

2관성 전동기 속도 시스템에서 LQR방법 에 의한 I-PD 제어기 설계

박용성, 서병설

한양대학교 전기공학과

전화 : 02-2290-0364 / 핸드폰 : 011-9162-6278

I-PD Controller Design using LQR Method in a Two-Mass Motor Drive System

Yong-Sung Park, Byung-Suhl Suh

Devison of Electrical and Computer Engineering, Hanyang University

E-mail : yong0925@yahoo.co.kr

Abstract

This paper presents I-PD controller design using LQR method in a two-inertia motor system to satisfy the design specification in time domain. And to provide a systematic LQ analysis for two-inertia motor system. The tuning parameters of LQ(I-PD) controller are determined by the relationships between the design parameters of the overshoot and the settling time which are design specifications in time domain, and the weighting factors Q and R in LQR. we can achieve the performance-robustness in time domain as well as the stability-robustness.

I. 서론

산업용 로봇, 전기 자동차의 구동부, 철강 플랜트의 압연기 구동계, 엘리베이터 등과 같이 전동력을 기계적 부하로 전달하는 가변속도 제어용 2관성 공진계는 산업현장에서 널리 사용되고 있다 [1]-[2]. 2관성 전동기 속도 시스템은 전동기와 부하의 관성에 의해 축에 비틀림 진동이 발생한다.

특히 축이 길고 부하축 질량이 큰 압연용 전동기 구동 시스템이나 유연성 결합을 가진 로봇 팔과 같이 2개 혹은 그 이상의 질량이 저장성의 축으로 연결되어 있는 시스템의 경우는 시스템 자체의 기계적인 공진주파수가 수 Hz ~ 수십 Hz 정도로 매우 낮기 때문에 PI제어기와 같은 제어방식으로는 제어하기 어렵다. PI제어기는 제어대상을 1계 시스템으로 근사화하는 것이 가능한 경우에만 잘 적용되지만 2관성계의 시스템과 같이 제어대상이 고차이고 진동하는 특성을 갖는 경우에는 속도명령 변화시나 부하토크 인가시 축에 비틀림 진동이 일어나 제어하기 어렵고 심한 경우 공진이 계속되어 축이 손상되는 문제점이 있다. 따라서 제어 명령치를 서서히 증가시키거나 제어기 이득을 낮추는 방법 또는 축의 직경을 크게 하여 강성을 높이는 등의 초보적인 방법이 있으나 빠른 속도 응답을 얻을 수 없고 경제성의 측면에서도 문제가 된다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 전동기와 부하 속도차이의 피드백 루프를 추가하는 방법[3], 축 토크 대신에 전동기 속도차이를 피드백하는 방법[4], 상태 관측기를 이용하는 방법[5] 등이 연구되고 있다. 그러나 이들 방법은 전동기 속도로부터 부하 속도가 유도된 후 제어할 수 있으며, 외란에 민감하는 문제점이 있다. 이런 문제를 해결하기 위하여 최근에 강조되는

최적화 방법과 시스템의 강인성을 보장 할 수 있는 설계 방법이 많이 연구되고 있다[6][7]. 그러나 이들 방법들은 수학적으로 난해하고, 복잡한 제어 이론이 요구되어 실용적인 면에서는 상당한 제한이 있다. 반면 I-PD제어기는 제어이론이 간단하여, 이용자의 편리성 및 범용성은 더욱 증가하는 추세에 있다[8][9]. 그러나 이들 방법은 제어 파라미터들의 동조 방법이 시행착오에 의해서 결정되며, 수정한 ITAE 성능지수 평가에 의해 각각의 제어기 파라미터를 결정하였다. 본 논문에서는 Suh[10]을 기반으로 2관성 전동기 속도시스템을 안정도-강인성 뿐만 아니라, 시간 영역에서의 성능-강인성을 보장할 수 있는 LQ방법으로 시스템을 재구성하며, LQ(I-PD)제어기 동조방법을 제안한다. LQ(I-PD)제어기의 파라미터는 가역함수의 가중요소 Q와R에 의해서 결정되어진다. Q와R 행렬의 선정은 오버슈트와 정착시간을 조절할 수 있는 설계파라미터들의 관계에 의해서 결정할 수 있다.

II. 본론

2-1. 2관성 전동기 시스템의 구조

축에 의해 결합된 전동기와 부하의 2-관성 전동기 시스템 구조는 그림 1과 같다

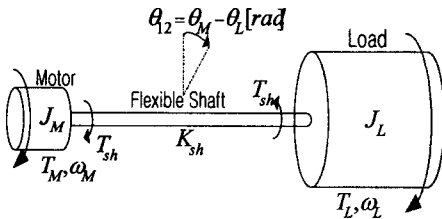


그림1. 2-관성 전동기 시스템의 구조

J_M : 전동기관성, J_L : 부하관성, T_L : 부하토크

W_M : 전동기속도, W_L : 부하속도, T_{sh} : 축토크

T_m : 전동기토크, K_{sh} : 구동축의 비틀림

θ_m : 전동기각, θ_L : 부하각

2-관성 전동기 시스템에서 마찰력과, 감쇠는 매우 작고 시스템에 영향을 미치지 않기 때문에 무시되어진다. 2관성 전동기 시스템의 블록 선도는 그림2와 같다.

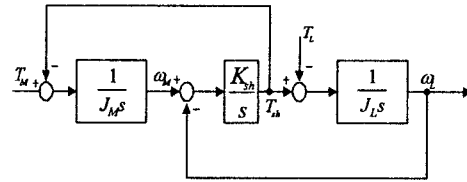


그림2. 2-관성 시스템의 블록 선도

2관성 전동기 시스템의 상태 방정식은 식(1)과 같이 표현된다.

$$\dot{X}(t) = AX(t) + T_m B(t) + E T_L(t)$$

$$Y(t) = CX(t) \quad (1)$$

여기서 출력 벡터 $Y = W_L$, 상태 벡터

$$X = [w_m \ w_L \ \theta_{12}]^T, \theta_{12} = \theta_m - \theta_L$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{K_{sh}}{J_m} \\ 0 & 0 & \frac{K_{sh}}{J_L} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ 1 \ 0] \quad (2)$$

전동기 토크에서 부하 속도까지의 전달함수는 식(3)과 같다

$$G(s) = \frac{W_L}{T_m} = \frac{1}{J_m s} \frac{W_o^2}{s^2 + W_o^2} \quad (3)$$

W_a : 반 공진주파수, W_o : 공진 주파수

R : 공진비, K : 전동기와 부하의 관성비

공진 주파수 (W_o)는 $|SI - A| = 0$ 에 의해 결정된다.

$$W_o = W_a \sqrt{1+K}, K = \frac{J_L}{J_M}, w_a = \sqrt{\frac{K_{sh}}{J_L}}$$

$$R = \frac{W_o}{W_a} = \sqrt{1+K}$$

2-2. LQR방법에 의한 I-PD제어기 설계 및 해석

전달 함수 $G(s)$ 즉 식 (3)을 상태 공간표현으로 나타내는 방법은 여러 가지가 있다. 그 중에서 가장 많이 사용하고 해석하기 쉬운 가제어성 상태 공간 표현을 사용하여 위의 페루프 전달함수를 가제어성(C.C.F(cannonical controllable form)) 형태로 표현할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & f & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (4)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -\frac{K_s}{J_M J_L} & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (5)$$

$$f = \frac{-(J_L K_s + J_m K_L)}{J_m J_L} \quad (6)$$

플랜트에 미분요소를 첨가시킨 새로운 상태변수를 도입하여 최적제어법칙을 적용했다.

$$\dot{x}(t)_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (7)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{K_f}{J_m J_L} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (8)$$

$x_4 = \dot{x}_3$ 는 미분요소를 첨가한 새로운 상태(state)이다.

LQR로 해석하기 위해서 식(9)와 같은 2차가적함수를 고려하자.

$$J(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (9)$$

여기서 Q는 양의 반한정(positive semi-definite) 대칭행렬인 상태가중행렬이고, R은 양의 한정(positive definite) 대칭행렬인 제어가중행렬이다. 그러면 제관제어법칙은 다음과 같다.

$$u(t) = -G x(t) \quad (10)$$

$$G = R^{-1} B^T K \quad (11)$$

여기서 G는 제어게인행렬이고, K는 양의 반한정 대칭행렬이고 다음 Riccati식의 해이다.

$$KA + A^T K + Q - KBR^{-1}B^T K = 0 \quad (12)$$

$u(t) = u(t) = -Gx(t)$ 식(10)을 식(7)에 대입하면 다음과 같은 C.C.F 형태로 표현할 수 있다.

$$\dot{x}(t)_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -G_1 & -G_2 & f - G_3 & -G_4 \end{bmatrix} x_a(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} W_r \quad (13)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{K_f}{J_m J_L} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_a(t) \quad (14)$$

I-PD 제어가 LQR방법에 의한 최적의 값을 얻기 위해서 전달함수를 이용하여 LQ 형태로 만든 것이다.

K와 상태가중행렬 Q를 다음과 같이 놓고,

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Riccati방정식 식(12)에 대입하면 아래와 같이 K

에 관한 식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Q_{11} = K_{14}^2 \quad (17)$$

$$Q_{22} = K_{24}^2 - 2K_{12} \quad (18)$$

$$Q_{22} = K_{34}^2 - 2K_{23} - 2fK_{34} \quad (19)$$

$$Q_{44} = K_{44}^2 - 2K_{34} \quad (20)$$

I-PD 제어를 가진 2관성 전동기 속도 시스템은 그림 3과 같다.

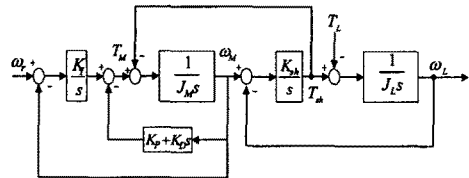


그림3. I-PD 제어를 가진 2관성 전동기 시스템 기준 입력(W_r)에서 부하 속도(W_L)까지의 페루프 전달함수는 다음과 같다

$$\frac{W_L(s)}{W_r(s)} = \frac{K_f W_a^2}{den(1)} \quad (21)$$

den(1)=

$$S^4 (J_m + K_d) + K_p S^3 + (J_m W_o^2 + K_d W_a^2 + K_f) S^2 + K_p W_a^2 S + K_f W_a^2 \quad (22)$$

식(22) 페루프 전달함수를 C.C.F(canonical controllable form) 형태로 표현할 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-e}{a} & \frac{-d}{a} & \frac{-c}{a} & \frac{-b}{a} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} W_r(t) \quad (23)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{e}{a} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (24)$$

$a = J_m + K_d, \quad b = K_p, \quad c = J_m W_o^2 + K_d W_a^2 + K_f,$
 $d = K_p W_a^2, \quad e = K_f W_a^2 \quad (25)$

LQR 형태의 전달함수 가제어성(C.C.F) 상태 방정식(13),(14)과 페루프 전달함수 가제어성(C.C.F) 상태 방정식(23),(24)은 같기 때문에 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$K_{14} = \frac{K_f W_a^2}{J_m + K_d}, \quad K_{24} = \frac{K_p W_a^2}{J_m + K_d} \quad (26)$$

$$K_{34} = \frac{J_m + K_d W_a^2 + K_f}{J_m + K_d} + f, \quad K_{44} = \frac{K_p}{J_m + K_d} \quad (27)$$

시간 영역의 설계 사양을 만족하는 극점(pole) 위치의 제약 조건은 다음과 같다.

$$K_{44} W_a^2 = K_{24} \quad (28)$$

페루프 전달함수를 2개의 공역 복소근을 갖는 관계식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{W_1^2 W_2^2}{(s^2 + 2\zeta_1 W_1 s + W_1^2)(s^2 + 2\zeta_2 W_2 s + W_2^2)}$$

$W_a = W_1 = W_2$ 같을 때 극점 제약 조건을 만족한다. 식(26), (27)에 의해 I-PD제어기가 설계된다.

$$K_I = \frac{K_{14} J_m + K_{14} K_d}{W_a^2}, \quad K_P = K_{44} (J_m + K_d) \quad (29)$$

$$K_d = \frac{-J_m K_{14} - J_m W_a^2 W_a^2 - f J_m W_a^2 + J_m K_{34} W_a^2}{K_{14} + W_a^4 + f W_a^2 - K_{34} W_a^2}$$

III. 예 제

J_m : 전동기 관성비[$Kg m^2$]= 7.455×10^{-5}

J_L : 부하 관성비[$Kg m^2$]= 5.591×10^{-5}

W_a : rad/s=30, W_o : [rad/s]=39.69, K_{44} : [Nm/rad]=0.05

본 논문에서 제안한 LQ-PID 제어기 동조방법을 이용하면 다음과 같다.

단계1. 식(28)을 만족하는 Q를 결정한다.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4624 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.4492e+006 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.1212e+003 \end{bmatrix}$$

단계2. Q가 결정되면 Riccati방정식에 의해 K값이 나온다.

$$K = \begin{bmatrix} 0.0035e+003 & 0.0054e+003 & 0.0014e+003 & 801.0258 \\ 0.0054e+003 & 0.0175e+003 & 0.004e+003 & 481.9706 \\ 0.0014e+003 & 0.0035e+003 & -1.5596e+003 & -1.4407e+003 \\ 801.0258 & 481.9706 & -1.4407e+003 & 16.6197 \end{bmatrix}$$

단계3. K값이 결정되면 식(29)에 의해 I-PD제어기를 설계할 수 있다

$K_i = -5.8018e-005$, $K_p = -0.0011$, $K_d = -1.3932e-004$

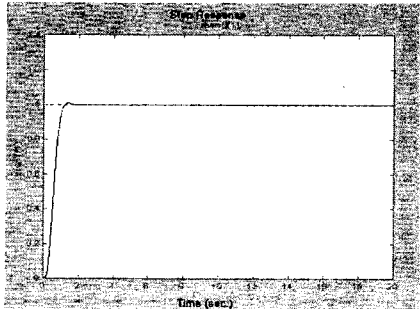


그림4. I-PD제어기의 단위계단응답

IV. 결 론

본 논문에서는 Suh[10]을 기반으로 2관성 전동기 속도 시스템을 안정도-강인성 뿐만 아니라, 시간 영역에서의 성능-강인성을 보장할 수 있는 LQ방법으로 시스템을 재구성하며, LQ(I-PD)제어기 동조방법을 제안한다. LQ(I-PD)제어기의 파라미터는 가격함수의 가중요소 Q와 R에 의해서 결정되어진다. Q와 R 행렬의 선정은 오버슈트와 정착시간을 조절할 수 있는 설계파라미터들의 관계에 의해서 결정할 수 있다.

[참 고 문 헌]

- [1] T.Ohmae and T.Matsuda, " A microprocessor-based motor speed regulator using fast response state observer for reduction of torsional vibration," IEEE. Trans. Ind. Applicat., vol IA-23, pp. 863-871, Sept. Oct. 1987
- [2] R.Dhaouadi, K.Kubo, and M. Tobise, "Two degree of freedom robust speed controller for high performance rolling mill drives," IEEE Trans. Ind. Applicat., vol 29, pp.919-925, Sept. Oct. 1993
- [3] M. Koyama, "Comparison between performances of several speed control systems of motor with elastically coupled load," Trans. IEE-Jpn., vol. 107-D, pp. 1010-1017, 1987
- [4] M. Sugano et al., " Torsional vibration suppression control by speed differentiation," SPC-90-109, 1990
- [5] N. Matsui and Y.Hori, "Advanced technologies in motor control," Trans. IEE-Jpn. vol.113-D, no.10, pp 1122-1137, Oct., 1993
- [6] N. Matsui, "Speed control of 2-mass system by PID controller," Trans. IEE-Jpn. vol. 116-D, no. 4, pp 441-447, April., 1996
- [7] G. Zhang, J. Furusho, "Speed Control of Two-Inertia System by PI/PID Control", IEEE Trans. Industry Application, vol. IA-47, no.3, June 2000, pp. 603-609
- [8] J.K.Ji, S. K. Sul, "Kalman filter and LQ based Speed Controller for Torsional Vibration Suppression in a 2-Mass Motor Drive System", IEEE Trans. Industrial Electronics, vol. IE-42. no.6, Dec. 1995, pp.564-571
- [9] G. Zhang, J. Furusho, "A Practical PID controller design for speed servo system", Trans. IEE-Jpn, vol. 118-D, no. 9, pp 1095-1096, Sept, 1998
- [10] Byung-Shul Suh, "Tuning of PID Regulators for a Second Order System via LQR Approach", 15th International Conference on Electrical Machines, Brugge Belgium, 25~28 August 2002.