

설계 민감도법과 요소망 변형법을 이용한 3차원 비선형 전자소자의 형상최적화

류재섭, Yao Yingying*, 고창섭
 충북대학교, Shenyang University of Technology*

Shape Optimization of 3D Nonlinear Electromagnetic Device
 Using Design Sensitivity Analysis and Mesh Relocation Method

Jae Seop Ryu, Yingying Yao*, Chang Seop Koh
 Chungbuk National Univesity, Shenyang University of Technology*

Abstract - This paper presents a 3D shape optimization algorithm for electromagnetic devices using the design sensitivity analysis with finite element method. The structural deformation analysis based on the deformation theory of the elastic body under stress is used for mesh renewing. The design sensitivity and adjoint variable formulae are derived for the 3D nonlinear finite element method with edge element. The proposed algorithm is applied to the shape optimization of 3D electromagnet to get a uniform flux density at the air gap.

1. 서론

설계 민감도 해석(design sensitive analysis)은 설계변수의 수가 계산시간에 미치는 영향이 적기 때문에 유한요소법과 결합한 형상 최적화 문제에 적용되어 많은 연구가 되어져 왔다[1,2,3]. 그러나 실제 응용에서는 매질의 비선형성을 고려해야 함에도 불구하고, 그 연구의 범위는 대부분 선형문제[1,2] 또는 2차원 비선형 문제[3]에 국한되어 적용된 경우가 대부분이고, 비선형성을 고려한 3차원 해석에 관한 연구는 매우 찾아보기 힘들다.

따라서, 본 논문에서는 비선형성을 고려한 3차원 유한요소법과 설계민감도 해석, 그리고 요소망 변형법의 결합에 의한 형상최적화 알고리즘을 제시하였다. 요소망 변형법(mesh relocation method)은 탄성체의 구조변형 해석(structural deformation analysis)에 기초한 방법으로, 민감도 해석에 의해서 결정된 설계변수의 변위로부터 설계변수와 연결된 각 점의 변위를 계산함으로써 초기 요소의 형상(topology)을 변화시키지 않고 쉽게 요소를 재구성할 수 있다[4,5,6]. 설계 민감도 계산에서는 계산시간의 단축을 위해서 보조변수(adjoint variable)를 도입하였고, 민감도와 보조변수에 관한 식을 변요소를 이용한 3차원 비선형 유한요소해석에 적용할 수 있도록 유도하였다. 제안된 알고리즘을 목표영역에서 일정한 자속밀도를 얻기 위한 전자석의 3차원 형상 최적화 문제에 적용하였다.

2. 비선형성을 고려한 자계해석 및 설계민감도 해석

전자장 문제를 해석하기 위한 계의 지배방정식은 맥스웰 방정식으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\nabla \times \nu(\nabla \times \vec{A}) = \vec{j} \quad (1)$$

여기에서 \vec{A} 는 자기벡터 포텐셜이고, ν 는 자기 저항률 그리고 \vec{j} 는 입력 전류밀도이다. Galerkin 법에 의해 근사화한 후 유한요소법을 이용하면 잔차(residual) G_i 에 대해서 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\sum_j [G_i^e] = \sum_j \nu^e [K_{ij}^e] [A_j^e] - \sum_j [Q_i^e] = 0 \quad (2)$$

여기에서 $[K_{ij}^e]$ 와 $[Q_i^e]$ 는 임의의 요소(e)에서의 시스템 행렬(system matrix)과 구동 벡터(forcing vector)이고, $[A_j^e]$ 는 상태변수로서 자기 벡터포텐셜(magnetic vector potential)이다. 사면체 변요소를 이용하는 경우에 임의의 요소(e)에 대해서 $[K_{ij}^e]$ 와 $[Q_i^e]$ 는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$K_{ij}^e = \frac{1}{18^2 V_e} \sum_{k=1,2,3,4} S_k S_{kj} \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (3)$$

$$Q_i^e = \frac{1}{36 V_e} \sum_{k=1,2,3,4} N_k J_{0k} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (4)$$

여기에서 V_e 는 요소(e)의 체적을 나타내며, J_0 는 입력 전류밀도를 나타낸다. S_k 와 N_k 는 형상함수로부터 계산된 값이다[1].

매질의 비선형성을 고려하기 위하여 뉴턴-랩슨법(Newton-Raphson)을 식(2)에 적용하면 다음과 같은 방정식이 얻어진다.

$$\sum_j \left[\frac{\partial G_i^e}{\partial A_j^e} \right] [\delta A_j^e] = - \sum_j G_i^e \quad (5)$$

이 때, 자기 저항률 ν 를 자속밀도의 함수 $\nu = f(B^2)$ 라고 하면 식(5)의 상태변수에 대한 미분항은 다음과 같은 식으로 된다[7].

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial G_i^e}{\partial A_j^e} \right] &= [K^e] + [\bar{K}^e] \\ &= \nu^e [K_{ij}^e] + \frac{\partial \nu^e}{\partial B_e^2} \cdot \frac{\partial B_e^2}{\partial A_j^e} [K_{ij}^e] [\vec{A}_j] \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서 $[\vec{A}_j]$ 는 이전 단계에서의 포텐셜 값이다. (n+1)번째의 반복계산에서 얻어지는 포텐셜은 식(5)의 해로부터 다음과 같이 계산한다.

$$[A]^{n+1} = [A]^n + [\delta A]^n \quad (7)$$

전자계 문제의 형상 최적화를 다루는 경우에 목적함수는 설계변수 $[b]$ 와 상태변수 $[A]$ 의 함수로 정의되며,

다음과 같이 표현할 수 있다[1,2,3,6].

$$F = f([\rho], [A(\rho)]) \quad (8)$$

설계 민감도는 설계변수에 대한 목적함수의 변화율로서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{dF}{d[\rho]^T} = \left. \frac{\partial F}{\partial [\rho]^T} \right|_{A=const.} + \frac{\partial F}{\partial [A]^T} \cdot \frac{\partial [A]}{\partial [\rho]^T} \quad (9)$$

여기에서 설계변수의 변화에 대한 상태변수의 변화율 $\partial[A]/\partial[\rho]^T$ 는 식 (2)를 설계변수 $[\rho]$ 에 대하여 미분함으로써 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial [G_i]}{\partial [\rho]^T} = \left. \frac{\partial [G_i]}{\partial [\rho]^T} \right|_{A=const.} + \frac{\partial [G_i]}{\partial [A]^T} \cdot \frac{\partial [A]}{\partial [\rho]^T} \quad (10)$$

식 (10)에서 우변의 첫 항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial [G_i]}{\partial [\rho]^T} \right|_{A=const.} &= [M]_{Linear} + [\bar{M}]_{NonLinear} \\ &= [M]_{Linear} + \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \cdot \frac{\partial B^2}{\partial [\rho]^T} [K_{ij}] [\bar{A}_i] \end{aligned} \quad (11)$$

여기에서 $[M]_{Linear}$ 는 선형해석에서 얻어지는 값과 같으며 [1], $[\bar{A}_i]$ 는 비선형 해석에서 얻어진 최종 해를 의미한다. 식 (10)의 우변에서 두 번째 항의 상태변수에 대한 미분은 식 (6)에서 구한 시스템 행렬과 같다. 따라서 $\partial[A]/\partial[\rho]^T$ 는 다음 식으로 된다.

$$\frac{\partial [A]}{\partial [\rho]^T} = -([K] + [\bar{K}])^{-1} \cdot ([M]_{Linear} + [M]_{NonLinear}) \quad (12)$$

비선형 문제에서 보조변수 $[\lambda]$ 는 다음과 같이 정의하며 [3],

$$[\lambda]^T = \frac{\partial F}{\partial [A]^T} ([K] + [\bar{K}])^{-1} \quad (13)$$

여기에서 시스템 행렬이 대칭인 조건을 이용하면 식 (13)을 다음 식으로 변환하여 보조변수 $[\lambda]$ 를 구할 수 있다.

$$([K] + [\bar{K}])[\lambda] = \frac{\partial F}{\partial [A]^T} \quad (14)$$

따라서 설계 민감도는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dF}{d[\rho]^T} = \frac{\partial F}{\partial [\rho]^T} - \lambda^T \cdot ([M]_{Linear} + [M]_{NonLinear}) \quad (15)$$

각 설계변수의 민감도를 계산한 후에 설계변수는 다음의 식에 의해서 수정된다.

$$[\rho]^{new} = [\rho]^{old} - \alpha \cdot F \cdot \frac{dF}{d[\rho]^T} / \left| \frac{dF}{d[\rho]^T} \right|^2 \quad (16)$$

여기에서 F 는 식 (8)에 의해서 계산된 현재 단계에서의 목적함수의 값을 말하며, 계수 α 는 새로 계산된 설계변수의 값이 진동하는 것을 방지하기 위한 완화계수 (relaxation factor)이다.

3. 요소망 변형

3차원 구조해석에서 탄성체의 변형 벡터(strain

vector)는 다음과 같이 정의된다[4,6].

$$\epsilon = \left[\frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial z}, \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right]^T \quad (17)$$

변위 벡터(displacement vector) u 는 좌표 x, y, z 의 함수로 정의되며 다음과 같이 표현된다.

$$u = [IN_i, IN_j, IN_m, IN_p] a^e \quad (18)$$

$$a^e = [a_i, a_j, a_m, a_p]^T, \quad a_i = \begin{bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (19)$$

여기에서 N_i 는 사면체 요소에서 절점에 대한 형상함수이고, I 는 3×3 단위행렬(identity matrix), a^e 는 한 요소의 변위벡터이고, a_i 는 한 절점의 변위벡터이며, i, j, m, p 는 한 요소의 네 절점을 나타내는 첨자이다.

선형 탄성체의 응력(stress)과 변형(strain)의 관계는 탄성행렬(elasticity matrix)을 이용하면 다음과 같이 정의되며 [5],

$$\sigma = D(\epsilon - \epsilon_0) + \sigma_0 \quad (20)$$

여기에서 ϵ_0 와 σ_0 는 각각 초기 변형(initial strain)과 초기 잔류 응력(initial residual stress)을 나타내고, 행렬 D 는 탄성 행렬(elasticity matrix)로 다음과 같다[5].

$$D = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

symmetric

여기에서 E 는 영률(Young's modulus)이고, ν 는 포아송 비(Poisson's ratio)이다.

식 (17)과 (20)에 대하여 사면체 요소를 이용하는 3차원 유한요소법을 적용하면 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다[4,5,6].

$$[K]\{a\} = \{f\} \quad (22)$$

여기에서 $\{a\}$ 는 각 절점의 변위이고, $\{f\}$ 는 변위에 대한 구동벡터(forcing vector)이다. $[K]$ 는 요소의 형상과 탄성체의 물질 상수에 의해 결정되는 행렬로서 다음과 같으며 [5,6],

$$K_{ij}^e = \frac{E(1-\nu)}{36V_e(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} K_{ij}^{xx} & K_{ij}^{xy} & K_{ij}^{xz} \\ K_{ij}^{xy} & K_{ij}^{yy} & K_{ij}^{yz} \\ K_{ij}^{xz} & K_{ij}^{yz} & K_{ij}^{zz} \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기에서 K_{ij}^{xx} 는 다음과 같다.

$$K_{ij}^{xx} = b_i b_j + c_i c_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} + d_i d_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (24-a)$$

$$K_{ij}^{yy} = c_i c_j + b_i b_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} + d_i d_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (24-b)$$

$$K_{ij}^{zz} = d_i d_j + c_i c_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} + b_i b_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (24-c)$$

$$K_{xy}^{xy} = b_i c_j \frac{\nu}{(1-\nu)} + c_i b_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (24-d)$$

$$K_{yy}^{xx} = b_i d_j \frac{\nu}{(1-\nu)} + d_i b_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (24-e)$$

$$K_{yy}^{yy} = c_i b_j \frac{\nu}{(1-\nu)} + b_i c_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (24-f)$$

$$K_{yy}^{zz} = c_i d_j \frac{\nu}{(1-\nu)} + d_i c_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (24-g)$$

$$K_{zz}^{xx} = d_i b_j \frac{\nu}{(1-\nu)} + b_i d_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (24-h)$$

$$K_{zz}^{yy} = d_i c_j \frac{\nu}{(1-\nu)} + c_i d_j \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (24-i)$$

식(22)를 최적화 과정에서 요소망의 변형에 이용되는 각 절점의 변위를 구하기 위한 식으로 사용하면 다음과 같이 쓸 수 있다[5,6].

$$[K](\Delta x) = [f] \quad (25)$$

여기에서 $[K]$ 는 응력해석에 사용되는 전체 요소 행렬(global stiffness matrix)이고, $\{\Delta x\}$ 는 요소망 변형에서 좌표변환에 이용되는 각 점의 변위이며, $[f]$ 는 요소의 질을 조절하기 위한 가상의 부하력(fictitious load force)이다. 요소망에 가해지는 외부의 인위적인 힘이 없다는 조건과 경계면 상의 절점의 변위를 이용하여 해석 영역 내부에 위치한 각 점의 변위는 식 (25)를 변형하여 다음 식에 의해서 구할 수 있다[4,5,6].

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bd} \\ K_{db} & K_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_b \\ \Delta x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

여기에서 $\{\Delta x_b\}$ 는 이미 알고 있는 경계상의 절점의 변위이고, $\{\Delta x_d\}$ 는 미지수로서 내부 절점의 변위를 나타낸다. $[f_b]$ 는 경계의 절점에 작용하는 가상의 힘이며, 여기에서는 그 값을 0으로 놓고 계산한다[4]. 따라서 내부 절점의 변위는 다음 식에 의하여 구할 수 있다.

$$[K_{dd}](\Delta x_d) = -[K_{db}](\Delta x_b) \quad (27)$$

이때, $\{\Delta x_b\}$ 중에서 설계변수에 해당하는 절점은 민감도 해석에서 계산된 변위를 사용하고, 그 외의 절점 중에서 변위가 발생하지 않을 것으로 예상되는 점들은 0으로 취급한다. 또한 각 점의 변위를 계산하기 위한 구조 해석의 영역을 유한요소 해석영역 전체로 하지 않고 변위가 발생할 영역만을 설정하여 계산하면 계산시간을 단축할 수도 있다.

4. 해석사례

제안된 최적화 알고리즘을 공극 중심에서의 자속밀도 B_z 를 일정하게 만들기 위한 3차원 전자석의 형상최적화 문제에 적용하였다. 그림 1에는 해석모델의 형상 및 치수를 보이고 있으며, 해석 영역은 전자석의 대칭성을 고려하여 전체 영역의 1/4만 해석하였다. 입력전류는 12240 [A]이고, 전자석의 초기 비투자율은 1500이며, 비선형성을 고려하기 위한 B-H 곡선을 그림 2에 보이고 있다. 설계변수는 전자석의 상부표면에 있는 전체 절점 54개를 사용하였다.

목표 영역에서의 설계 목표값은 4000[Gauss]이고, 목적함수는 다음과 같이 정의하였다.

$$F = \sum_{n=1}^{n_p} (B_n^* - B_i)^2 \quad (28)$$

여기에서 B_n^* 는 목표 절점에서 자속밀도의 B_z 값이고,

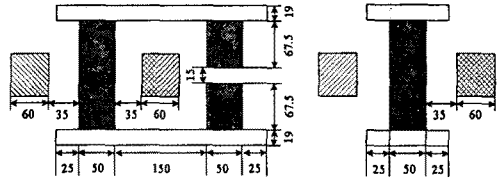
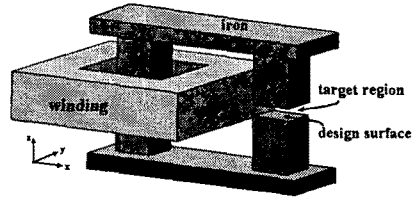


그림 1. 3차원 전자석 모델의 형상[단위:mm]

B_i 는 설계 목표값이다. n_p 는 목표 영역에서 선택된 절점의 개수이며, 여기에서는 35개의 절점을 선택하여 사용하였다.

식 (28)로 정의된 목적함수로부터 민감도는 다음과 같이 된다.

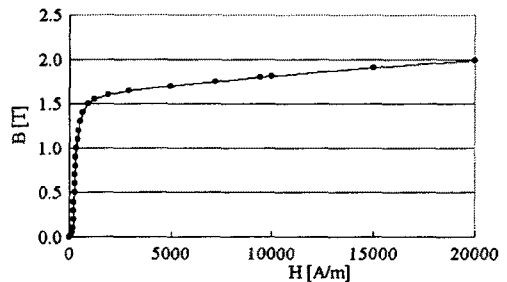
$$\frac{dF}{d[p]^T} = \sum_{n=1}^{n_p} 2(B_n^* - B_i) \frac{\partial B_n^*}{\partial [p]^T} + \sum_{n=1}^{n_p} 2(B_n^* - B_i) \frac{\partial B_n^*}{\partial [A]^T} \cdot \frac{d[A]}{d[p]^T} \quad (29)$$

여기에서 우변의 첫 번째 항은 설계변수가 목표영역에서 떨어진 위치에 있으므로 설계변수에 대한 자속밀도의 변화율은 0이 된다. 그리고 두 번째 항에서 상태변수(자기 벡터퍼텐셜)에 대한 자속밀도의 변화율은 다음과 같이 계산한다.

$$\frac{\partial B_n^*}{\partial [A]^T} = \frac{1}{\sum_i \gamma_i} \sum_i \gamma_i \frac{\partial B_i^*}{\partial [A]^T} \quad (30)$$

여기에서 i 는 n 번째 목표절점을 포함하는 요소를 나타내고, γ_i 는 요소 i 에서 절점 n 의 임체각을 나타낸다.

민감도 계산 후 설계변수의 수정을 반복하는 과정에서 요소의 구조 해석에 사용된 영률(Young's modulus) E 와 포아송 비(Poisson's ratio) ν 는 각각 0.5와 0.3을 주어 계산하였다. 이것은 E 와 ν 의 값을 변화시키면서 요소의 질을 검토한 후 가장 좋은 결과를 얻을 수 있는 값을 선택한 것이다[4].



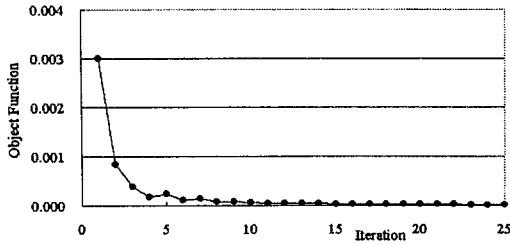


그림 3 목적함수의 변화

그림 3은 목표영역에서 목적함수의 변화를 나타낸 것이다. 11번째 반복 계산 후 목적 함수의 값은 초기치의 1.636%의 값으로 감소하였고, 이후 19번째 반복 계산 후에는 초기치의 1% 이하의 값을 가지며 수렴하였다. 최종 설계변수 수정 후의 목적함수 값은 초기형상에서 목적함수 값의 0.704%로 감소하였다.

그림 4는 전자석의 형상에 따른 목표영역에서 자속 밀도 B_z 의 분포 변화를 보이고 있다. 초기 형상에서 자속밀도 B_z 의 크기는 단부효과(fringing effect)에 의하여 공극의 중심부분보다 바깥쪽 부분의 자속밀도가 작게 나타났지만, 최종형상에서는 목표영역에서의 자속밀도 분포가 목표치인 4000[Gauss]의 값을 가지며 평탄한 분포를 보이고 있다. 그림 5는 최적설계 대상인 전자석 표면의 최종 형상을 보이고 있다. 전자석의 가장자리 부분이 공극에서의 자속밀도를 높이기 위하여 중심부분 보다 상대적으로 높아짐을 알 수 있다.

4. 결 론

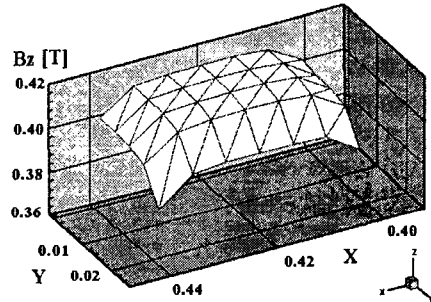
본 논문에서는 자성체의 비선형성을 고려한 유한요소법과 설계 민감도 해석, 그리고 요소망 변형법에 의한 3차원 전자소자의 형상 최적화 알고리즘에 대해서 연구하였다. 민감도 해석 과정에서 보조변수를 도입하여 계산 시간을 단축하였고, 민감도와 보조변수에 관한 식을 변이요소를 이용한 3차원 유한요소해석에 직접 적용할 수 있도록 유도하였다. 민감도 해석을 통해서 설계변수를 수정한 후에 탄성체의 구조해석 이론에 기초한 요소망 변형법을 이용하여 새로운 요소 분할 없이 초기 요소의 형상을 그대로 유지하는 변형된 요소망을 얻을 수 있었다.

제안된 알고리즘을 3차원 전자석의 최적형상설계 문제에 적용하였다. 11번째 반복 계산 후 목적 함수의 값은 초기치의 1.636% 이하의 값으로 감소하였고, 이후 19번째 반복 계산 후에는 초기치의 1% 이하의 값을 가지며 수렴하였다. 최종 설계변수 수정 후에 목적함수 값은 초기형상에서 목적함수 값의 0.704%로 감소하였다. 해석 결과로부터, 요소 재분할에 많은 시간이 소요되는 3차원 유한요소법을 이용한 형상 최적화 문제에서는 제안된 요소망 변형법이 효과적으로 잘 적용됨을 알 수 있다. 따라서 본 논문에서 제안된 방법으로 최적화 과정의 자체해석 및 민감도 해석, 그리고 요소망 변형법을 하나의 연속된 알고리즘으로 구현할 수 있을 것으로 사료된다.

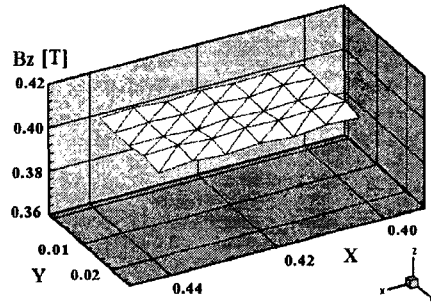
(참 고 문 헌)

[1] 류재섭, 고창섭, "설계민감도해석과 FEM에 의한 전자소자의 형상최적화", 대한전기학회 하계학술대회 논문집 B권, pp. 835-837, 2002
 [2] J.A.Ramirez, E.M.Freeman, "Sensitivity Analysis for the Automatic Shape Design of Electromagnetic Devices in 3D Using FEM", *IEEE Trans. on Magn.*, Vol.33, No.2, pp.1856-1859,

1997
 [3] I.H.Park, B.T.Lee, S.Y.Hahn, "Design sensitivity analysis for nonlinear magnetostatic problems using finite element method", *IEEE Trans.on Magn.*, Vol.28, No.2, pp.1533-1536, 1992
 [4] Yingying Yao, 고창섭, Dexin Xie, "전자소자의 형상최적화를 위한 3차원 요소의 재생성법", 대한전기학회 하계학술대논문집 B권, pp.841-843, 2002.
 [5] O.C.Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1977.
 [6] K.onrad Weeber and S.R.H. Hoole, "A Structural Mapping Technique for Geometric Parameterization in the Optimization of Magnetic Devices", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.33, pp.2145-2179, 1992.
 [7] 강병길, 류재섭, 고창섭, "FEM을 이용한 3-D 비선형 정자계 모델의 해석", 대한전기학회 추계학술대회 논문집 B권, pp. 324-326, 2000



(a) 초기 자속밀도 분포



(b) 최종 자속밀도 분포

그림 4. 목표영역에서의 자속밀도 B_z 분포

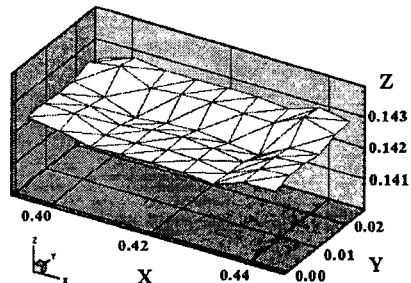


그림 5. 전자석 표면의 최종 형상