2002년도 대한전자공학회/대한전기학회 시스템 및 제어분야 합동 추계학술대회 논문집(2002.11.30)

추가 보정항을 이용한 시변 시스템의 기준 모델 적응 제어

이 동 현*, 윤 태 웅
고려대학교 전기공학과
전화 : 02-3290-3687 / 핸드폰 : 011-9049-7369*

Model Reference Adaptive Control of a Linear Time-Varying System with an Additional Compensation Term

Dong-Hyun Lee, Tae-Woong Yoon
School of Electrical Engineering, Korea University
E-mail : dhlee@cello.korea.ac.kr

Abstract

In this paper model reference adaptive control (MRAC) of linear time-varying(LTV) systems is cosidered. MRAC for a linear time invariant(LTI) system does not assure the boundedness of the output and parameter estimation errors in the presence of time variations of the parameters. However, changing the adaptive laws such as use of σ-modification can result in the boundedness of the output and parameter estimation errors[5].

Together with the σ-modification in the adaptive law, we also modify the control law by adding an additional term to the standard control law. The addtional term leads to smaller bounds of the output and parameter estimation errors when compared to the case where only the standard control law is applied.

I. 서론

본 논문에서는 시변 시스템에 대해서 변형된 MRAC(기준 모델 적응 제어)를 제안한다. 시변 시스템에 MRAC을 적용하는데 있어서 오차의 유계성을 보장하기 위해서 σ-변형법을 이용하여 제어 파라메타 추정 법칙을 수정하고, 더불어 제어 법칙도 보정항을 추가함으로써 수정을 가한다. 제어 법칙에 추가된 보정항에 상응하는 항을 보조 오차 방정식에도 추가한다. 이렇게 함으로써 유사 리아프노프 함수(Lyapunov-like function)의 미분의 상한을 줄일 수 있다.

II. 제어 대상 시스템과 기준 모델

본 논문에서 다루는 제어 대상 시스템과 모델의 전달함수(transfer function)는 각각 다음과 같다.

$$W_p(s) = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}, \quad W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \qquad (1)$$

위 식 (1)에서의 제어 대상 시스템과 모델에 대해 MRAC를 적용하는데 사용하는 일반적인 가정들은 다음과 같다[1-4].

가정 1.

(i) $W_p(s)$의 상대 차수 n^*와 고주파 이득 k_p를 알고 있다.

(ii) $W_m(s)$의 상대차수가 $W_p(s)$의 것과 같다.

(iii) $W_m(s)$과 $W_p(s)$가 모두 최소 위상 시스템이다.

위 가정 1의 (i)에서 고주파 이득 k_p은 MRAC에서 부호만을 요구하지만 본 논문에서는 문제를 간단히 하기 위해서 그 값을 알고 있다고 가정한다. 시변 시스

템의 MRAC에서는 다음과 같이 제어 파라메타에 대한 가정이 추가로 필요하다.

가정 2.

$$\| \theta^* \| \le \| \theta^* \|_{\max}, \quad \| \dot{\theta}^* \| \le \| \dot{\theta}^* \|_{\max} \tag{2}$$

위에서 θ^*는 추정해야할 파라메타의 참값이다. 위 식 (2)의 조건은 파라메타와 그것의 시간에 따른 변화가 상한이 존재한다는 것이다.

III. 추가 보정항을 이용한 변형된 MRAC

3.1 σ-변형법(σ-modification)

σ-변형법에서는 다음과 같이 기존의 추정 법칙에 $\sigma\theta$항을 추가한 수정된 추정 법칙을 이용한다.

$$\dot{\theta} = -\varepsilon\xi - \sigma\theta \tag{3}$$

이와 같이 수정된 추정 법칙은 시변 시스템에 대한 MRAC에서 오차들이 유계임(boundedness)를 보장하고, 시스템의 안정도를 보장한다[5].

3.2 변형된 MRAC

본 절에서는 제어 법칙에 보정항을 추가하여 오차들의 크기를 줄이는 변형된 MRAC를 제안한다.

식 (1)에서의 제어 대상 시스템의 상태 공간 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b_c u \\ y_p &= h_c^T x \end{aligned} \tag{4}$$

위 식 (4)에서 $x^T = [\, x_p^T,\ v_1^T,\ v_2^T]$, $x_p \in R^n$, $v_1, v_2 \in R^{n-1}$이다. 여기서 보조 신호 v_1, v_2는 다음과 같이 방정식 통해서 얻어진다.

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &= \Lambda v_1(t) + \ell\, u(t) \\ \dot{v}_2(t) &= \Lambda v_2(t) + \ell\, y_p(t) \end{aligned} \tag{5}$$

식 (5)에서 $\ell \in R^{n-1}$이고, 점근적으로 안정한 행렬 $\Lambda \in R^{(n-1)\times(n-1)}$이다. 식 (1)에서의 기준 모델에 대한 상태 공간 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= A_c + b_c r \\ y_m &= h_c^T x_m \end{aligned} \tag{6}$$

본 논문에서 제안된 제어기는 다음 식 (7)과 (8)과 같다.

$$u = r + \theta^T w - K(\varepsilon_1) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_a = A_c x_a + b_{PR}[&\{L^{-1}(s)\theta - \theta L^{-1}(s)\}^T \omega \\ &+ \alpha\varepsilon_1 \xi^T \xi - \varphi(\varepsilon_1)\{(L^{-1}(s) f(\varepsilon_1) \\ &- f(\varepsilon_1) L^{-1}(s)) g(\varepsilon_1)\}] \\ y_a = h_c^T x_a & \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 $w = [\, v_1^T,\ y_p,\ v_2^T]$이고, ε_1는 증대 오차(augmented error)이다. $K(\varepsilon_1)$, b_{PR}, $P_L(\theta)$, $\xi(t)$, $\varphi(\varepsilon_1)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & f(\varepsilon_1) = G\varepsilon_1,\ g(\varepsilon_1) = \frac{1}{\varepsilon_1^2 + \delta} \\ & \varphi(\varepsilon_1) = \frac{|\varepsilon_1 \overline{K}(\varepsilon_1)|}{\beta + |\varepsilon_1 \overline{K}(\varepsilon_1)|},\ \overline{K}(\varepsilon_1) = L^{-1}(s) K(\varepsilon_1) \\ & h_c^T (sI - A_c)^{-1} b_{PR} = W_m(s) L(s) \\ & P_L(\theta) = L(s)\theta L^{-1}(s) \\ & \beta,\ \delta,\ G > 0 (\beta,\ \delta,\ G : \text{상수}) \end{aligned} \tag{9}$$

(정리 3.1)

(i) 제안된 제어기에 의한 시스템의 오차들은 유한하다.

(ii) 다음 조건이 만족하면 제어기 설계시 사용한 유사 리아프노프 함수(Lyapunov-like function)의 미분의 상한이 σ-변형법만을 사용했을 때에 비해 줄어든다.

$$\sqrt{\frac{\beta\gamma\delta}{G}} \le M_2 \tag{10}$$

여기서 M_2는 σ-변형법만 사용한 경우의 유사 리아프노프 함수의 미분의 상한이며, γ는 $L^{-1}(s)$의 저주파 이득이다.

(증명)

식 (7)의 제어 입력을 이용하면 식 (4)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + b_c[r + \phi^T \omega - K(\varepsilon_1)] \\ y_p &= h_c^T x \end{aligned} \tag{11}$$

여기서 $h_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c = W_m(s)$이다. 다음과 같이 오차들을 정의한다.

$$\begin{aligned} e &= x - x_m,\ e_1 = y - y_m \\ \varepsilon &= e - x_a,\ \varepsilon_1 = e_1 - y_a \end{aligned} \tag{12}$$

위에서 정의된 오차들을 이용해서 오차 방정식을 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = A_c \varepsilon + b_{PR}[&\phi^T \xi + \alpha\varepsilon_1 \xi^T \xi + (\varphi(\varepsilon_1) - 1)\overline{K}(\varepsilon_1) \\ &- \varphi(\varepsilon_1) f(\varepsilon_1) L^{-1}(s) g(\varepsilon_1)] \\ \varepsilon_1 = h_c^T \varepsilon & \end{aligned} \tag{13}$$

리아프노프 후보 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V = \varepsilon^T P \varepsilon + \phi^T \phi \tag{14}$$

위 식 (14)에서 P는 다음과 같은 조건을 만족하는 양의 행렬이다.

$$PA+A^TP=-Q,\ P=P^T>0,\ Q=Q^T>0 \qquad Pb_{PR}=h_c \tag{15}$$

식 (14)의 리아프노프 후보 함수의 시간 미분을 전개하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &\le -\varepsilon^T Q\varepsilon - 2\sigma(\|\phi\|-M_1)^T + M_2 \\ &\quad - \alpha\varepsilon_1^2\xi^T\xi + F \\ &\le -\varepsilon^T Q\varepsilon - 2\sigma(\|\phi\|-M_1)^T + M_2 + F \end{aligned} \tag{16}$$

여기서 M_1, M_2, F는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_1 &= \left(\sigma\|\theta^*\|_{\max} + \|\theta^*\|_{\max}\right)/\,2\sigma \\ M_2 &= \left(\sigma\|\theta^*\|_{\max} + \|\theta^*\|_{\max}\right)^2/\,2\sigma \\ F &= 2\varepsilon_1\{(\varphi(\varepsilon_1)-1)\overline{K}(\varepsilon_1) \\ &\quad - \varphi(\varepsilon_1)f(\varepsilon_1)L^{-1}(s)g(\varepsilon_1)\} \end{aligned} \tag{17}$$

식 (9)으로 정의된 함수들을 식 (17)의 F에 대입하고 전개하면 다음과 같다.

$$F \le 2\frac{|\varepsilon_1\overline{K}(\varepsilon_1)|}{\beta+|\varepsilon_1\overline{K}(\varepsilon_1)|}\left\{\beta-\frac{G}{\gamma\delta}\varepsilon_1^2\right\} \tag{18}$$

만약 다음과 같은 조건이 만족되면 $F\le 0$임을 알 수 있다.

$$\sqrt{\frac{\beta\gamma\delta}{G}} \le |\varepsilon_1| \le \|\varepsilon\| \tag{19}$$

위 식 (19)의 조건이 만족되면 $F\le 0$이므로 식 (16)로부터 오차 ε와 ϕ가 유계임을 알 수 있다.

σ-변형법만 사용한 경우에는 식 (16)에서 F가 없고, 유사 리아프노프 후보 함수의 미분의 상한은 M_2이다. 따라서 식 (10)의 조건이 만족하면 $F\le 0$이고, 제안된 방법에 의한 유사 리아프노프 함수의 미분의 상한 M_2+F이 σ-변형법만 사용한 경우보다 작다. □

상대차수가 1인 경우에는 증대 오차의 도입이 없기 때문에 위 증명으로부터 σ-변형법만 사용한 경우보다 e_1의 크기가 작아짐을 보장할 수 있다. 상대차수가 2 이상인 경우에는 유사 리아프노프 함수의 상한의 크기 감소를 보장할 수 있지만, 오차의 크기 감소를 보장할 수 없다. 하지만 IV장의 모의 실험 결과로부터 제안된 방법의 경우 $|y_a|$가 σ-변형법만 사용한 경우보다 작기 때문에 $|e_1|$도 또한 제안된 방법의 경우가 더 작음을 확인할 수 있다.

IV. 모의 실험

다음 예제에 대한 모의 실험을 σ-변형법과 제안된 방법에 대해서 각각 행하고 그 결과를 그림 1-5에 나열하였다.

(예제) 상대차수가 2인 시스템

제어 대상 :

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1(t) & -a_2(t) \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y_p = [\,1\ \ 0\,]\,x_p$$

$$a_1 = 1+0.5\cos(0.05t),\quad a_2 = 1+0.5\cos(0.05t)$$

모델 : $W_m(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+1}$

$$L(s)=s+1,\ \beta=0.1,\ \delta=0.001,\ G=30$$

그림 1-5에서 제안된 방법에서의 ε_1이 σ-변형법의 경우보다 작아짐을 알 수 있다. 또한 작아진 y_a때문에 e_1도 또한 크게 감소하였음을 알 수 있다.

그림 4에서 보면 제어 파라메타 추정치가 0과 가까운 값으로 감소함을 볼 수 있는데 이것은 ε_1이 0에 가까운 값이 된다면 제어 파라메타 추정 법칙이 $\dot{\theta}\approx-\sigma\theta$가 되고, θ도 또한 0에 가까운 값으로 감소하기 때문이다. 마치 추가된 보정항의 영향으로 추정기가 필요없는 것처럼 보인다. 하지만 추정기가 없다면 오차들의 유계성을 보장할 수 없다. 그림 6와 7은 기준 입력의 크기를 200, $G=10$, a_1과 a_2의 변화를 $1+0.99\cos(0.05t)$로 수정했을 때 추정기의 유무에 따른 결과를 보여준다.

V. 결론

III절에서 제안한 변형된 MRAC는 오차의 유한성을 보장하면서 σ-변형법만을 사용한 경우보다 유사 리아프노프 함수의 미분의 상한을 감소시킬 수 있다. 하지만 ε과 σ-변형법에서의 ε이 각각 다른 보조 오차 방정식을 이용하여 만들어진 신호이기 때문에 제안된 방법으로 얻어진 e_1이 σ-변형법에서의 경우보다 작아진다는 보장은 할 수 없다. 하지만 모의 실험의 결과를 보면 y_a의 크기가 작아짐으로써 e_1의 크기도 작아짐을 확인할 수 있다. 제어 법칙에 추가된 보정항의 영향으로 제어 파라메타 추정치가 0에 가까운 값으로 감소하여 추정기의 역할이 작지만 안정도를 보장하기 위해서는 추정기가 필요하다.

참고문헌

[1] Narendra, K. S. and Annaswamy, A. M,. *Stable Adaptive Systems* Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall., 1989

[2] Qu, Z., Dorsey, J. F. and Dawson, D. M., "Model

Reference Robust Contorl of a Class of SISO Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. 39, No. 11, pp. 2219-2234, 1994

[3] Sun, J., "A modified Model Reference Adaptive Control Scheme for Improved Transient Performance," *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. 39, No. 11, pp. 1255-1259, 1993

[4] Miyasato, Y., "A simple Redesign of Model Reference Adaptive Control System and Its Robustness," *in Proc. 37th IEEE Conf. Decis. Contr. 1998*

[5] Ioannou, P. A. and Kokotovic, P. V., Adaptive Systems with Reduced Models. New York: Springer-Verlag, 1983

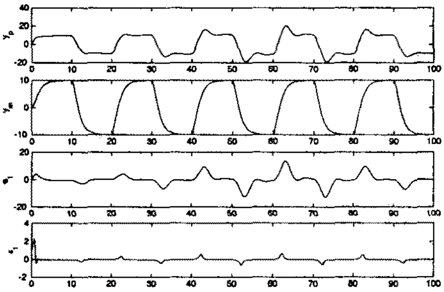

그림 1. σ-변형법 : y_p, y_m , e_1, ε_1

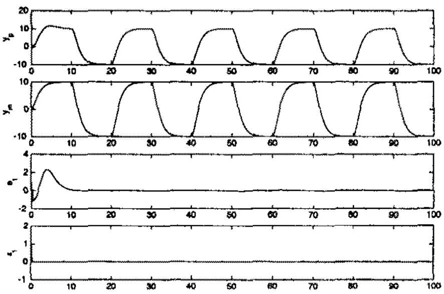

그림 2. 제안된 방법 : y_p, y_m , e_1, ε_1

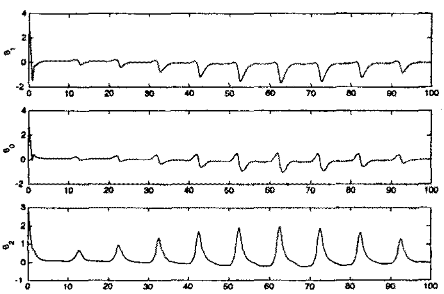

그림 3. σ-변형법 : 파라메타 추정치

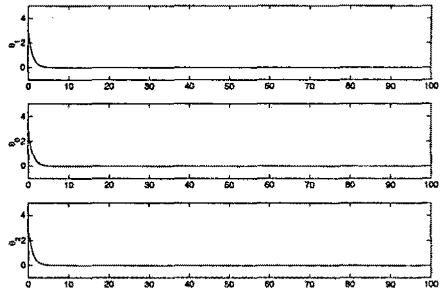

그림 4. 제안된 방법 : 파라메타 추정치

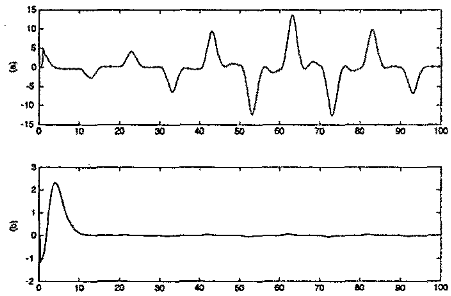

그림 5. y_a 비교 : (a) σ-변형법, (b) 제안된 방법

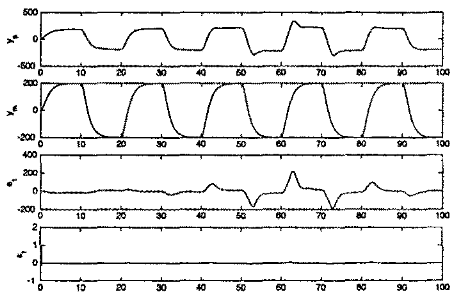

그림 6. 추정기가 있는 경우 : y_p, y_m , e_1, ε_1

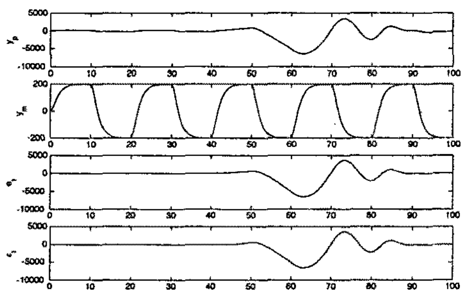

그림 7. 추정기가 없는 경우 : y_p, y_m , e_1, ε_1