2002년도 대한전자공학회/대한전기학회 시스템 및 제어분야 합동 추계학술대회 논문집(2002.11.30)

비선형 추가입력을 이용한 도립 진자의 부분 궤환 선형화 제어기 설계

김 용 준, 염 동 회, 최 진 영
서울대학교 전기 · 컴퓨터 공학부
전화 : 02-872-7283 / 핸드폰 : 018-237-0368

A partial feedback linearization control of inverted pendulum by using nonlinear additional input

Yong Jun Kim, Dong Hae Yoem , Jin Young Choi
School of Electrical Engineering & Computer Science, Seoul National University
E-mail : yjkim@neuro.snu.ac.kr

Abstract

This paper proposes a new nonlinear controller to swing-up an inverted pendulum system mounted on a car. This controller considers not only the pendulum but also the displacement of the cart. A single-input multi-output system is considered to control the inverted pendulum by using partial feedback linearization and nonlinear additional input. The asymptotic stability of the system is shown by using Lyapunov function. The simulation results show effectiveness of the proposed controller.

Ⅰ. 서 론

도립 진자는 비선형성이 강하고 불안정한 대표적인 플랜트로 제어시스템의 성능 평가를 위한 제어대상으로 많은 연구가 진행되어 왔다. 그러나 대부분의 기존 연구들은 평형점 주위에서 선형화된 근사모델에 대해서만 제어가 이루어지며 선형화에 따른 오차에 의해 정밀한 제어가 이루어지지 않는다는 단점을 지닌다[1-2]. 이를 극복하기 위해 설계된 퍼지제어, 신경망 제어를 이용한 제어기 역시 구성이 복잡하고 계산량이 많다는 단점을 지니고 있다[3-4]. 따라서 도립 진자의 비선형성을 고려한 보다 간단한 구조를 지닌 제어기에 대한 연구가 요구된다.

본 논문에서는 부분 궤환 선형화와 부가입력을 이용하여 도립 진자의 비선형성을 감안한 보다 간단한 구조를 지니는 비선형 제어기를 설계하였다. 수레 위에 거꾸로 진자를 매단 도립 진자에 대해서 수레의 위치와 막대의 각도를 동시에 제어한다. Ⅱ에서는 수레 위에 거꾸로 진자를 매단 도립 진자 시스템의 모델식을 구하고 Ⅲ에서는 비선형 제어기를 설계하고 안정성을 보인다. Ⅳ에서 모의실험을 통해 논문에 사용된 제어기 성능의 타당성을 확인하고 마지막으로 Ⅴ에서는 결론을 맺는다.

Ⅱ. 도립 진자 시스템의 구조

본 장에서는 수레 위에 거꾸로 진자가 매달린 직선 이동형 도립 진자 시스템의 모델식을 구한다[5-6].

2.1 시스템 모델링

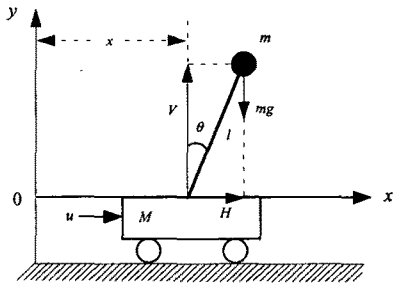

그림 1. 도립 진자 시스템 모델

도립 진자의 수학적 모델을 유도하기 위해 다음의 가정을 도입한다.

가정 1 :
1. 진자의 질량은 막대 끝에 집중되어 있다.
2. 막대는 질량이 없는 강체로 가정한다.
3. 무게 중심에 대한 진자의 관성 모멘트는 0으로 가정한다.
4. 진자는 x,y방향의 평면상으로만 움직이는 2차원 문제로 고려한다.

그림 1에서 m은 진자의 질량, M은 수레의 질량, l은 막대의 길이, k는 수레와 지면사이의 마찰계수, I은 무게중심에 대한 진자의 관성모멘트, g은 무게중심, θ은 막대와 수직선이 이루는 각, x은 수레의 위치, H는 추축의 수평방향으로 반작용하는 힘, V는 추축의 수직방향으로 반작용하는 힘을 나타낸다. 입력 u는 모터에 의해 수레에 작용한다. 뉴튼의 법칙에 의하여 진자의 수평 및 수직운동은 각각

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x+l\sin\theta)=H \tag{1}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta)=V-mg \tag{2}$$

이고, 무게중심에 대한 진자의 회전운동은

$$I\ddot{\theta}=Vl\sin\theta-Hl\cos\theta \tag{3}$$

이다. 한편 수레의 수평운동은 다음과 같다.

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=u-H-k\dot{x} \tag{4}$$

식(1)에서 식(4)로부터 V,H를 소거하면 다음의 운동방정식을 얻는다.

$$I\ddot{\theta}=mgl\sin\theta-ml^2\ddot{\theta}-ml\ddot{x}\cos\theta \tag{5}$$

$$M\ddot{x}=u-m(\ddot{x}+l\ddot{\theta}\cos\theta-l\dot{\theta}^2\sin\theta)-k\dot{x} \tag{6}$$

이를 $\ddot{x}$와 $\ddot{\theta}$에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta(\theta)}\begin{bmatrix}-ml\cos\theta & I+ml^2\\ m+M & -ml\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}mgl\sin\theta\\ u+ml\dot{\theta}^2\sin\theta-k\dot{x}\end{bmatrix} \tag{7}$$

여기서,

$$\Delta(\theta)=(I+ml^2)(m+M)-m^2l^2\cos^2\theta \geq(I+ml^2)M+mI>0 \tag{8}$$

이다.

2.2 상태공간 모델 방정식

상태변수를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned}x_1&=x-r\\ x_2&=\dot{x}\\ x_3&=\theta\\ x_4&=\dot{\theta}\end{aligned} \tag{9}$$

여기서 r은 수레위치의 지령값이다. 가정 1로부터 $I=0$으로 하면, 다음과 같은 도립 진자의 모델식을 구할 수 있다.

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=\dfrac{1}{M+m\sin^2x_3}\{-mg\sin x_3\cos x_3+mlx_4^2\sin x_3-kx_2\}\\ \qquad+\dfrac{1}{M+m\sin^2x_3}u\\ \dot{x}_3=x_4\\ \dot{x}_4=\dfrac{1}{l(M+m\sin^2x_3)}\{-mlx_4^2\sin x_3\cos x_3+kx_2\cos x_3+(M+m)g\sin x_3\}\\ \qquad+\dfrac{-\cos x_3}{l(M+m\sin^2x_3)}u\end{cases} \tag{10}$$

한편, 시스템의 출력은 수레의 상대위치와 진자의 각도로 다음과 같이 정의한다.

$$y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-r\\ \theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_3\end{bmatrix} \tag{11}$$

즉, x_1과 x_3을 두 개의 출력으로 간주한다.

Ⅲ. 비선형 부분 궤환 선형화 제어기 설계

2장에서 구한 모델식을 다음과 같은 어파인 비선형 형태(affine nonlinear form)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=f_2(x)+g_2(x)u\end{cases}\ \text{부분1}$$
$$\begin{cases}\dot{x}_3=x_4\\ \dot{x}_4=f_4(x)+g_4(x)u\end{cases}\ \text{부분2} \tag{12}$$

주어진 시스템은 크게 두부분으로 나뉜다. 부분1은 x_1과 x_2의 미분 방정식으로 주어지며 수레의 위치 방정식을 나타낸다. 부분2는 x_3와 x_4의 미분 방정식으로 주어지며 진자의 각도 방정식을 나타낸다.

3.1 부분 궤환 선형화

x_3와 x_4를 0으로 수렴하게 하기 위해 부분2에 대해서 다음과 같이 궤환 선형화 제어기를 설계할 수 있다.

$$u_2 = \frac{1}{g_4(x)}(-f_4(x)+v_2)$$
$$v_2 = -\alpha\, x_3 - \beta\, x_4 \qquad (13)$$

여기서 $\alpha>0$, $\beta>0$는 설계 파라미터이다. 식(13)을 부분2에 대입하면,

$$\ddot{x}_3 + \beta\dot{x}_3 + \alpha x_3 = 0 \qquad (14)$$

임의의 $\alpha>0$, $\beta>0$ 에 대하여 x_3, x_4는 0으로 수렴한다. 한편 입력이 식(13)과 같이 설계될 경우 부분1의 안정성을 알아보기 위해 식(13)을 부분1에 대입하면

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x) + \dfrac{g_2(x)}{g_4(x)}(-f_4(x) - \alpha x_3 - \beta x_4)\end{cases} \qquad (15)$$

이다. 이는 x_1, x_2가 0으로 수렴하는지 여부를 보장하지 못한다. 따라서 이를 보상하기 위한 부가 제어입력을 추가하여 위치 제어를 수행한다

3.2 부가 제어입력 및 안정성 분석

식(13)에 부가적인 제어입력 u_e를 더하여 제어기를 다음과 같이 설계한다.

$$u = u_2 + u_e$$
$$u_e = \frac{\rho}{g_4}\mu \qquad (16)$$

여기서 $\rho>0$는 설계 파라미터이며 μ는 다음과 같다.

$$\mu = \frac{g_4}{g_2}(-\bar{\alpha}x_1 - \bar{\beta}x_2) \qquad (17)$$

단, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$는 양의 상수이다. 식(16)을 다시 나타내면

$$u = \frac{1}{g_4(x)}(-f_4 + v)$$
$$v = -\alpha x_3 - \beta x_4 + \rho\mu \qquad (18)$$

이다. 입력이 식(18)과 같이 주어질 경우 부분1의 안정성을 알아보기 위해 식(18)을 부분1에 대입하면,

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x) + \dfrac{g_2(x)}{g_4(x)}(-f_4(x) - \alpha x_3 - \beta x_4 + \rho\mu)\end{cases} \qquad (19)$$

이 된다. 식(19) 에 식(17)에서 구한 μ를 대입한 후 정리하면 다음과 같다.

$$\ddot{x}_1 + \rho\bar{\beta}\dot{x}_1 + \rho\bar{\alpha}x_1 = f_2 + \frac{g_2}{g_4}(-f_4 - \alpha x_3 - \beta x_4)$$
$$= h(x_3, x_4) \qquad (20)$$

여기에 II에서 구한 f_2, f_4, g_2, g_4 값을 대입하면,

$$h(x_3, x_4) = \frac{1}{M + m\sin^2 x_3}\{-mg\sin x_3\cos x_3 + (M+m)\tan x_3\}$$
$$-\frac{l}{\cos x_3}(-\alpha x_3 - \beta x_4) \qquad (21)$$

이며 $h(x_3, x_4)$는 x_3, x_4로 구성되어 있다. x_3, x_4이 상한되면 $h(x_3, x_4)$도 상한되며 $h(0,0)=0$이므로 $\rho\neq 0$인 경우에 대해 x_3, x_4이 상한되면 x_1, x_2도 상한되며 x_3, x_4이 0으로 수렴하면 x_1, x_2도 0으로 수렴한다. 따라서 부가적인 입력에 대해서 x_3, x_4의 안정성을 보장하도록 ρ를 설계하여야 한다.

정리 1 :
가정 1을 만족하는 식(12)와 같이 주어진 도립 진자 시스템에 대해 제어입력을 식(17), 식(18)과 같이 설계하고, ρ를 다음과 같이 설정하면 x_3, x_4는 점근적으로 안정하다.

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{\beta|x_4|}{|\mu|} - \varepsilon & if \quad \dfrac{\beta|x_4|}{|\mu|} - \varepsilon \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad (22)$$

여기서 $\varepsilon > 0$는 설계 파라미터이다.

증명 :
x_3, x_4의 안정성을 판별하기 위해 리아프노프 함수를 다음과 같이 설정한다.

$$V = \frac{1}{2}(\alpha x_3^2 + x_4^2) \qquad (23)$$

리아프노프 함수의 미분치를 구하면

$$\dot{V} = \alpha\, x_3\dot{x}_3 + x_4\dot{x}_4$$
$$= \alpha\, x_3\dot{x}_3 + x_4(-\alpha\, x_3 - \beta\, x_4 + \rho\mu)$$
$$= -\beta\, x_4^2 + \rho\mu x_4 \qquad (24)$$

이다. ρ가 식(22)를 만족하면 다음이 성립한다.

$$\rho|\mu| < \beta|x_4| \qquad (25)$$

결국 $\dot{V}<0$이 성립하여 x_3, x_4의 점근 안정도가 보장된다.

식(22)와 같이 ρ를 설계하면 식(25)를 만족하게 되어 부가적인 입력항 $\rho\mu$에 대해서 x_3, x_4이 안정하여 0으로 수렴하게 되고, 식(20)에 의하여 x_1, x_2의 경계값이 더욱 작아져 결국 0으로 수렴하게 된다. 여기서 ε는

식(25)를 만족시키기 위해 도입된 값이며 크게 설정되면 ρ가 항상 0이 되어 부분1 제어를 제대로 할 수 없고 너무 작게 설정되면 수렴속도가 늦어진다.

Ⅳ.모의실험

모의실험에서 사용된 매개 변수들의 값은 다음과 같이 설정하였다.

$m = 0.051\ kg,\ M = 1.378\ kg,\ l = 0.325\ m,$

$k = 0.05\ kg \cdot m^2/s,\ g = 9.8\ m/s^2$

식(17)에서 설계변수를 $\bar{\alpha} = 12,\ \bar{\beta} = 15.7143$로 정하고, 식(18)에서 설계변수를 $\alpha = 154.979,\ \beta = 55.107,\ \varepsilon = 0.8$와 같이 정한다. 수레의 위치와 속력, 진자의 각속도는 초기값을 0으로 고정한 후, 진자의 초기 각도를 5° 인 경우와 25° 인 경우에 대하여 모의실험을 하였다. 진자를 세움과 동시에 수레의 위치를 $1m$ 인 곳으로 옮기는 것이 제어 목표가 된다. 그림 3부터 그림 6은 두가지 경우에 대한 모의실험 결과를 보여준다.

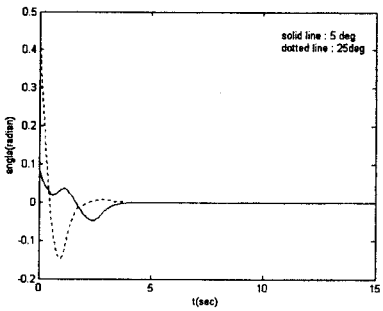

그림 2. 진자의 각도

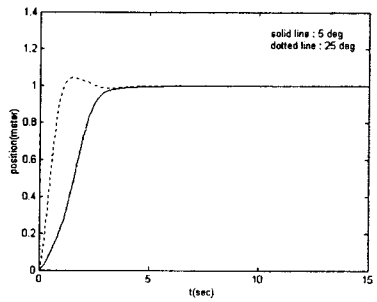

그림 3. 수레의 위치

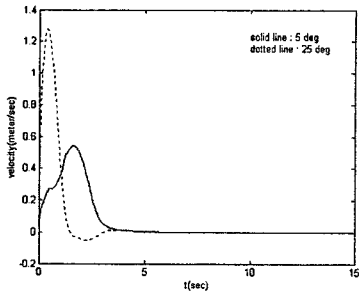

그림 4. 수레의 속도

5초 이내에 진자의 각도와 각속도, 수레의 속도 및 입력값이 0으로 수렴함을 확인할 수 있으며 수레의 위치는 $1m$로 옮겨지는 것을 확인 할 수 있다.

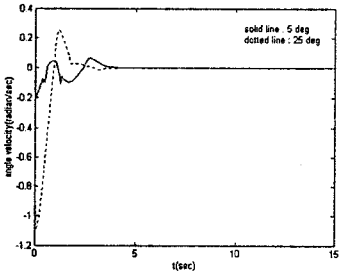

그림 5. 진자의 각속도

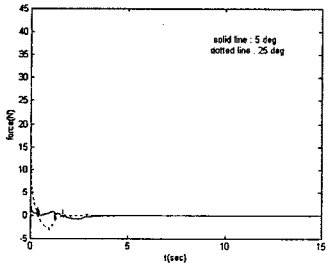

그림 6. 입력

Ⅴ. 결론

본 논문에서는 도립 진자 시스템에 대하여 부분 궤환 선형화와 비선형 추가 제어입력을 이용해 수레의 위치와 막대의 각도를 동시에 제어하는 간단한 구조의 비선형 제어기를 설계하였다. 먼저 부분 궤환 선형화를 통해 각도 제어를 기본적으로 수행한 후 비선형 추가 입력항을 결합하여 위치 제어를 동시에 수행하게 된다. 설계된 제어기의 폐루프 시스템 안정성 해석을 위

해 리아푸노프 함수를 이용하여 각 부분의 안정성을 보였다. 또한 모의실험을 통해 본 제어기의 성능이 우수함을 확인하였다.

참고문헌

[1] S.Kajita and K.Tani, Experimental study of biped dynamic walking in the linear inverted pendulum mode ,Proc. 1995 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, pp. 2885-2891,1995

[2] M.W.Spong, L.Praly, Control of underactuated mechanical systems using switching and saturation , Proc. of the Block Island Workshop on Control Using Logic Based Switching, Springer-Verlag, London, UK, 1996

[3] J.Hao, S.Tan, J.Vandewalle, "A Rule-Based Neural Controller for Inverted Pendulum System", IEEE International Conference on , pp.534-539, vol.1, 1993

[4] S.Omatu, T.Fujinaka, M.Yoshioka, "Neuro-PID Control for Inverted Single and Double Pendulums", Systems, Man, and Cybernetics, 2000 IEEE International Conference on, pp. 2685-2690, vol.4, 2000

[5] Hassan K. Khalil, "*Nonlinear Systems*", 2nd edition, Prentice-Hall, 1996.

[6] Katsuhiko Ogata, *"Modern Control Engineering Theory"*, 3nd edition, Prentice-Hall, 1999.