

시간지연을 갖는 2차 시스템의 LQ-PID제어기 동조

박택선, 서병설

한양대학교 전기공학과

전화:02-2290-0364 / 휴대전화:011-9171-5244

LQ-PID Controller Tuning for a Second-Order System with Time-Delay

Tack-Seon Park, Byung-Suhl Suh

Dept. of Electrical Engineering, Hanyang University

E-mail : sunnyeye@ihanyang.ac.kr

Abstract

This paper presents an optimal robust LQ-PID controller design method for a second order system with time-delay to meet design specifications. By LQR formulation of the second order system with time-delay, tuning parameters of PID controller are related by the weighting factors Q and R of cost function. The selection of the weighting factors Q and R are chosen to satisfy such the design specifications as overshoot and settling time.

I. 서론

PID제어기는 제어이론의 많은 발전이 있었음에도 불구하고 거의 50년동안 산업현장에서 사용되어지고 있다. 그 이유는 구조가 간단하고 제어기술자들이 쉽게 적용할수 있기 때문이다. PID 제어기 설계 혹은 동조는 Z-N^[1](1942) 방법이 많이 사용되어지고 있다. 그러나 이 동조규칙은 고성능의 제어를 요구하는 시스템에서는 적합하지 않다고 알려져 왔다. 그래서 Hang^[2](1991)등은 Z-N^[1]방법의 오버슈트를 줄이는 동조 방법과 Ho^[3](1995)등은 이득과 위상여유를 설계사양에 만족하는 동조 방법등 향상된 PID동조 방법들을 제안했다. 최근에는, 제어기술자들의 주요 관심사는 성능뿐만이 아니라 강인성이 보장된 제어기를 설계하는데있다. 그래서 LQG-LTR^[4]과 H[∞]^[5]와 같은 강인성과 최적성을 갖는 PID 제어기 설계 방법이 연구되었다. H[∞]를 PID에 적용시키기 위한 노력으로 Grimble^[6](1994)은 H[∞] 제어기를 PID 제어기 구조로 해석함으로써 강인성을 이룰수 있는 PID

제어기에 대한 연구를 하였고, LQR의 강인성을 이용한 LQ접근방법으로는 Lin^[7](2001)등이 빠른 온도공정 시스템에 제어기의 일부를 LQR을 이용한 PI제어기를 제안하였다. 그러나 이 방법들은 수행색인표 혹은 가격함수(J)의 Q값 선정 있어서 해석적 설계방법을 제시하지 못했다. Suh^[8](2002)는 2차시스템에서 LQ접근방법을 이용, 시간영역에서 오버슈트와 정착시간을 조절할수 있는 설계 파라미터로 Q값을 결정 하여 효과적으로 오버슈트와 정착시간을 조절할 수 있는 강인한 LQ-PID설계방법을 제안했다. 그러나 이 방법은 시간지연을 고려하지 않았기 때문에 일반적으로 시간지연이 존재하는 공정제어 시스템에 적용하지 못한다. 시간지연을 고려하여 He^[9](2000)등은 LQR 접근방법으로 PI/PID 제어기 설계를 제시하였다. 그러나 시스템이 1차에 국한되어 있고, PID 제어기 동조시 시스템의 어떠한 극(pole)값과 영점인 미분계수(K_d)가 일치하는 특수한 조건에서만 가능하므로 사실상 PID가 아닌 PI 제어기 설계방법이라 할 수 있다. 또한 성능을 조절할수 있는 설계 파라미터인 감쇠비 ζ, 고유주파수 ω_n와 Q값과의 관계를 제시하였지만 설계사양에 맞는 설계 파라미터 결정 방법을 제시하지 못했다. 본 논문에서는 앞서 Suh^[6]가 제시한 시간영역에서 PID 제어기 동조 방법을 시간지연 시스템으로 확장하여 He^[9]등이 고려하지 못한 시간지연 2차 시스템을 고려하고, LQR구조로 PID 제어기를 해석하여 최적화는 물론 강인성을 보장시키며, 시간영역에서 주어진 설계사양 즉, 오버슈트와 정착시간을 만족시킬 수 있는 구체적인 해석적인 방법을 제시함으로써 새로운 LQ-PID 제어기 설계방법을 창출하고자 한다.

II. 시간지연 2차 시스템의 LQR 해

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = cu(t-L) \quad (1)$$

여기서, $y(t)$ 는 출력변수, $u(t-L)$ 는 L 의 시간지연을 갖는 제어변수, 그리고 a, b, c 는 시스템 계수이다. 초기 조건 $y(0)$ 와 $\frac{dy(0)}{dt}$ 는 명시되어진다. 출력변수에 적분요소를 첨가시킨 새로운 상태변수를 도입하면 상태변수 $x(t)$ 는 다음과 같다.

$$x(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t y(\tau) d\tau \\ y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

그러면 식(1)은,

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t-L) \quad (3)$$

여기서 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & -a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$ 이다.

LQR로 해석하기 위해서 식(4)와 같은 2차 가격함수를 고려하자.

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Qx + u^T R u) dt \quad (4)$$

여기서 Q 는 양의 반한정(positive semi-definite) 대칭행렬인 상태가중행렬이고, R 은 양의 한정(positive definite) 대칭행렬인 제어가중행렬이다. $t < 0$ 일 때, $u(t) = 0$ 이다. LQR문제는 가격함수식(4)을 최소화 시키는 $u(t)$ 를 찾는 것이다. 여기서 $He^{[9]}$ 등의 시간지연 시스템의 LQR의 해를 이용하여 식(3)의 입력 u 를 2단계로 분리한다.

(i) $0 \leq t < L$, $u(t-L) = 0$,

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad 0 \leq t < L \quad (5)$$

(ii) $t \geq L$, $\hat{u}(t) = u(t-L)$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\hat{u}(t), \quad t \geq L \quad (6)$$

이러한 변환을 통하여 식(5)와(6)은 시간지연이 없는 시스템으로 생각할 수 있고, LQR의 해를 구할 수 있다.

식(6)의 LQR의 해는 다음과 같다.

$$\hat{u}(t) = -R^{-1}B^TKx(t), \quad t \geq L \quad (7)$$

$$= -Gx(t), \quad t \geq L \quad (8)$$

여기서 G 는 제어게인 행렬이고, K 는 양의 반한정 대칭행렬이고 다음 Riccati 식의 해이다.

$$KA + A^TK + Q - KBR^{-1}B^TK = 0 \quad (9)$$

식(8)에서 $\hat{u}(t)$ 는 $t \geq L$ 에서의 입력 이므로 $t \geq 0$ 로 변환하면 다음 식과 같다.

$$u(t) = \hat{u}(t+L) = -Gx(t+L), \quad t \geq 0 \quad (10)$$

(10)식을 보면, (8)식부터 구해진 제어법칙 $\hat{u}(t)$ 는 시간 $t \geq L$ 에서의 입력이라도 회복된 $u(t)$ 는 실제적으로 $t \geq 0$ 에서의 시스템 (3)의 제어입력이다. 그러나 (10)식의

$x(t+L)$ 는 시간 t 에 직접 이용할 수 없다. 그래서 식 (5)-(8)에 의해 다음과 같이 $x(t)$ 로 변환할 수 있다.

(i) $0 \leq t < L$ 일 때

$$x(t+L) = e^{A(L-t)}x(t) = e^{AcL}e^{A(L-t)}x(t) \quad (11)$$

(ii) $t \geq L$ 일 때

$$x(t+L) = e^{AcL}x(t) = e^{AcL}x(t) \quad (12)$$

여기서, $Ac = A - BR^{-1}B^TK$ 이다.

식(11)와(12)을 식(10)에 대입하면 다음과 같다.

$$u(t) = -Ge^{AcL}e^{A(L-t)}x(t), \quad 0 \leq t < L \quad (13)$$

$$u(t) = -Ge^{AcL}x(t), \quad t \geq L \quad (14)$$

식(10)을 보면 현재의 $u(t)$ 는 실제로 $(t+L)$ 시간인 미래의 상태가 피드백 된다. 그것은 Smith's 방법^[10]과 같이 제어가 예보적 성능을 갖고 있다는 것을 의미한다. 따라서 기존의 PID제어기 보다 페루프 성능이 향상된다. 또한 위식에서 $u(t)$ 가 $0 \leq t < L$ 에서는 시간에 따라 변하고, $t \geq L$ 에서는 일정하다는 것을 확인할 수가 있다. 그러나 $t=L$ 인 시점에서는 식 (13)과 (14)의 값이 일치 한다는 것을 알 수 있다. 그러므로 입력이 연속이다. 그리고 출력이 $t \geq L$ 이후에 발생하므로 설계사양을 $t \geq L$ 의 제어입력 $u(t)$ 에서 결정을 하면 그림1 과 같이

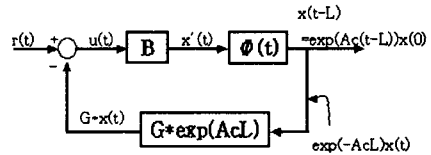


그림 1 시간지연을 갖는 LQR제어기

상태출력은 $x(t-L)$ 로 시간지연이 발생하고, 또 피드백 되는 상태도 시간지연이 발생하지만 (14)식에서의 e^{AcL} 에 의해서 e^{-AcL} 은 소거되고 실제로는 (15)식과 같이 시간지연이 없는 폐환신호와 같이 된다.

$$u(t) = -Gx(t) \quad (15)$$

즉, 피드백 되어 만들어지는 시스템의 특성방정식이 결과적으로 시간지연이 없는 특성방정식과 같게 된다. 따라서 시간지연의 증가에 따른 응답이 Smith's 이론^[10]과 같이 출력은 지연되더라도 그 시스템의 성능특성곡선은 같다.

III. LQ - PID 제어기

앞의 식(1)-(15)으로부터 실제 폐환신호는 식(15)와 같음을 확인할 수 있다. 여기서 식(9)Riccati의 해인 K 의 성분들을 다음과 같이 놓으면,

$$K = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{10} & K_{20} \\ K_{10} & K_{11} & K_{21} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

식(15)식의 최적제어법칙은 PID제어기 형태가 된다.

$$u(t) = -\frac{c}{R} \left(K_{22} \frac{dy(t)}{dt} + K_{21}y(t) + K_{20} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (17)$$

기존의 PID제어기의 형태는,

$$u(t) = -K_c \left(y(t) + \tau_D \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (18)$$

이득 K_i 의 성분들과 비례이득 K_c 와 시정수 τ_I 그리고 τ_D 와의 관계를 갖고 있음을 확인할 수 있다.

상태가중행렬 Q 를 식(19)와 같이 놓고

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{00} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Riccati 방정식(9)에 대입하면 PID 동조 파라미터를 구하기 위한 K 를 Q 에 관한식으로 나타낼 수 있다.

다음은 시간영역에서 설계사양인 오버슈트와 정착시간을 만족할 수 있는 Q, R 의 구체적 선정방법을 다음장에서 제시한다. 앞서 제시한 LQ-PID제어기는 LQR의 ∞ 의 이득여유와 60° 위상여유의 강인성을 갖게 된다. 일반적인 LQR은 출력궤환이 없어서 성능에 관해 논하기가 어렵다. 그러나 본 연구에서는 출력궤환을 갖는 LQR 구조이기 때문에 설계사양을 만족시키는 성능과 강인성을 보장시킬 수 있다.

IV. 가중치 요소 Q와 R의 선정

본 논문은 시간지연을 갖는 3차 시스템을 시간영역에서 오버슈트와 정착시간을 조절할 수 있도록 LQR의 가중치 요소 Q 와 R 의 선정방법을 다음과 같이 제시한다. Suh^[8]가 제시한 것과 같이 3차시스템의 응답이 오버슈트를 갖기 위해서는 근이 s-평면에서 두 개의 복소극점과 하나의 실수극점으로 존재해야 한다. 여기에 시간지연을 고려하면 다음식(20)과 같이 표현할 수 있다.

$$T(s) = \frac{w_n^3}{(s + \frac{1}{\tau} w_n)(s^2 + p w_n s + r w_n^2)} e^{-Ls} \quad (20)$$

식(20)은 실수근과 복소근이 w_n 에 의한 관계식으로 되어 있으므로 계수 p, r 값이 고정되면 w_n 이 변해도 감쇠비가 일정하게 되어 오버슈트가 일정하게 된다. 즉, p, r 이 오버슈트의 조절인자 이고, w_n 이 상승시간과 정착시간 조절인자 이다. w_n 은 오버슈트에 독립이고 정착시간에 의존하기 때문에 정착시간을 조절할 수 있는 설계 파라미터로 활용하기 위해서는 w_n 에 대한 정규화된 그래프를 이용해야 한다. 식(20)을 w_n 에 대해서 정규화된 식으로 나타면 정규화 시간 $w_n t$ 를 축으로 하는 응답으로부터 설계사양에 만족하는 정착시간을 고유주파수로 조절할 수 있다. 좀더 구체적으로 설명하면, 그림 2와 같이 t_{ns} 는 정규화된 전달함수의 정착시간이라 하고 정착시간은 정상상태값의 $\pm \epsilon\%$ 이내에 도달하여 넘지 않는 데 걸리는 시간으로 정의한다. 그리고 설계사양인 정착시간은 t_s 이라 한다. 그러나 시스템의 응답이 L 만큼 시

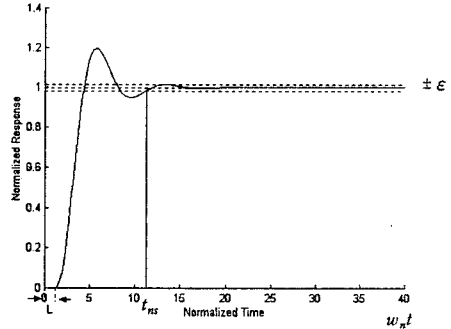


그림 2 정규화된 3차 시스템 전달함수의 계단응답

간지연 있기 때문에 $t \geq L$ 에서 설계사양을 결정하기 위해서는 새로운 정규화된 $T_s = t_s - L$ 정착시간 $T_{ns} = t_{ns} - L$ 라고 하고, 새로운 정착시간을 라고 놓는다. 그리고 고유주파수를 결정하기 위해서는 $T_s = \frac{T_{ns}}{w_n}$ 의 관계를 이용하면 w_n 의 값이 구하여진다. 지금까지 시간지연 3차 시스템에서 식(20)의 p, r 계수에 의해 오버슈트를 결정하고 설계사양에 부합하는 정착시간을 고유주파수에 의해서 적절히 조절할 수 있음을 보였다. 그래서 다음으로 이들 설계파라미터들인 p, r 과 w_n 이 LQR의 가중치 요소 Q 와 R 과의 상호관계를 유도하겠다. 앞절에서 설계사양을 출력이 발생하는 $t \geq L$ 일때에 결정했고 시간지연을 갖는 시스템의 LQR의 실제 궤환제어법칙은 $u(t) = -Gx(t)$ 임을 확인했다. 이를 특성방정식을 고려할 수 있는 페루프 상태공간식으로 나타내면

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A - BG)x(t) \quad (21)$$

그리고 식(21)은 식 (7)(8)과(16)에 의해서 페루프 시스템행렬 A_c 의 특성방정식은 식(22)로 구하여진다.

$$\Delta = s^3 + (a + \frac{c^2}{R} K_{22})s^2 + (b + \frac{c^2}{R} K_{21})s + \frac{c^2}{R} K_{20} \quad (22)$$

여기서, 시간영역의 설계사양인 오버슈트와 정착시간을 만족하는 응답을 설계하는 문제는 설계파라미터인 p, r 과 w_n 에 의해 결정되어진 식(20)의 특성방정식과 식(22)의 페루프 시스템의 특성방정식이 같도록 식(21)의 PID 제어기 파라미터를 정하는 극점 배치 문제로 생각할 수 있다. 식(23)은 식(20)의 특성방정식이다.

$$\Delta = (s + \frac{1}{\tau} w_n)(s^2 + p w_n s + r w_n^2) \quad (23)$$

그리고 식(17)의 PID 제어기 파라미터들은 LQR의 가중치 요소 Q 와 R 에 의한 관계식으로 나타내고 Q 를 설계파라미터 p, r, w_n 에 관한 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$Q_{00} = \frac{R w_n^6}{c^2} \quad (24)$$

$$Q_{11} = \frac{R}{c^2} \left[(r + \frac{p}{\tau}) w_n^2 - b \right] \left[2b + \left((r + \frac{p}{\tau}) w_n^2 - b \right) - 2w_n^3 \sqrt{\frac{R^2}{c^4} \left[2 \left((r + \frac{p}{\tau}) w_n^2 - b \right) + a^2 \right] + \frac{R}{c^2} Q_{22}} \right] \quad (25)$$

$$Q_{22} = \frac{R}{c^2} \left\{ (p + \frac{1}{\tau}) w_n \right\}^2 - \frac{R}{c^2} \left[a^2 + 2 \left((r + \frac{p}{\tau}) w_n^2 - b \right) \right] \quad (26)$$

본 연구에서는 편의상 $R=1$ 로 정한다. 그러면 식(24)-(26)에 의해서 식(19)의 Q_0, Q_{11}, Q_{22} 가 구해진다. 그러므로 LQR의 가중치 요소 Q, R 은 정착시간 설계파라미터인 w_n 와 오버슈트 설계파라미터 p, r 에 의해서 선정됨을 알 수 있다. 따라서 설계파라미터인 p, r, w_n 에 의해서 결정된 Q, R 을 Riccati 방정식에 대입하여 K 을 구하고 LQR의 제환제어법칙을 이용하면 PID 제어기 계수가 결정되고, 이는 시간영역에서 설계사양을 만족하는 LQ-PID 제어기 동조를 할 수 있게 된다.

V. 예 제

시스템의 상태공간 모델식은 다음과 같다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t-1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

시간영역에서의 설계사양인 정착시간은 정상상태응답의 약 $\pm 0.1\%$ 정도로 도달하는 시간으로 고려하여 정착시간 $t_s=2.5$ 로 주어졌다. 그리고 $p=0.9$ 과 $r=1.4122$ 로 주어졌다. w_n 에 정규화된 그래프에서 $t_m=8.5$ 이다. 여기서 출력이 발생하는 L 이후에 설계사양을 결정하기 때문에 새로운 정착시간 ($T_s=t_s-L$)과 고유주파수 정규화 시간($T_s=t_s-L$)를 고려하여 $w_n=5 \text{ rad/s}$ 로 정할 수 있다. w_n 이 결정되면 식(20)의 Q 가 결정된다. 이때 $R=1$ 로 결정한다. 그리고 식(9)Riccati 방정식에 의해서 K 값이 결정된다.

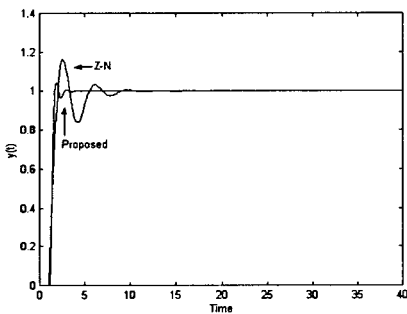


그림 3 PID 제어기의 단위계단응답

$$Q = \begin{bmatrix} 15625 & 0 & 0 \\ 0 & 611 & 0 \\ 0 & 0 & -43 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 6404.7 & 1005.1 & 125 \\ 1005.1 & 281 & 49.2 \\ 125 & 49.2 & 5 \end{bmatrix}$$

식(7),(8)에 의해 제어계인행렬은 다음과 같다.

$$G = [125 \ 49.24 \ 5.04]$$

그림3과 같이 PID제어기의 응답곡선은 Z-N방법보다 오버슈트, 상승시간, 정착시간이 개선되었고 설계사양에 만족하는 정상상태값에 도달하는 정착시간이 4.6초정도

나음을 확인 할수 있다.

VI. 결 론

본 연구는 Suh^[8]가 제시한 시간영역에서 PID제어기 동조 방법을 시간지연 시스템으로 확장하여 시간지연을 갖는 공정제어 시스템등, LQ-PID제어기의 적용범위를 확장시켰다. 또한 He^[9]등의 시간지연 1차시스템의 한계성을 2차 시스템으로 확장하여 특수한 조건에서의 PID제어기가 아닌 범용적 PID제어기 설계 가능하도록 하였다. 그리고 He^[9] 등은 설계사양에 맞는 설계파라미터의 결정방법을 제시하지 못하였지만 본 연구는 시간영역에서 설계사양인 상승시간과 정착시간을 조절할수 있는 설계파라미터의 결정 방법을 제시하였다. 따라서 본 연구는 시간지연 2차 시스템을 LQR구조로 PID제어기를 해석하여 최적화는 물론 강인성을 보장시킴, 시간영역에서 주어진 설계사양 즉, 오버슈트와 정착시간을 만족시킬수 있는 구체적이며 해석적인 방법을 제시하였다.

[참고문헌]

- [1]Ziegler, J. G.,&Nichols, N. B, "Optimum settings for automatic controllers". *Transactions of Asme*, Vol. 65, pp. 433-444, 1942
- [2]Hang, C. C., Astrom, K. J., & Ho, W. K, "Refinements of the Ziegler-Nichols tuning formula", *IEE Proceedings-D*, Vol. 138, No.2, pp.111-118, 1991.
- [3]Ho, W. K., Hang, C. C.,&Zhou, J., "Performance and gain and phase margins of well-known pi tuning formulas", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 3, No. 2, pp. 245-248, 1995b
- [4]J. Doyle and G. Stein, "Robustness with Observers", *IEEE Trans. on Auto. Control*, Vol. AC-24, No. 4, pp. 607~611, 1979.
- [5]J. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar and B.A. Francis, "State-space solutions to standard H2 and H ∞ control problems", *IEEE Trans on Auto. Control*, Vol. 34, No. 8, pp. 831~847. Also see *1989 American Control Conferencr*, Atlanta, June, 1988
- [6]M. Grimble., "H ∞ controllers with a PID structure", *J. of Dynamic Syst. Meas. and Contr.*, Vol. 112, pp. 325~336, 1994
- [7]Ching-An lin; Yaw-Kuen Jan, "Control Systems Technology", *IEEE Transactions on*, Volume: 9 Issue: 1, Page(s): 122 -129, Jan. 2001
- [8]Byung-Shul Suh, "Tuning of PID Regualtors for a Second Order System via LQR Approach", *15th International Conference on Electrical Machines*, Brugge Belgium, 25~28 August 2002.
- [9]Jian-Bo He, Qing-Guo Wang and Tong-Heng Lee, "PI/PID controller tuning via LQR approach", *Chemical Engineering Science*, Vol. 55, No. 13, pp. 2429~2439, 2000.
- [10]Marshall J.E, "Control of time-delay systems." London:Peter Peregrinus LTD. 1979