

블록형 최적화 기법에 의한 LQ-PID제어기의 오버슈트 설계방법

김대광, 서병설
 한양대학교 전기공학과
 전화:02-2290-0364

Overshoot design method of LQ-PID controller using convex optimization

Dae-Kwang Kim, Byung-Suhl Suh
 Dept. of Electrical Engineering, Hanyang University
 Tel. 02-2290-0364

Abstract

This paper proposes a method to select the overshoot design parameters of the LQ-PID controller by using convex optimization in order to satisfy the design specifications. The tuning parameters of LQ-PID controller are determined by the relationships between the design parameter to control both the overshoot and the settling time and the weighting factors Q and R in LQR.

1. 서론

최근에 이론적으로 정교한 제어기 설계이론이 많이 개발되었으나, 상용화의 문제점과 설계상의 간편성 때문에 아직도 산업계에서는 PID제어기가 각광을 받고 있다. 따라서 이에 대한 많은 동조방법^[1]들이 개발되고 있으며 특히 PID 제어기 설계에 있어 안정도-강인성 보장의 중요성 이외에도 주어진 설계사양을 만족하도록 하는 문제의 중요성이 강조되어지고 있다. 안정도-강인성 및 성능-강인성을 보장하는 PID제어기 동조방법으로 Elena^[2] 등은 주파수 영역에서 루프형성기법을 이용하여 PID제어기를 동조할수 있는 설계기법을 제안했다. 그리고 H[∞]^{[3],[4]}를 이용한 설계는 모델의 고차화에 따른 설계과정의 복잡성에 대한 어려움이 있으므로 설계과정에서의 간편성과 강인성을 내포하고 있는 LQR을 이용한 연구로서 Suh^[5]는 Shin와 Chen^[6]이 2차시스템에서 제안한 LQ 접근방법을 루프형성기법을 이용해 명명추중, 외란제거, 잡음감소등의 성능-강인성을 만족하도록 하는 LQ-PID제어기 동조방법을 제시하였다. 하지만 이런 주파수 영역에서의 설계방법은 시간영역에서의 설계사양을 잘 만족하지 못하는 문제점을 가지고 있으므로 이러한 문제점을 해결하기위해 시간영역에서의 설계방법으로 강인성을 내포하고 있을뿐 아니라 시간영역에서의 설계사양을 만족할수 있는 PID제어기 설계에 대한 연구가 강조되었다. 그래서 He^[7]등은 시간지연을 가진 일차시스템에 대한 LQR접근방법으로 PI/PID제어기 설계를 시도했으며 Suh^[8]는 2차시스템에서 시간영역의 설계사양인 오버슈트와 정착시간을 만족할수 있는 LQ-PID제어기 동조에 관한 절차법을 제안했다. Suh^[8]가 제안한 LQ-PID제어기는 출력변수에 적분요소를 첨가한 새로운 상태변수를 도입하여 2차시스템의 최적제어법칙을 기존의 PID제어에 적용함으로써 2차시스템에서 PID제어기의 최적강인 설계를 LQR설계문제로 전환하고 LQR의 가격함수의 가중치 요소 Q,R을 시간영역의 설계사양인 오버슈트와 정착시간 설계파라미터들에 의해 선정하는 방법이다. 따라서 LQ-PID제어기는 LQR 문제로 해석됨으로써 강인성을 보장시킬 수 있을 뿐 아니라 시간영역에서의 설계사양들을 효율적으로 만족시킬 수 있었다. 또한 LQ-PID제

어기 설계과정에서 목표함수는 3차시스템으로서 오버슈트는 고유주파수에 독립이고, 상승시간 및 정착시간은 고유주파수에 의존한다는 사실을 확인함으로써 목표함수의 설계인자는 설계사양에 적합하도록 오버슈트를 결정할수 있는 설계파라미터로 활용되고 고유주파수는 정착시간을 조절할수 있는 설계파라미터로 활용할수 있다. 따라서 정착시간을 조절할수 있는 동조방법으로 목표함수의 표준화를 통하여 시간영역에서의 설계사양인 정착시간에 만족하는 고유주파수를 선정하는 방법을 제시하였다. 하지만 목표함수의 설계인자를 통하여 시간영역의 설계사양인 오버슈트를 만족할수 구체적인 방법은 제시하지 못하였다.

따라서 본논문에서는 목표함수에서 정착시간에 독립이며 오버슈트를 조절할수 있는 두 개의 설계인자를 통하여 시간영역에서의 설계사양에 만족할 수 있도록 오버슈트 크기를 조절하는 구체적인 방법을 제시하고자 한다. 본 논문에서 제안하는 방법은 입력신호가 단위계단 함수라고 할때 시간에 대한 응답식을 구함으로써 단위계단 응답식에서 오버슈트를 조절할수 있는 설계인자가 구체적으로 어떤 영향을 가져오는지를 파악하고 오버슈트를 만족하는 설계인자의 영역을 이론적 근거를 통해 구한다. 또한 설계사양에 만족하는 오버슈트 설계파라미터의 최적값을 선정하기 위해 블록형 최적화기법^{[9],[10]}을 이용하여 설계인자의 영역을 만족하는 두 개의 설계인자를 선택함으로써 블록형 집합을 형성하고 설계사양에 부합하는 시간영역에서의 터널을 형성하여 설계파라미터를 선정하는 구체적인 방법을 제시하고자 한다.

2. 기존의 LQ-PID 제어기 설계방법

본논문의 효율적인 설명과 전개를 위해 LQ-PID 제어기에 대해 간략히 설명하고자 한다. LQ-PID제어기는 출력변수에 적분요소를 첨가시킨 새로운 상태변수를 도입하여 2차시스템의 최적제어법칙을 기존의 PID제어에 적용했다. 새로운 상태변수를 가진 2차시스템에 대해 양의 반한정 대칭행렬이며 식(1)의 Riccati방정식의 해가되는 K를 LQR의 귀환제어법칙에 대입함으로써 최적제어법칙은 식(2)와같이 PID형태를 가지게 된다.

$$KA + A^TK + Q - KBR^{-1}B^TK = 0 \quad (1)$$

$$u(t) = -\frac{c}{R} \left(K_{22} \frac{dx(t)}{dt} + K_{21}y(t) + K_{20} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (2)$$

또한, 기존의 PID형태가 식(3)와 같으므로 상태가중행렬 Q를 식(1)의 Riccati방정식에 대입하여 PID 동조 파라미터를 구하기 위해 K를 Q에 관한 식으로 표현하면 아래의 식(4),(5),(6)와같다.

$$u(t) = -K_c \left(y(t) + \tau_0 \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (3)$$

$$K_{20} = \frac{\sqrt{RQ_{20}}}{c} \quad (4)$$

$$K_{21}^4 + \frac{4bR}{c^2} K_{21}^3 + \left(\frac{4b^2R^2}{c^4} - \frac{2R}{c^2} Q_{11} \right) K_{21}^2 - \left(\frac{4bR^2}{c^4} Q_{11} \right. \\ \left. + \frac{8R^2}{c^4} Q_{00} \right) K_{21} + \left(\frac{R^2}{c^4} Q_{11}^2 - \frac{4R^2}{c^4} Q_{00} Q_{22} - \frac{4a^2R^2}{c^6} Q_{00} \right) = 0 \quad (5)$$

$$K_{22} = \sqrt{\frac{2R}{c^2} K_{21} + \frac{RQ_{22}}{c^2} + \frac{a^2R^2}{c^4} - \frac{aR}{c^2}} \quad (6)$$

따라서 K_{20}, K_{21}, K_{22} 는 식(4),(5),(6)에서 a, b, c 가 플랜트의 계수임을 고려할 때 LQR의 가중치요소 Q 와 R 에 의한 관계식으로 나타나 있음을 볼 수 있고 따라서 LQ-PID제어기는 LQR의 강인 특성을 가져 ∞ 의 이득 여유와 60°위상여유의 강인성을 갖게되며 출력제한을 가지는 LQR 구조이기 때문에 설계사양을 만족시켜 성능강인성을 보장시킬 수 있다. 또한 시간영역에서의 Q,R값 선정에 있어서 LQ-PID제어기의 고려대상은 3차 시스템이므로 두 개의 복소극점과 한 개의 실수극점이 존재하는 다음과 같은 3차시스템을 고려했다.

$$T(s) = \frac{w_n^3}{(s + \frac{1}{r} w_n)(s^2 + pw_n s + rw_n^2)} \quad (7)$$

식(7)은 실수극과 복소극이 w_n 에 의한 관계식으로 되어있으므로 계수 p, r 값이 고정되면 w_n 이 변해도 감쇠비가 일정하게 되어 오버슈트는 일정하게 되고 따라서 p, r 은 사실상 오버슈트를 조절할 수 있는 역할을 하고 있다. 즉, p, r 값은 설계사양에 적합한 오버슈트를 결정할 수 있는 설계 파라미터로 활용할 수 있고 w_n 는 상승시간이나 정착시간의 설계사양을 만족시킬 수 있는 설계 파라미터로 활용할 수 있게된다. 또한 이들 설계파라미터들인 p, r, w_n 과 LQR의 가중치 요소 Q 와 R 과의 상호관계 유도를 위하여 LQR의 케환제어법칙 $u(t) = -Gx(t)$ 를 출력변수가 첨가된 상태공간 모델식에 대입함으로써 다음과 같은 페루프 상태공간 모델을 얻게된다.

$$A_c = A - BG = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c}{R} K_{20} & -b - \frac{c}{R} K_{21} & -a - \frac{c}{R} K_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

시간영역의 설계사양인 오버슈트와 정착시간을 만족하는 응답을 설계하는 문제는, 식(7)의 특성방정식의 극점들과 식(8)의 특성방정식이 갖는 극점들이 일치하도록 PID 제어기 파라미터 K_{20}, K_{21}, K_{22} 을 정하는 극점 배치 문제로 생각할 수 있으므로 다음과같은 관계식을 유도할 수 있다.

$$Q_{00} = \frac{Rw_n^6}{c^2} \quad (9)$$

$$Q_{11} = \frac{R}{c^2} \left[\left(r + \frac{b}{r} \right) w_n^2 - b \right] \left[2b + \left(r + \frac{b}{r} \right) w_n^2 - b \right] \\ - 2w_n^2 \sqrt{\frac{R^2}{c^4} \left[2 \left(r + \frac{b}{r} \right) w_n^2 - b \right] + a^2} + \frac{R}{c^2} Q_{22} \quad (10)$$

$$Q_{22} = \frac{R}{c^2} \left(p + \frac{1}{r} w_n \right)^2 - \frac{R}{c^2} \left[a^2 + 2 \left(r + \frac{b}{r} \right) w_n^2 - b \right] \quad (11)$$

따라서 LQR의 가중치 요소 Q, R 은 오버슈트 설계파라미터 p, r 과 정착시간 설계파라미터인 w_n 에 의해서 선정되고 이렇게 선정된 Q, R 을 식(4),(5),(6)에 대입함으로써 PID 제어기 동조계수가 결정된다. 이렇게 구한 PID 제어기 동조계수 값은 LQR을 만족함으로 강인성을 갖게될 뿐만 아니라 시간영역에서 설계사양을 만족하여 성능강인성을 충족시킬 수 있게된다.

3. 본 논문에서 제안하는 LQ-PID 제어기의 오버슈트 설계방법

3-1. p, r 과 오버슈트(overshoot)와의 관계형성

3차전달함수에 대한 응답이 오버슈트(overshoot)를 갖기 위해서 근이 s-평면에서 두개의 복소극점과 하나의 실수 극점으로 존재하는 식(7)에서 p, r 값과 오버슈트와의 관계를 형성한다. 전달함수의 입력신호가 단위계단 함수라고 할때 식(7)을 라플라스 역변환하여 시간에 대한 순시응답(transient response)을 구하면 식(12)와 같이 나타낼수 있다.

$$T(t) = 1 + \left(\frac{r^2}{-r^2 + pr - 1} \right) \cdot e^{-\frac{\omega_n}{r} t} + e^{-\rho \cdot \frac{\omega_n}{2} t} \cdot \sqrt{C^2 + (-\rho \cdot \frac{\omega_n}{2} \cdot C + D)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{r - \frac{\rho^2}{4}}} \cdot \sin \left(\sqrt{r - \frac{\rho^2}{4}} \cdot \omega_n \cdot t + \phi \right) \quad (12)$$

(단, $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{C}{C_2} \right)$)

여기서 C, D, C_1, C_2 는 수식이 복잡하므로 편의상 다음과 같이 놓았다.

$$C = \frac{p - \frac{1}{r}}{r^2 - p + \frac{1}{r}}, \quad D = w_n \cdot \frac{\rho^2 \cdot r - r^2 - \rho}{r^2 - p \cdot r + 1}$$

$$C_1 = C, \quad C_2 = \left(-p \cdot \frac{\omega_n}{2} \cdot C + D \right) \cdot \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{r - \frac{\rho^2}{4}}}$$

단위계단 응답식에서 오버슈트를 나타내는 식을 유도하기 위하여 sin 항 만을 고려하여 ϕ 를 고려하지않은 sin함수에 대한 주기 관계식으로 나타내면 식(13)과 같다.

$$\sin \left(\sqrt{r - \frac{\rho^2}{4}} \cdot \omega_n \cdot t \right) \quad (13)$$

따라서 식(13)에서 $\sqrt{r - \frac{\rho^2}{4}} \cdot \omega_n \cdot t = 2\pi$ 이므로 t 에 관한 식으로 정리하면 $t = \frac{2\pi}{\sqrt{r - \frac{\rho^2}{4}} \cdot \omega_n}$ 이 되고 sin함수의

한 주기의 $\frac{1}{4}$ 이 첫 번째 최고값을 가지게 되므로 첫 번째 최고값을 가지게 되는 t 는 식(14)과 같다.

$$t = \frac{2\pi}{\sqrt{r - \frac{\rho^2}{4}} \cdot \omega_n} \cdot \frac{1}{4} \quad (14)$$

여기서 원식(12)의 sin함수는 ϕ 만큼 이동한 식이므로 $\sin \left(\sqrt{r - \frac{\rho^2}{4}} \cdot \omega_n \cdot t + \phi \right) = \sin(Kt + \phi)$ 과 같이 표현하게 되면 식(12)에 대한 최고값을 갖는 t 의 값은 식(15)과 같이 나타낼수 있다.

$$t' = \frac{2\pi}{\sqrt{r - \frac{\rho^2}{4}} \cdot \omega_n} \cdot \frac{1}{4} - \frac{\phi}{K} \quad (15)$$

따라서 $\sin(K \cdot t + \phi)$ 가 갖는 첫 번째 최고점을 갖는 t'' 는 그림1와 같이 시간응답곡선이 sin함수의 첫 번째 최고값을 갖는 t'' 과 일치함을 볼 수 있고 그때의 t'' 는 식(16)로 표현되어진다.

$$t'' = -\frac{\pi}{2K} + \left(\frac{2\pi}{K} - \frac{\phi}{K} \right) = \frac{5\pi - 2\phi}{2K} \quad (16)$$

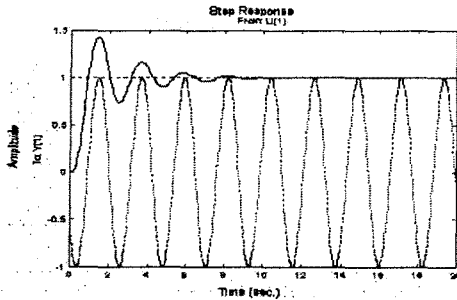


그림 1. sin함수 곡선과 응답곡선의 비교

즉, 식(16)의 값을 식(12)식에 대입하면 식(16)은 더 이상 단위계단 응답식이 아닌 오버슈트 값을 나타내는 식이 된다. 따라서 설계사양에 만족하는 오버슈트 값을 찾기 위해서는 식(12)에 식(16)의 값을 대입하고 설계사양에 만족하는 p, r 값을 찾으면 된다.

단 이때 p, r 값이 갖는 변화공간은 다음과 같은 조건을 부여 하여야 한다.

1. 오버슈트(overshoot) 생성조건

$$p^2 < 4 \cdot r \quad (17)$$

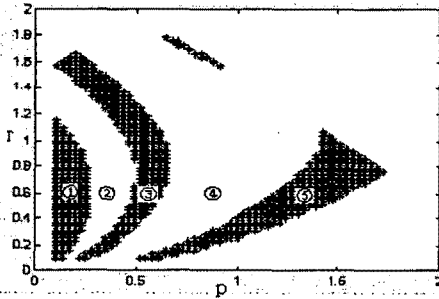
2. 첫번째 오버슈트(overshoot)가 가장 클 조건

$$r \leq -p + 2.5, \quad r < 1.8 \quad (18)$$

3. 전달함수의 안정화 조건

$$p > 0, \quad r > 0 \quad (19)$$

위의 조건에 따른 p, r 값의 변화공간과 오버슈트의 크기를 나타내면 다음과 같다.



(1) : $T \geq 1.5$, (2) : $1.5 > T \geq 1.3$, (3) : $1.3 > T \geq 1.2$
 (4) : $1.2 > T > 1.0$ (5) : $T \approx 1.0$)

그림 2. 오버슈트 값에 따른 영역구분

그림 2 에서 나타낸 영역에 따른 전달함수의 응답곡선을 나타내면 그림3 와 같이 원하는 영역의 응답을 확인할 수 있다.

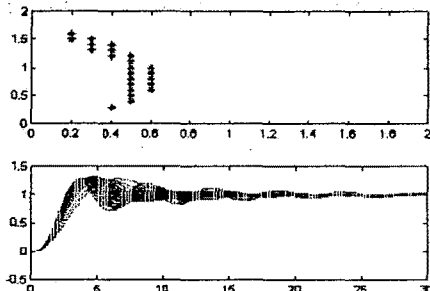


그림 3. $1.3 \geq T \geq 1.2$ 에 따른 응답곡선 및 p, r 영역

3-2. 준볼록형 최적화기법에 의한 오버슈트 동조방법

임의의 두 $(p_1, r_1), (p_2, r_2)$ 에 따른 시간응답 곡선의 식이 $T_1(p_1, r_1), T_2(p_2, r_2)$ 라 할때 오버슈트(overshoot)의 식을 T_{os} 라하고 $T1_{os} > T2_{os}$ 라고 하면 이때 quasiconvex 함수의 정의에 따라 다음의 식(20)을 만족함으로써 이루어진다.

$$T_{os} * (\lambda * T_1(p_1, r_1) + (1 - \lambda) * T_2(p_2, r_2)) \leq T1_{os} \quad (20)$$

즉, 주어진 설계사양에 만족하는 두 $T1(p_1, r_1), T2(p_2, r_2)$ 에 대한 quasiconvex 결합은 $T1_{os}$ 보다 항상 작은 값을 가지게 된다.

따라서 그림 4 에서 보여지는 것처럼 설계사양을 만족하는 임의의 $T1(s)$ 의 순서쌍 (p_1, r_1) 에 의해 형성된 오버슈트 최대값의 터널과 임의의 $T2(s)$ 에 의해 형성된 오버슈트 최대값의 터널내에서 항상 만족할 수 있는 p, r의 집합을 형성함으로써 설계사양에 만족하는 응답을 이룰수 있게 된다. 즉, 시간영역에서 오버슈트는 quasiconvex를 만족함으로써 λ 값에 따라 수많은 p, r의 집합을 형성할 수 있다.

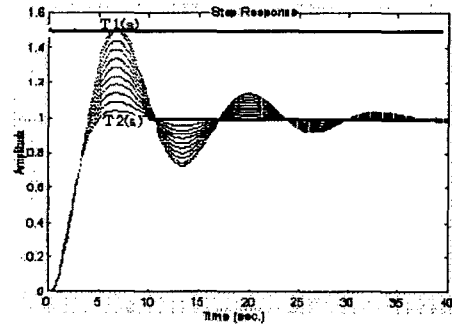


그림 4. 임의의 $T1(s)$ 와 $T2(s)$ 에 의해 형성된 터널

따라서 p, r 이 오버슈트 설계사양을 만족 하기 위한 설계파라미터가 되고 p, r의 값에 따라 응답곡선의 오버슈트 형상이 구속조건을 만족하게 됨으로써 설계사양에 부합되는 p, r 값을 선정할 수 있다. 이렇게 λ 에 따라 형성된 $T(s)$ 는 $T1(s)$ 의 오버슈트 보다 항상 작은 값을 가지게 되어 상한의 오버슈트 장벽 아래에 존재하게 되며 오버슈트가 가장 작은 경우는 $T2(s)$ 와 같은 값을 가질 때가 된다. 이렇듯 설계장벽 상한 오버슈트와 하한 오버슈트를 만족하는 $T1(s), T2(s)$ 에 대해서 $T(s)$ 는 항상 설계장벽을 만족하게 된다.

본 논문에서 제안한 방법으로 PID제어기 동조하는 순서를 정리하면 다음과 같다.

1. 설계사양에서 주어지는 오버슈트에 대해 그림 2 에서 처럼 임의의 $(p_1, r_1), (p_2, r_2)$ 를 결정한다. (일반적으로 하한 오버슈트 값을 갖는 (p_2, r_2) 는 오버슈트 크기가 1.0인 구간을 선정한다.)
2. 임의의 $(p_1, r_1), (p_2, r_2)$ 에 대해 식(20)에 의해 quasiconvex 결합을 형성한다.
3. 주어진 설계사양에서 λ optimal 값을 결정하고 그에 따라 p, r 값이 결정된다.
4. p, r 값과 $\text{su}^{[8]}$ 방법에 의하여 w_n 이 결정되면 가중치요소 Q가 정해지고 식(4),(5),(6)에 대입하여 PID 파라미터인 K_{20}, K_{21}, K_{22} 을 결정한다.

4. 예제

고려할 2차 시스템이 다음과 같을 때

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = u(t)$$

출력변수에 적분요소를 첨가시킨 새로운 상태변수를 도입하면 시스템의 상태공간 모델식은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

여기서 설계사양으로서 오버슈트는 10%이내에, 정착시간은 정상상태응답의 $\pm 0.01\%$ 의 오차범위에 도달하는 시간으로 고려하여 정착시간 $t_s = 1.5$ 로 주어졌다고 하자.

단계1. 설계사양에서 주어진 오버슈트는 10% 이므로 상한의 오버슈트에 해당하는 임의의 p, r 값은 (0.7, 1.4)로 선정하고 하한의 오버슈트에 해당하는 임의의 p, r 값은 (1.4, 1.0)으로 선정한다.

단계2. 임의로 선정된 (0.7, 1.4), (1.4, 1.0)를 식(20)에 대입하여 상한의 오버슈트 T1 과 하한의 오버슈트 T2에 대해 convex 결합을 형성하면 다음과 같다.

$$T_{os} = (\lambda * T1(0.7, 1.4) + (1 - \lambda) * T2(1.4, 1.0))$$

단계3. 단계2에서 형성된 convex 결합에 대해 λ 의 최적값을 결정하면 가장 작은 오버슈트를 이루는 λ 은 0이 되지만 본 논문에서는 효과적인 비교를 위해 최저의 값으로 (0.7, 1.4)를 선택한다.

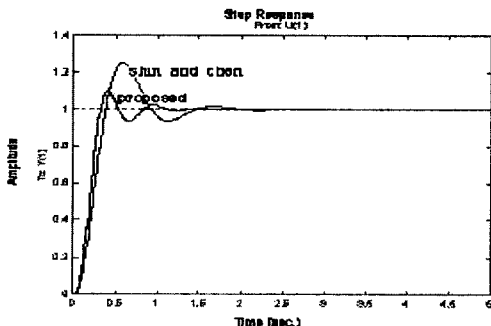
단계4. p=0.7, r=1.4의 선정과 suh^[8]방법에 의하여 $w_n = 10 \text{ rad/s}$ 으로 결정되고 p, r, w_n 에 의하여 Q 값을 구하면 다음과 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} 1000000 & 0 & 0 \\ 0 & 7813.3 & 0 \\ 0 & 0 & -202 \end{bmatrix}$$

따라서 PID제어기의 동조계수는 아래와 같다.

$$[K_p, K_i, K_d] = [214 \ 1000 \ 12.9]$$

그림 5에서는 Shin와 Chen의 방법과 본 논문에서 제안한 PID제어기의 단위계단 응답곡선을 비교했다. 시뮬레이션 결과는 Shin와 Chen의 방법보다 개선 될 뿐만 아니라 본 논문에서 선정된 p,r값에 따른 오버슈트의 설계사양을 만족하고 있음을 볼수 있다.



림 5. PID 제어기의 단위계단 응답

5.결론

본 논문은 기존에 제안된 2차시스템에서 PID제어기의 최적강인 설계기법인 LQ-PID^[8]제어기에 있어서 시간영역의 설계사양인 오버슈트를 조절하기 위해 convex 최적화방법을 이용함으로써 설계사양에 부합하는 오버슈트

트의 터널을 형성하여 최적의 실제파라미터를 선정하는 방법을 제안하였다. 또한 오버슈트가 존재하지 않거나 응답이 진동하는 경우를 나타내는 p,r 값의 제한범위를 구함으로써 시간영역에서의 설계사양인 오버슈트를 효율적으로 만족시킬수 있었다.

[참 고 문 헌]

- [1] P.Cominos and N.Munro, "PID controllers : recent tuning methods and design to specification" , *IEE Proceedings online no. 20020103* January 2002
- [2] Elena Grassi, Kostas S.Tsakalis, Sachi Dash, Sujit V.Gaikwad, Ward MacArthur, and Gunter Stein "Integrated System Identification and PID Contrller Tuning by Frequency Loop-Shaping" *IEEE Transaction on control systems Technology*, Vol, 9, NO, 2, March 2001
- [3] J. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar and B.A. Francis, "State-space solutions to standard H2 and H ∞ control problems", *IEEE Trans on Auto. Control*, Vol. 34, No. 8, pp. 83 1~847. Also see *1989 American Control Conferencr*, Atlanta, June, 1988
- [4] M. Grimble., "H ∞ controllers with a PID structure", *J. of Dynamic Syst. Meas. and Contr.*, Vol. 112, pp. 325~336, 1994
- [5] B. Suh, "Robust Optimal Tuning of PID Regulators for A second Order System", *Proceeding of the 14th International Conference on System Science*, Wroclaw Poland, 11-14 September, pp. 313~319, 2001.
- [6] Y. Shin and C. Chen, "On the weighting factors of the quadratic criterion in optimal control", *Int. J. Control*, Vol. 19, No. 5, pp. 94 7~955, 1974.
- [7] Jian-Bo He, Qing-Guo Wang and Tong-Heng Lee, "PI/PID controller tuning via LQR approach", *Chemical Engineering Science*, Vol. 55, No. 13, pp. 2429~2439, 2000.
- [8] Byung-Shul Suh, "Tuning of PID Regualtors for a Second Order System via LQR Approach," *15th International Conference on Electrical Machines*, Brugge Belgium, 25~28 August 2002
- [9]Stephen P. Boyd and Craig H. Barratt, "*Linear Controller Design*" Prentice-Hall International Editions, 1991
- [10]Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe, Course Reader forEE364, "*Introduction to Convex Optimization with Engineering Applications*." Stanford University, 2001.