

# 2관성 모터 시스템의 속도제어를 위한 I-PD제어기 설계

심 용 훈, 서 병 설  
한양대학교 전자전기 컴퓨터공학부  
전화 : 02-2290-0364 / 핸드폰 : 011-374-4469

## I-PD Controller Design of Motor Speed Control in a Two-Mass Motor Drive system

Yong-Hun Shim, Byung-Suhl Suh  
Devision of Electrical and Computer Engineering, Hanyang University  
E-mail : yohun@hanmail.net

### Abstract

In the two-mass motor drive system driving a load through a flexible shaft or transmission system, a shaft torsional vibration is often generated. The overshoot of the motor drive system easily causes vibration. In this case I-PD controller has been generally used in speed control, because of the simplicity of structure. This paper using an analytical pole assignment design, proposes the overshoot formulas, and the settling time formula. The objective of this paper is to provide a design method of I-PD controller by using overshoot formulas, and settling time formula. The simulation results show that we can design the controller with desired overshoot and settling time.

### I. 서론

산업용 로봇, 전기자동차의 구동부, 철강 플랜트의 압연기 구동계, 엘리베이터 등과 같이 전동력을 기계적 부하로 전달하는 가변속도 제어용 2관성 공진계는 산업 현장에서 많이 쓰이고 있다[1]. 여기에 쓰이는 2관성 모터 시스템은 전동기와 부하의 관성에 의해 축에 비틀림 진동이 발생된다. 이 비틀림 진동은 불

필요할 뿐 아니라 어떤 경우에 있어서는 이 모터 시스템에 불안정(instability)을 일으키는 요인이 되고, 정밀한 속도제어를 어렵게 하고, 심한 경우는 축이 손상되는 등의 문제점이 발생한다. 따라서 제어 명령치를 서서히 증가시키거나 제어기 이득을 낮추는 방법 또는 축의 직경을 크게 하여 강성을 높이는 등의 초보적인 방법이 있으나 빠른 속도 응답을 얻을 수 없고 경제성의 측면에서도 문제가 된다[2].

이러한 문제를 해결하기 위하여 상태 관측기를 이용하는 방법[3],  $H^\infty$  필터를 이용하는 방법[3],  $\mu$ -Synthesis를 이용하는 방법[4] 등이 연구되고 있다. 그러나 이들 방법은 수학적으로 난해하고 복잡한 제어이론이 요구되어 실용적인 면에서 어려움이 있다.

반면 PID 제어기는 실용적인 면에서 간단하고 편리하여 제어이론을 PID제어기에 접목시키는 연구를 많이 하고있다. PID(I-PD)제어는 2관성 모터 시스템의 축의 비틀림 진동을 효과적으로 제어할 수 있다[6]. G.Zhang, J.Furusho는 축의 비틀림 진동에 관계된 속도제어의 오버슈트를 제어하기 위해 근래에는 2관성 모터 시스템에 극배치 기법으로 PID(I-PD)제어기를 설계하는 방안을 제시하였고 또한 ITAE(integral of time-multiplied absolute-value of error) 성능지수의 평가에 의해 PID(I-PD)제어기를 설계하는 방안을 제안하였다[7][8]. 이 방법은 설계사양인 오버슈트에 만족시킬 수 있는 방안을 제시하였다고 볼 수 있으나, ITAE 성능지수는 절대오차와 시간의 곱의 적분을 측정하는 것이므로, 다른 설계사양(상승시간, 정착시간등)에 만족하는 I-PD제어기를 설계할 수는 없다.

본 논문에서는 2관성 시스템에서 속도응답의 오버슈트가 일어나는 점을 찾아내어 오버슈트값을 식으로 나타

내고, 정착시간의 식을 유도하여 이를 설계사양에 만족 되도록 하는 보다 해석적이고 정교한 I-PD 제어기 설계기법을 제안한다.

## II. 2관성 모터 시스템

### 2.1 I-PD제어기를 가진 2관성 모터 시스템

I-PD제어기를 가진 2관성 모터 시스템의 블록다이어그램은 다음과 같다.

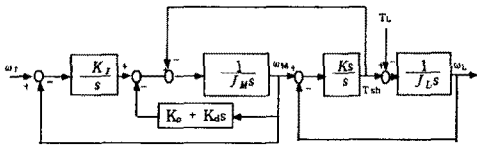


그림 1. I-PD 제어기를 가진 2관성 속도제어 시스템

여기서  $J_M$  : 전동기 관성       $\omega_M$  : 전동기 속도  
 $T_M$  : 전동기 토크       $T_L$  : 외란 토크  
 $K_S$  : 구동축의 비틀림 상수(강성)  
 $J_L$  : 부하 관성       $\omega_L$  : 부하 속도  
 $\omega_r$  : 입력 속도       $K_I, K_p, K_d$  : I-PD 제어기  
 이때 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{\omega_L(s)}{\omega_r(s)} = \frac{K_I \omega_a^2}{J_M s^2 (s^2 + \omega_0^2) + (K_d s^2 + K_p)(s^2 + \omega_a^2)} \quad \dots (1)$$

여기서  $\omega_a$ 는 반공진 주파수,  $\omega_0$ 는 공진 주파수이고, R은 관성비이며 다음과 같이 정의된다.

$$\omega_0 = \omega_a \sqrt{1+R}, \quad R = \frac{J_L}{J_M}$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{K_S}{J_L}} \quad \dots (2)$$

### 2.2 기본적인 등식

식(1)을 두 쌍의 공액 복소근을 갖도록 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{(s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2)(s^2 + 2\xi_2 \omega_2 s + \omega_2^2)} \quad \dots (3)$$

식(1)과 식(3)를 비교하면 다음의 4개의 등식이 만족해야 한다.

$$K_p = 2(\xi_1 \omega_1 + \xi_2 \omega_2)(J_M + K_d) \quad \dots (4)$$

$$K_I = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_a^2} (J_M + K_d) \quad \dots (5)$$

$$K_d = \frac{\omega_a^4 R J_M}{\omega_1^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2 - \omega_1^2 \omega_2^2 - \omega_a^4} J_M \quad \dots (6)$$

$$\omega_1 \xi_1 (\omega_2^2 - \omega_a^2) = \omega_2 \xi_2 (\omega_a^2 - \omega_1^2) \quad \dots (7)$$

$K_o, K_i, K_d$ 에 의해 극점이 조정되고 식(7)은 극배치 조건이 된다.

식(3)에서 공액 복소근은  $-\omega_1 \xi_1 \pm j\omega_1 \sqrt{(1-\xi_1^2)}$ ,  $-\omega_2 \xi_2 \pm j\omega_2 \sqrt{(1-\xi_2^2)}$ 으로 구해지고 이 극점들은 과도 응답의 정착시간에 영향을 미치는 중요한 요소 이므로 원하는 응답을 얻기 위해 극점의 실수부를 (8)과 같이 배치한다[7].

$$\omega_1 \xi_1 = \omega_2 \xi_2 \quad \dots (8)$$

식 (7)와 식(8)에서 식(9)을 얻는다.

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 2 \omega_a^2 \quad \dots (9)$$

## III. 오버슈트, 정착시간

(3)식의 단위계단 입력에 대한 출력을 time domain으로 변환시키면 다음과 같다.

$$\omega_L(t) = 1 + \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left( \omega_2^2 \frac{e^{-\xi_1 \omega_1 t}}{\sqrt{(1-\xi_1^2)}} \sqrt{K_1^2 + 2\xi_1 K_1 + 1} \sin(\omega_1 \sqrt{(1-\xi_1^2)t + a_1}) \right) - \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left( \omega_1^2 \frac{e^{-\xi_2 \omega_2 t}}{\sqrt{(1-\xi_2^2)}} \sqrt{K_2^2 + 2\xi_2 K_2 + 1} \sin(\omega_2 \sqrt{(1-\xi_2^2)t + a_2}) \right) \quad \dots (10)$$

여기서  $K_1, K_2, a_1, a_2$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$K_1 = \frac{-2\omega_1(\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1)}{\omega_1 - \omega_2} \quad \dots (11)$$

$$K_2 = \frac{-2\omega_2(\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1)}{\omega_1 - \omega_2} \quad \dots (12)$$

$$a_1 = \tan^{-1} \frac{(\sqrt{(1-\xi_1^2)})}{K_1 + \xi_1} \quad \dots (13)$$

$$a_2 = \tan^{-1} \frac{(\sqrt{(1-\xi_2^2)})}{K_2 + \xi_2} \quad \dots (14)$$

식(8)로 인해  $K_1 = K_2 = 0$  이다.

$\omega_L(t)$ 의 식(10)을 잘 분석해보면 "1"과 진동이 포함된 두 sinusoidal함의 합으로 표시되는 것을 볼 수 있다. sinusoidal항을 따로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left( \omega_2^2 \frac{e^{-\xi_1 \omega_1 t}}{\sqrt{(1-\xi_1^2)}} \sqrt{K_1^2 + 2\xi_1 K_1 + 1} \sin(\omega_1 \sqrt{(1-\xi_1^2)t + a_1}) \right) \quad \dots (15)$$

$$- \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left( \omega_1^2 \frac{e^{-\xi_2 \omega_2 t}}{\sqrt{(1-\xi_2^2)}} \sqrt{K_2^2 + 2\xi_2 K_2 + 1} \sin(\omega_2 \sqrt{(1-\xi_2^2)t + a_2}) \right) \quad \dots (16)$$

(15)(16)식에 있는 앞에 있는 항  $\frac{\omega_2^2}{\omega_1 - \omega_2}, \frac{\omega_1^2}{\omega_1 - \omega_2}$ 로 인하여  $\omega_1 \ll \omega_2$  이면 (16)항을 무시할 수 있고,  $\omega_1 > \omega_2$  이면 (15)항을 무시할 수 있다. 따라서  $\omega_1 \ll \omega_2, \omega_1 > \omega_2, \omega_1 < \omega_2, \omega_1 > \omega_2$ 의 4가지 경우로 나누어서 오버슈트가 일어나는 점을 찾을 수 있다. 이때  $\omega_1 \ll \omega_2, \omega_1 < \omega_2$ 의 경계는  $\omega_1 \omega_2$ 의 2.5배로 정할 수 있다.

### 3.1 $\omega_1 \ll \omega_2$ 일 경우 오버슈트

$\omega_L(t)$ 의 (16)항을 무시할 수 있으므로 (15)항의 오버슈트가 일어나는 점이 전체 시스템  $\omega_L(t)$ 의 오버슈트가 일어나는 점이 된다.

(15)항의 오버슈트가 일어나는 점은 다음과 같다.

$$t_{mp} = \frac{\frac{3}{2}\pi - \alpha_1 - \beta_1}{\omega_1 \sqrt{(1 - \xi_1^2)}} \dots\dots\dots (17)$$

여기서  $\beta_1$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\beta_1 = \tan^{-1} \frac{\xi_1}{\sqrt{1 - \xi_1^2}} \dots\dots\dots (18)$$

이때 오버슈트는 sin함수의 계수부분 즉 지수(exponential)함수가 있는 부분으로 나타낼 수 있다.

$$M_p = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \left( \frac{\omega_2^2}{\sqrt{(1 - \xi_1^2)}} + \frac{\omega_1^2}{\sqrt{(1 - \xi_2^2)}} \right) \dots\dots (19)$$

3.1  $\omega_1 \gg \omega_2$  일 경우 오버슈트

$\omega_L(t)$ 의 (15)항을 무시할 수 있으므로 (16)항의 오버슈트가 일어나는 점이 전체 시스템  $\omega_L(t)$ 의 오버슈트가 일어나는 점이 된다.

(16)항의 오버슈트가 일어나는 점은 다음과 같다.

$$t_{mp} = \frac{\frac{3}{2}\pi - \alpha_2 - \beta_2}{\omega_2 \sqrt{(1 - \xi_2^2)}} \dots\dots\dots (20)$$

여기서  $\beta_2$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\beta_2 = \tan^{-1} \frac{\omega_1 \xi_1}{\omega_2 \sqrt{1 - \xi_2^2}} \dots\dots\dots (21)$$

이때 오버슈트는  $\omega_1 < \omega_2$  일 경우와 같이 sin함수의 계수부분 즉 지수(exponential)함수가 있는 부분으로 나타낼 수 있다.

$$M_p = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \left( \frac{\omega_2^2}{\sqrt{(1 - \xi_1^2)}} + \frac{\omega_1^2}{\sqrt{(1 - \xi_2^2)}} \right) \dots\dots (22)$$

3.3  $\omega_1 < \omega_2$  일 경우 오버슈트

(16)식의 세번째 극점과 (15)식의 두번째 극점 사이에 전체  $\omega_L(t)$ 의 오버슈트 점이 존재한다.

(16)식의 세 번째 극점이 일어나는  $t_2$ 의 식은 다음과 같다.

$$t_2 = \frac{\frac{5}{2}\pi - \alpha_2 - \beta_2}{\omega_2 \sqrt{(1 - \xi_2^2)}} \dots\dots\dots (23)$$

(17)식의 두 번째 극점이 일어나는  $t_1$ 의 식은 다음과 같다.

$$t_1 = \frac{\frac{3}{2}\pi - \alpha_1 - \beta_1}{\omega_1 \sqrt{(1 - \xi_1^2)}} \dots\dots\dots (24)$$

따라서  $t_{mp}$ 는 다음식과 같이 된다.

$$t_{mp} = t_2 + \frac{(t_1 - t_2)}{g_1} \dots\dots\dots (25)$$

이때  $g_1$ 은 다음과 같이 정의한다.

$$g_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \dots\dots\dots (26)$$

그리고, 오버슈트는 (19)식과 같이된다.

3.3  $\omega_1 > \omega_2$  일 경우 오버슈트

(15)식의 3번째 극점과 (16)식의 2번째 극점 사이에 전체  $\omega_L(t)$ 의 오버슈트 점이 존재한다.

(15)식의 세 번째 극점이 일어나는  $t_1$ 의 식은 다음과 같다.

$$t_1 = \frac{\frac{5}{2}\pi - \alpha_2 - \beta_2}{\omega_2 \sqrt{(1 - \xi_2^2)}} \dots\dots\dots (27)$$

(16)식의 두 번째 극점이 일어나는  $t_2$ 의 식은 다음과 같다.

$$t_2 = \frac{\frac{3}{2}\pi - \alpha_2 - \beta_2}{\omega_2 \sqrt{(1 - \xi_2^2)}} \dots\dots\dots (28)$$

따라서  $t_{mp}$ 는 다음식과 같이 된다.

$$t_{mp} = t_1 + \frac{(t_2 - t_1)}{g_2} \dots\dots\dots (29)$$

이때,  $g_2$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$g_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \dots\dots\dots (30)$$

그리고, 오버슈트는 (22)식과 같이된다.

3.4 정착시간

정착시간은 지수(exponential)함수가 있는 부분(포락선)이 정상상태의 1%안에 도달하는데 걸리는 시간으로 나타낼 수 있으며 이때의 식은 다음과 같이 된다.

$$0.01 = \left| \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \right| e^{-\zeta_1 \omega_1 t} \left( \frac{\omega_2^2}{\sqrt{(1 - \xi_1^2)}} + \frac{\omega_1^2}{\sqrt{(1 - \xi_2^2)}} \right) \dots\dots (31)$$

$$t_s = \frac{\log(e^{-\omega_1 t_s})}{\log\left(\frac{0.01}{q}\right)} \dots\dots\dots (32)$$

여기서  $q$ 는 다음과 같다.

$$q = \left\| \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \right\| \left( \frac{\omega_2^2}{\sqrt{(1 - \xi_1^2)}} + \frac{\omega_1^2}{\sqrt{(1 - \xi_2^2)}} \right) \dots\dots (33)$$

IV. I-PD 제어기 설계

설계사양이 정해졌으면, 오버슈트 설계사양으로 인해 하나의 식이 정해질 수 있게 되고, 정착시간 설계사양으로 또 하나의 식이 정해진다. 본 논문에서 제시한 (8),(9)식과 설계사양의 두 식으로 인해  $\omega_1, \omega_2, \xi_1,$

$\zeta_2$ 의 4가지 파라미터를 구할 수 있다. 이에 따라 (4),(5),(6)식에 위의 4가지 파라미터를 대입하여  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ 를 구할 수 있다.

모의실험에 사용할 모터의 각 파라미터 값은 다음과 같다.

$$J_M : 0.0013 \text{ [kgm}^2\text{]} \quad J_L : 0.0026 \text{ [kgm}^2\text{]}$$

$$K_S : 6.6 \text{ [N} \cdot \text{m/rad]}$$

오버슈트를 3%, 정착시간을 0.2초로 하여 설계하여  $\omega_1=34.4$ ,  $\zeta_1=0.85$ ,  $\omega_2=62.4256$ ,  $\zeta_2=0.4684$  를 얻을 수 있다. 따라서 식(4),(5),(6)에 의하여  $K_i=2.8929$ ,  $K_p=0.1864$ ,  $K_d=2.9349 \times 10^{-4}$  로 I-PD제어기를 설계할 수 있다.

ITAE성능지수에 의해 설계한 것과 시뮬레이션을 비교하였다.

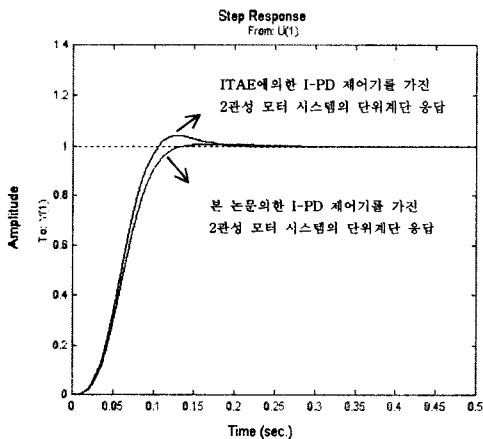


그림2 I-PD 제어기를 가진 2관성 모터 시스템의 단위계단 응답

## V. 결론

2관성 시스템에서 속도응답의 오버슈트가 일어나는 점을 네가지 경우로 나누어 찾아내어 오버슈트값을 식으로 나타내고, 정착시간의 식을 유도하여 이를 설계사양에 만족 되도록 하는 보다 해석적이고 정교한 I-PD 제어기를 설계하였다. 설계사양을 만족하는 오버슈트값과 정착시간의 시뮬레이션 결과가 나옴을 보였다. ITAE 성능지수 평가에 의해 설계한 I-PD제어기의 정착시간은 같은 반면, 축의 비틀림 진동을 일으키는 오버슈트를 낮추어서 성능이 보다 좋은 제어기를 설계할 수 있었다.

## 참고문헌

- [1] G. Zhang and J. Furusho, " Control of Robot Arms Using Joint Torque Sensors", *IEEE Control System*, Vol. 18, No.1, pp.48-55, 1998
- [2] 지준근, 송승호, 설승기, 박민호, " 2관성계를 갖는 전동기 구동 시스템의 축 비틀림 진동 억제를 위한 속도 제어기", *대한전기학회 논문지*, 제 42권, 제8호, pp44-53, 8. 1993
- [3] N. Matsui and Y. Hori, " Advanced technologies in motor Control ", trans. *IEE-Jpn*, Vol. 113-D, No.10, pp.1122-1137, Oct, 1993
- [4] M. Hirata, K. Z. Liu and T. Mita, "Active vibration Control of s 2-mass spring system using  $\mu$ -Synthesis ", Trans. *IEE-Jpn*, Vol. 114-D, No. 5, pp.512-519, may, 1994
- [5] 김동화, *제장제어 시스템*. 동일 출판사 서울 1997
- [6] Y. Mastui, Speed Contrl of 2-Mass System by PID Controller", Trans. *IEE Japan*, Vol. 116-D, No.4 pp 441-447, 1996
- [7] G. Zhang and J. Furusho, " Control of robot arms using joint torque sensors", *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 18, No. 1, pp. 48-55, Jan.,1998
- [8] G. Zhang and J. Furusho, " Speed Control of Two - Inertia System by PI/PID Control ", *IEEE Trans. Industrial Electronics*, Vol. 47, No. 3 pp 603-609, June. 2000