \frac{1.67}{a0\tau} - \frac{7.55(dm + Tm)}{a0\tau^2} - \frac{5.84Tm \cdot dm}{a0\tau^3}$$

$$D(\tau) = -1.42 - \frac{2.93}{a0\tau} - \frac{0.75(dm + Tm)}{a0\tau^2} + \frac{18.3(Tm \cdot dm)}{a0\tau^3}$$

$$k(\tau) = (3\pi/2 + \pi - \text{atan} \frac{N(\tau)}{D(\tau)}) / 2.05$$

오버슈트는 관계식(3-5)식과 같다

$$(-0.02 - \frac{2.93}{a0\tau} + \frac{5.47(dm + Tm)}{a0\tau^2} - \frac{10.3(Tm \cdot dm)}{a0\tau^3})$$

$$\times \exp(-1.89 k(\tau)) + [N(\tau)^2 + D(\tau)^2]^{(1/2)}$$

$$\times \exp[-1.53 k(\tau)] + 1 \quad (3-5)$$

시정수값에 따라 오버슈트값을 근사적으로 구할 수 있고, 그 시정수에 따라 정착시간을 알 수 있다.

또, Ziegler-Nichols방법으로 동조할때, 비감쇠 진동이 일어나지 않아, 주기를 알 수 없어 PID제어기 파라미터를 구할 수 없는 시스템, 즉, (그림5) 플랜트에 영점이 있는 경우에는 Ziegler

-Nichols동조규칙을 적용할 수 없다

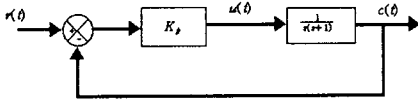


그림5

다시 말해서, 그림5에서, 이 플랜트는 Kp에 따라 근궤적을 그리면 허수축과 만나는 Kp (임계진동)값을 구할 수가 없다. 그러나, CDM표준형을 이용하여 PID제어기 설계 할 수 있다.

4. 예제

4-1. 예제

비최소 위상을 가진 시스템에서 CDM동조 $d_m=0.5, K_m=1, T_m=2$ 가지고 식 (3-2)(3-3)(3-4)에 대입하여 PID파라미터를 구해서 Ziegler-Nichols방법으로 동조한것과 비교하면, 그림7과 같다. (각가의 시정수는 1.5, 1.8, 2.1, 2.4)

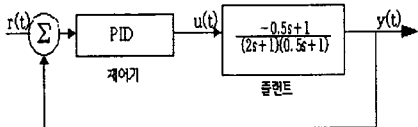


그림 6.비최소 위상을 가진 플랜트

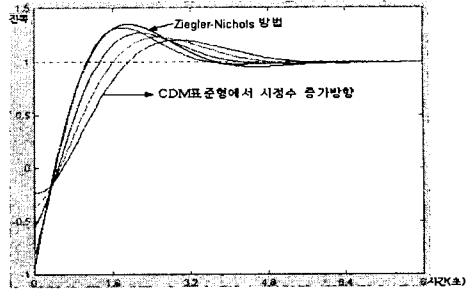


그림 7.단위응답곡선

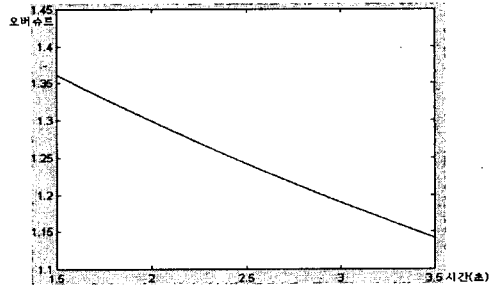


그림 8.시정수에 따른 오버슈트

비록, 근사식 (3-5)식을 근거하여 오버슈트가 시정수에 따라 나타내면 그림8과 같다

그림7의 오버슈트값과 그림8에서의 오버슈트값은 정확하계는 맞지 않지만 그래프상 시정수가 증가 할수록 오버슈트는 작아지고 정착시간은 커지는 것을 알 수 있다. 따라서 시정수에 따라 오버슈트를 조절할 수 있다

4-2. 예제2.

Ziegler-Nichols방법으로 동조할 때, 비례제어기만을 사용하였는데 출력이 진동하지는 않는 경우. 즉, 플랜트에 영점이 있는 경우에 있어서 CDM 표준형을 이용하여 PID제어기를 동조하고자 한다. 비감쇠 진동이 일어나지 않는 플랜트(그림10)에서

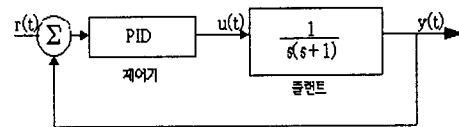


그림 10.임계진동이 일어나지 않는 시스템

페루프 전달함수를 구해서 식(3-1)과 식(3-2)에서 PID 파라미터를 정하면,

$$P = 12.5/\tau^2 \quad (4-1)$$

$$D = 5/\tau - 1 \quad (4-2)$$

$$I = 12.5/\tau^3 \quad (4-3)$$

으로 주어지고 시정수 (τ)따라 단위 응답곡선을 확인하면. 그림11과 같다.

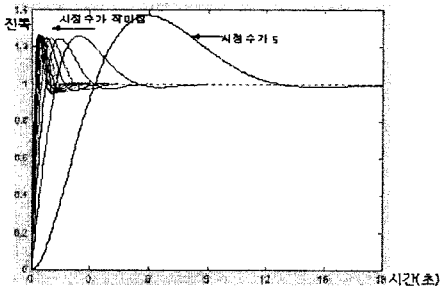


그림 11.시정수에따른 단위응답 곡선

5. 결론

본 논문은 비최소 위상을 가진 시스템에서 Z-N동조규칙보다 더 효율적으로 오버슈트를 조절할수 있을 뿐 아니라, 비최소 위상의 크기에 관계없이 오버슈트를 조절하기 위해 Manabe가 제시한 CDM을 이용하여 PID설계파라미터를 선정하는 방법을 제시하였다. 또한, Ziegler-Nichols동조규칙으로 제어를 설계할 때, 비감쇠 진동이 일어나지 않아 제어기 파라미터를 정할수 없는 시스템에 대하여 CDM을 이용하여 설계파라미터를 선정하므로써 시간영역의 설계사양을 효율적으로 만족시킬수 있었다.

[참 고 문 헌]

[1] J. Dolye and G. Stein, "Robustness with Observers", *IEEE Trans. on Auto. Control*, Vol. AC-24, No.4, pp. 607-611, 1979.

[2] G. Zames, "feedback and Optimal Sensitivity", *IEEE Trans. on Auto. Control*, Vol. AC-26, No.2, pp. 301-320.

[3] J. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar and B.A Francis, "state-space solution to standard H2 and H_{∞} control problems", *IEEE Trans on Auto. Control*, Vol.34, No8, pp. 831-847, Atlanta, June 1988

[4] M. Grimble, " H_{∞} controllers with a PID structure" *J. of Dynamic Syst. Meas. And control*, Vol 112, pp.325-336, 1990

[5] B. Suh and S.Yun, "LQ-servo Design," *Proceedings of The 4th Assia-Pacific conference on control & Measurement*, pp.97-100, 9-12, July, 2000

[6] HE jian-Bo, Qing-guo Wang and Tong -Heng Lee, "PI/PID controller tuning Via LQR Approach," *Proceedings of the 37th OIEEE Conference on Decision & control*, pp. 1177-1182, 1998

[7] Ziegler, J.G. and Nichols, N.B. "Optimum settings for automatic controller", *Trans ASME*, pp. 433-444, 1942

[8] C.C. Hang and K.K. Sin "A Comparative Performance Study of PID Auto-Tuners" *IEEE Control Systems*, Vol. 11, pp. 41-47, Aug. 1991

[9] C.C. Hang, K.J. Astrom, W.K. Ho "Refinement of Ziegler-Nichols tuning formula" *IEE Proceeding-D*, Vol.138, No.2, pp. 111-118, March 1991

[10] shunji Manabe, "Analytic Weigth Selection for LQ

Design" *ISAS*, pp. 23-24, July 1998

[11] W.K. Ho, O.P. Gan, Tay, and E.L. Ang "Performance and Phase Margins of Well-Known PID Tuning Formulas" *IEEE Control Systems*, Vol.4, pp. 473-477, July 1996

[12] 김신구 "A Generalization of Coefficient Diagram Method" *충북대학교 석사 논문* 2. 1998

[13] P. Cominos and N. Munro "PID controller: recent tuning methods and design to specification" *IEE Proc-control theory Appl.* Vol.149, No.1, 1.2002

[14] A.V. Lipatov and N.I. Sokolov "some sufficient conditions or stability and instability of conditions linear stationary systems" *Translated form Avtomatika I Telemekhanika*, No. pp.30-37. Moscow. september. 1978

[15] B. Suh, "robust Optimal Tuning of PID Regulator for A second Order System" *Proceeding of the 14th International Conference on System Science*, Wroclaw Poland, 11-14, pp.313-319, September, 2001