

# 할선법에 기초한 고정점 학습알고리즘의 독립성분분석

조용현, 박용수

대구가톨릭대학교 공과대학 컴퓨터정보통신공학부

## Independent Component Analysis of Fixed Point Learning Algorithm Based on Secant Method

Yong-Hyun Cho, Yong-Soo Park

School of Computer and Information Comm. Eng., Catholic Univ. of Daegu

e-mail:yhcho@cuth.cataegu.ac.kr

### 요약

본 연구에서는 엔트로피 최적화를 위한 목적함수의 근을 구하기 위해 단순히 함수 값만을 이용하여 계산을 근사화한 할선법에 기초한 고정점 알고리즘의 독립성분분석 기법을 제안하였다. 이렇게 하면 기존의 뉴턴법에 기초한 고정점 알고리즘에서 요구되는 복잡한 도함수의 계산과정을 간략화 할 수 있어 더 우수한 학습성능의 독립성분분석이 가능하다. 제안된 학습알고리즘의 독립성분분석 기법을 512x512의 픽셀을 가지는 10개의 영상을 대상으로 임의의 혼합행렬에 따라 발생하는 혼합영상들을 실험하였다. 실험결과, 기존의 뉴턴법에 기초한 고정점 알고리즘의 분석기법보다 빠른 학습속도와 개선된 분리성능이 있음을 확인하였다. 특히 기존의 알고리즘에서 임의로 설정되는 초기값에 덜 의존하는 학습성능이 있음도 확인할 수 있었다.

### 1. 서론

통계학, 신호처리, 그리고 신경망 등에서 적당한 변환에 의하여 알맞은 데이터의 표현을 찾기 위해 일반적으로 선형변환을 이용한다. 선형변환의 이용은 문제를 계산적으로나 개념적으로 좀 더 간단하게 만들 수 있기 때문이다. 여러 가지 방법과 원리들이 적당한 선형변환을 찾기 위해서 개발되었으나, 그 중에서도 주요성분분석(principal component analysis : PCA)<sup>[1-3]</sup>이 가장 널리 이용되고 있다. 이는 데이터의 차원을 감소시키는 선형변환 기법으로 공분산(covariance)을 이용하는 2차원 방법이다. PCA는 입력 데이터의 공분산에 의해 결정되는 정규직교기저로 표현되며, 가우스(Gaussian) 변수의 모든 정보는 공분산행렬 내에 포함되기 때문에 가우스 분포의 입력 데이터에 대해서는 적당한 것이다. 하지만 일반적으로 통신이나 신호 및 영상 처리 등에서의 입력 데이터에는 비가우스 분포도 있으며, 이러한 경우에도 효과적으로 적용될 수 있는 선형변환 기법의 연구가 요구된다.

최근 PCA의 제약을 해결하기 위한 대안으로 독립성분분석(independent component analysis : ICA)이 제안되었으며, 이는 데이터의 통계적 성질을 고려한 선형변환 기법으로 데이터의 분포정보를 이용하는 다차원 방법이다<sup>[4-6]</sup>. 하지만 알려진 수치적 기법의 ICA 알고리즘들에서는 데이터의 통계적 독립성을 판정하기 위해 확률밀도함수와 역행렬을 구한다든지 고차원의 cumulant나 moment를 구하는 등 복잡한 계산이 요구된다. 특히 ICA에서 신호모델을 추정하는 것은 혼합된 출력신호들 사이에 포함된 정보만을 이용하여 혼

합행렬을 추정하는 것으로 이를 위해 출력신호 상호간의 결합밀도함수를 이용하며, 그 함수의 계산은 매우 복잡하다.

독립성에 근거를 둔 수학적 기법의 ICA 방법들이 많이 연구되어왔으나, 지금까지의 대부분의 연구는 독립성분 사이의 비관계성을 추정하기 위하여 비가우스성을 이용하고 있다<sup>[4-7]</sup>. 이러한 비가우스의 고전적인 척도로 kurtosis(4차 cumulant)를 이용하는 방법이 있으나, 이들은 현실한 척도가 되지 못하는 제약이 있다. kurtosis가 가지는 제약을 해결하기 위해서 정보이론에 기초한 엔트로피(entropy)를 이용한 negentropy방법이 제안되었으나 이 방법에서도 확률밀도함수의 계산이 요구되어 계산이 대단히 어려운 제약을 가진다. 또 다른 방법으로는 정보이론에 입각한 상호정보의 최소화로 negentropy를 최대화하는 방향을 찾는 방법이 제안되었다<sup>[7]</sup>. 이 방법은 궁극적으로 Kullback-Leibler 발산을 최소화하는 것으로 여기에서도 신호의 공분산을 구해야 하는 제약이 있다. 한편, 지금까지 제시된 방법들에 비해 상대적으로 간단한 계산량을 가지는 informax 원리에 기초를 둔 maximum likelihood 추정법을 이용한 방법도 제안되었다<sup>[5,6]</sup>. 여기에서는 독립성분의 성질에 대한 정보가 매우 나쁜 결과를 초래하는 위험성이 내포되어 있다. 이상에서 제시된 방법들은 결합밀도함수나 확률밀도함수 또는 공분산의 계산 및 잘못된 추정에 따른 위험성 등의 제약을 가지며, 문제의 규모가 커질수록 계산량은 기하급수적으로 증가되고 그에 따른 계산의 복잡성과 소요시간도 증가되어 비현실적이다.

한편 복잡한 계산에 따른 많은 계산시간이 요구되는 수치적 기법의 대안으로 최근 입력과 출력사이의 선형성을 가지

는 간단한 신경망을 이용하여 해결하려는 연구가 활발하게 진행되고 있다.<sup>[3-6,11]</sup> 이는 신경망이 대규모의 병렬계산과 분산된 국부적 계산의 특성을 가져 통계적인 기법이나 계산·이론적인 방법의 문제들도 해결할 수 있는 속성이 있기 때문이다. 지금까지 발표된 신경망을 이용한 ICA방법으로는 엔트로피를 최소화하는 것에 기초를 둔 고정점(fixed point : FP) 알고리즘<sup>[7-11]</sup>, 비선형 PCA에 기초한 recursive least square 알고리즘, 결합엔트로피를 최대화하기 위하여 확률적 기용기를 이용하는 Bell & Sejnowski(BS) 알고리즘, BS 알고리즘에서 확률적 기용기 대신 자연기용기(natural gradient)를 이용한 자연기용기 알고리즘 등이 제안되었다<sup>[5,7]</sup>. 여기에서 결합엔트로피를 최대화하는 알고리즘은 원 신호를 더 잘 근사화 하지만 기용기의 변화를 위한 학습율과 같은 파라미터의 설정이 경험적이며, 그에 따른 수렴속도도 느린 제약이 가진다. 특히 학습과정에서 학습율의 설정에 따라서는 그 수렴이 느려지거나 알고리즘이 수렴되지 않는 경우도 발생된다. 따라서 이런 제약들을 해결하면서도 신경망이 가지는 병렬성과 분산성, 그리고 더 작은 메모리 요구 등의 속성을 가지는 FP 알고리즘이 제안되었다<sup>[5,7]</sup>. FP 알고리즘은 엔트로피 최적화 방법으로부터 유도된 기법으로 그 수렴속도가 적어도 2차 함수정도로 지금까지 알려진 기법 중 가장 빠른 학습속도를 가진다.

본 연구에서는 신경망 기반 독립성분석을 위한 효율적인 학습알고리즘을 제안한다. 제안된 기법에서는 엔트로피 최적화방법으로 뉴턴(Newton)법<sup>[12]</sup>에 기초한 기존 FP 알고리즘에서 목적함수의 근을 구하기 위한 도함수의 계산식을 함수값으로 근사화하는 할선(Secant)법<sup>[12]</sup>을 도입하였다. 이는 도함수의 계산에 따른 알고리즘의 복잡성을 줄여 계산 시간을 줄일 수 있어 더욱 빠른 학습성능의 독립성분석을 하기 위함이다. 제안된 학습알고리즘의 독립성분석 기법을 512x512의 픽셀을 가지는 10개의 영상을 대상으로 임의의 혼합행렬에 따라 발생하는 혼합영상들을 각각 시뮬레이션한 후 그 타당성을 확인하였으며, 기존의 뉴턴법에 기초한 알고리즘의 결과와 비교 고찰하였다.

## 2. 독립성분석

PCA가 가우스 분포를 가지는 신호들간의 상관성을 나타내는 공분산행렬을 이용한 2차 선형변환 기법이라면, ICA는 공분산행렬에 포함되지 않는 데이터의 비가우스 분포 즉, 군집성이나 독립성을 가지는 변수에 대한 고차통계에 기초한 다차원 변환기법으로 PCA를 확장시킨 것이다<sup>[1-3,7]</sup>. 그림 1은 평행사변형 내에 데이터가 균일하게 분포된 상태에서 ICA와 PCA의 차이를 보여주는 것이다. 그림에서 보면 분명히 ICA가 PCA보다 분포된 데이터의 속성을 더 잘 나타내고 있음을 알 수 있다.

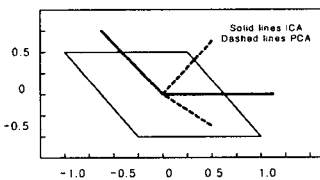


그림 1. ICA와 PCA의 속성비교

ICA는 m개의 입력신호 s가 선형적으로 혼합된 n개의 신호 x가 알려져 있을 때, 혼합된 신호로부터 역으로 m개의 독립입

입력신호를 찾는 기법이다. 여기서 입력신호들을 혼합하는데 이용된 혼합행렬 A는 알려져 있지 않으며, 혼합과정에서 잡음 n이 추가 될 수도 있다. 이때 복합신호와 입력신호와의 관계는

$$x = As + n = \sum_{i=1}^m s(i)a(i) + n \quad (1)$$

로 정의된다. 여기서 잡음 n은 보통 입력신호와 구별되지 않기 때문에 생략할 수도 있으며,  $A=[a(1), a(2), \dots, a(m)]$ 으로 a(i)는 ICA의 basis vector이다. 결국 ICA는 알려진 혼합신호 x로부터 혼합행렬의 역행렬  $A^{-1}$ 을 찾는 기법이다. 이상의 관계를 요약하면 그림 2와 같다. 그림에서 보면 혼합기(mixer)의 출력신호인 복합신호는 알 수 있으나 혼합기의 특성인 A와 입력신호인 원 신호 s는 알려져 있지 않다. 결과적으로 입력신호와 출력신호가 일치하도록 하는 즉,  $y = Wx = WA$ 에서  $WA=I$ , 곧  $W=A^{-1}$ 의 관계를 만족토록 하는 것이다.

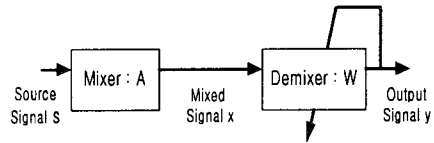


그림 2. ICA를 위한 구성도

그림 2로부터 혼합행렬 A와 역혼합행렬 W에 대하여 좀 더 상세히 살펴보면 다음 그림 3과 같은 구성도로 나타낼 수 있다. 그림에서  $x = As$ 이고,  $y = Wx$ 이다. 이때 ICA는 출력신호 y의 각 요소들이 통계적으로 독립성을 유지해야 하며 직교성의 제약조건은 포함하지 않는다. 그림에서 보면 ICA는 혼합행렬과 일치하는 역혼합행렬을 찾는 과정에서 출력신호가 독립성을 가지도록 하는 기법이다. 따라서 ICA는 알려진 혼합신호 x로부터 출력신호 y를 찾는 기법으로 궁극적으로는 역혼합행렬 W를 찾아서 원 신호 s의 근사값을 알아내는 것이다. 결국 역혼합행렬 W의 추정은 이를 포함하는 목적함수(objective function)를 정의하여 최적화 함으로써 이루어진다. 이때 신호의 1차와 2차의 통계성에 따른 상관성을 고려하기 위한 별도의 전처리된 혼합신호를 이용하면 좀 더 효과적으로 ICA 기법을 수행할 수 있다.

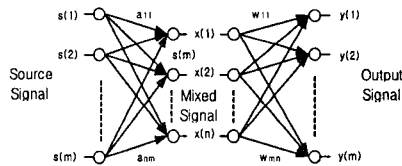


그림 3. 혼합행렬과 역혼합행렬의 상세 설명도

한편, 신호의 통계성에 따른 상관성을 고려하여 좀 더 효율적인 ICA를 수행하기 위하여 영평균(zero-mean)과 whitening의 전처리 과정을 이용한다. 먼저, 신호의 영평균은 데이터의 1차적 통계성을 고려한 정규화로 학습알고리즘을 간략하게 하는 기법이다<sup>[5-9]</sup>. 이는 혼합신호 벡터 x에서 평균값  $\bar{x}$ 를 뺀 차를 구함으로써 간단하게 구할 수 있다. 즉, 영평균된 새로운 데이터 벡터 x는

$$x = x - \bar{x} \quad (2)$$

이다.

한편 데이터의 2차적 통계성을 고려하여 상호간의 의존성을 줄이기 위한 기법으로 whitening이 이용되고 있다. whitening은 데이터 벡터  $\mathbf{x}$ 의 공분산행렬이 단위 행렬값을 갖도록 함으로써 구할 수 있다. 즉,  $E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)=\mathbf{I}$ 가 되도록 한다. 이렇게 함으로써 복합신호들 상호간의 상관성이 줄어들어 좀 더 강한 독립성분의 신호가 된다. 일반적으로 whitening을 위한 방법들<sup>[8]</sup>이 알려져 있으나 그 중에서도 PCA를 이용한 수치적 기법이 널리 이용되고 있으며, 일반적인 PCA whitening 행렬  $\mathbf{V}$ 는

$$\mathbf{V} = \mathbf{D}^{(-1/2)}\mathbf{E}^T \quad (3)$$

로 정의된다. 여기서  $\mathbf{D}$ 는 고유값(eigen value)  $\lambda$ 로 구성되는 대각행렬이며,  $\mathbf{E}$ 는 고유벡터(eigen vector)  $\mathbf{c}$ 로 구성되는 직교행렬이다. PCA whitening이 가지는 장점은 이미 잘 알려진 표준 소프트웨어를 이용할 수 있으며, 또 다른 장점으로는 PCA가 원 신호, 즉 독립성분의 개수를 추정하는 편리한 수단이 되는 것이다. 본 연구에서는 복합신호나 복합영상을 영평균하고, 전술한 장점들을 가지는 표준 PCA 기법으로 데이터를 whitening하여 원 신호와 원 영상을 추출하는 ICA에 이용하였다.

### 3. 고정점 알고리즘

결합엔트로피를 최대화하는 신경망 기반 독립성분분석 기법들에서 기울기의 변화를 조정하기 위해 학습율을 이용한다<sup>[3-7]</sup>. 하지만 이들 기법에서는 학습율의 설정에 따라 그 수렴속도가 느려지거나 경우에 따라서는 알고리즘이 수렴되지 않는 경우도 발생된다. 한편 엔트로피 최적화 방법으로부터 유도된 FP 알고리즘은 그 수렴속도가 적어도 2차 함수정도로 지금까지 알려진 기법 중 가장 빠른 학습속도를 가진 알고리즘이다<sup>[5,7,9,11]</sup>. 이는 신호 내에 포함된 상호정보를 최소화함으로써 ICA의 해를 구하는 기법이다.

상호정보는 랜덤변수 상호간 독립성의 정보이론적 척도로 ICA 변환을 찾기 위한 판별로서 이용될 수 있다. 일반적으로 변수들 상호간의 정보를 표현하는 상호정보는 비가우시성의 척도로 이용되는 negentropy로 정의된다.  $n$ 개의 랜덤변수 벡터  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ 를 위한 negentropy  $J(\mathbf{y})$ 는

$$J(\mathbf{y}) = H(\mathbf{y}_{\text{gauss}}) - H(\mathbf{y}) \quad (4)$$

이다. 여기서  $H(\mathbf{y})$ 는 랜덤변수  $\mathbf{y}$ 의 엔트로피이고,  $\mathbf{y}_{\text{gauss}}$ 는 가우시 랜덤벡터이다. 이때 negentropy  $J(\mathbf{y})$ 를 이용한 상호무관(decorrelation)한  $n$ 개 랜덤변수  $y_i(i=1, \dots, n)$  사이의 상호정보  $I(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 는

$$I(y_1, y_2, \dots, y_n) = J(\mathbf{y}) - \sum_{i=1}^n J(y_i) \quad (5)$$

로 정의된다. 결국 ICA를 위한 랜덤변수간의 독립성을 최대화하기 위해 식 (5)로 정의되는 상호정보  $I(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 를 최소화하며, 이는 식 (4)의 negentropy를 최대화하는 것이다. 여기서 negentropy의 최대화는 식 (5)의 우측 2번째 항의 최대화로 가능하다. 이를 위한 근사식으로 최대 엔트로피 원리를 이용한 식은

$$J(y_i) \approx c[E\{G(y_i)\} - E\{G(\nu)\}]^2 \quad (6)$$

와 같다. 여기서  $G$ 와  $c$ 는 각각 비2차(non-quadratic) 함수와 상수이고,  $\nu$ 는 평균이 0이고 분산이 1인 표준화된 가우시 변수이며, 랜덤변수  $y_i$ 도 평균이 0이고 분산이 1인 변수로 가정한다. negentropy의 근사화를 위한 식 (6)은 ICA 변환을 추정하기 위한 목적함수로 이용될 수 있다. 따라서 ICA에서 독립변수들의 상호간 무관성을 고려하여 하나의 독립성분  $y_i = \mathbf{W}^T \mathbf{x}$ 를 찾기 위한 목적함수  $J_G(\mathbf{W})$ 는 식 (6)에 따라

$$J_G(\mathbf{W}) = [E\{G(\mathbf{W}^T \mathbf{x})\} - E\{G(\nu)\}]^2 \quad (7)$$

로 나타낼 수 있다. 이를 전체  $n$ 개의 독립성분 모두에 대해서 확장하면

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \sum_{i=1}^n J_G(\mathbf{w}_i) \quad \text{w.r.t. } \mathbf{w}_i, i=1,2,\dots,n \\ & \text{subject to } E\{(\mathbf{w}_k^T \mathbf{x})(\mathbf{w}_j^T \mathbf{x})\} = \delta_{jk} \end{aligned} \quad (8)$$

이 된다. 여기서  $\mathbf{w}_i$ 는 역혼합행렬  $\mathbf{W}$ 의 행벡터 중 하나이며, ICA 변환은  $\mathbf{s} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ 로 얻어진다. 결국 식 (7)이나 (8)로 정의된 ICA를 위한 목적함수를 최대화하기 위한 방법이 요구된다. 이러한 방법으로 가장 간단한 알고리즘은 기울기 하강(gradient descent)에 기초를 둔 기법들이다. 하지만 이들 알고리즘에서는 학습율의 설정에 따라서는 수렴이 느리거나 학습이 이루어지지 않는 제약들이 있다. 이 방법에 기초한 알고리즘들의 제약들을 해결하기 위한 대안으로 FP 알고리즘이 제안되었다<sup>[5-9]</sup>.

FP 알고리즘은 알고리즘의 한 단계에 많은 수의 데이터들이 이용되는 일괄처리의 계산으로 신경망의 학습을 위한 알고리즘이다<sup>[9]</sup>. 데이터 벡터  $\mathbf{x}$ 가 상관행렬  $E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)=\mathbf{I}$ 로 whitening되어 있다고 가정할 때, 하나의 독립성분을 위한 식 (7)로부터 FP 알고리즘을 유도하면 다음과 같다. 식 (7)에서  $J_G(\mathbf{W})$ 의 최대화는 반드시  $E\{G(\mathbf{W}^T \mathbf{x})\}$ 의 최적에서 얻어진다. 이때 Kuhn-Tucker 조건으로부터,  $E\{(\mathbf{W}^T \mathbf{x})^2\} = \|\mathbf{W}\|^2 = 1$  조건하에서  $E\{G(\mathbf{W}^T \mathbf{x})\}$ 의 최적은 다음의 값

$$E\{\mathbf{x}\mathbf{g}(\mathbf{W}^T \mathbf{x})\} - \beta \mathbf{W} = 0 \quad (9)$$

으로 주어진다. 여기서  $\mathbf{g}(\cdot)$ 는 비2차 함수  $G$ 의 미분이고,  $\beta = E\{\mathbf{W}_0^T \mathbf{x}\mathbf{g}(\mathbf{W}_0^T \mathbf{x})\}$ 인 상수이며,  $\mathbf{W}_0$ 는  $\mathbf{W}$ 의 최적값이다. 따라서 방정식 (9)의 근을 구하기 위해 빠른 수렴속도를 가지는 뉴턴법의 기법<sup>[8,12-14]</sup>을 도입한다. 뉴턴법은 충분히 정확한 초기값이 설정되었을 때 항상 근에 수렴한다. 이를 위해 식의 좌변 항을  $F(\mathbf{W})$ 로 나타내고, 그것의 Jacobian matrix  $\mathbf{JF}(\mathbf{W})$ 를 구하면 다음과 같다. 즉,

$$\mathbf{JF}(\mathbf{W}) = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T \mathbf{g}'(\mathbf{W}^T \mathbf{x})\} - \beta \mathbf{I} \quad (10)$$

이다. 한편 데이터 벡터  $\mathbf{x}$ 가 이미 whitening되어 있어 뉴턴법에 의해 해를 구하는데 이용되는  $\mathbf{JF}(\mathbf{W})$ 의 역행렬 계산을 간단하게 하기 위해 식 (10)의 우변 첫째 항을

$$E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T \mathbf{g}'(\mathbf{W}^T \mathbf{x})\} = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}E\{\mathbf{g}'(\mathbf{W}^T \mathbf{x})\} = E\{\mathbf{g}'(\mathbf{W}^T \mathbf{x})\}\mathbf{I} \quad (11)$$

로 근사화할 수 있다. 식 (11)을 식 (10)에 대입하면

Jacobian matrix는 대각선 행렬이 되어 쉽게 역행렬을 계산할 수 있다. 따라서  $\beta$ 를  $W_0$  대신에  $W$ 의 현재 값으로 나타내어 근사화된 반복기법으로 근인 역혼합행렬  $W$ 를 구하는 뉴우턴법은

$$\begin{aligned} W^* &= W - [E(xg(W^T x)) - \beta W] / [E(g'(W^T x)) - \beta] \\ W^* &= W^* / \|W^*\| \end{aligned} \quad (12)$$

와 같다. 여기서  $W^*$ 는  $W$ 의 새롭게 경신된 값이고,  $\beta = E(W^T x g(W^T x))$ 이다. 결국 식 (12)는 뉴우턴법에 기초를 둔 ICA를 위한 FP 알고리즘이다. 또한 식 (12)의 뒷식 양쪽에  $\beta - E(g'(W^T x))$ 를 곱해 구해지는 더욱 간단한 뉴우턴법의 FP 알고리즘은

$$W^* = E(xg(W^T x)) - E(g'(W^T x))W, W^* = W^* / \|W^*\| \quad (13)$$

으로 표현될 수 있다.

지금까지 유도된 FP 알고리즘에서는 역혼합행렬  $W$ 의 경신을 위한 비선형 방정식을 푸는데 뉴우턴의 기법을 사용하고 있다. 이는 방정식의 해를 직접적으로나 단순한 방법으로 구할 수 없을 때 쉽게 해결할 수 있는 다른 문제로 근사화하는 방법이다. 뉴우턴의 기법은 주어진 정확도를 달성하는데 걸리는 반복수가 적어 빠른 학습속도를 가지나 계산과정에 1차 미분인 식 (10)의 Jacobian matrix  $JF(W)$ 의 계산이 요구되어 계산시간이 상대적으로 길어지는 제약이 있다. 특히 뉴우턴법에서는 함수의 성질에 따라 그 수렴시간이 증가하거나 함수가 우함수인 경우에는 근에 수렴하지 못하고 발산하는 속성이 있다. 또한 이 기법에서는 기울기인 도함수 값이 0에 수렴할 경우 역혼합행렬  $W$ 의 계산과정에서 0으로 나누어지는 결과가 발생되어 비현실적인 수렴현상도 일어날 수 있다. 그러므로 뉴우턴법에서 발생하는 계산의 복잡성을 줄이고 수렴제약들을 해결할 수만 있다면 좀 더 빠른 효과적인 FP 알고리즘의 ICA 기법을 수행할 수 있을 것이다.

#### 4. 할선법에 의한 고정점 알고리즘

할선법은 현재의 함수 값과 바로 이전의 함수 값을 이용하여 방정식의 근을 구하는 방법이며, 이는 방정식의 해를 직접적으로나 단순한 방법으로 구할 수 없을 때 뉴우턴법과 마찬가지로 쉽게 해결할 수 있는 다른 문제로 근사화하는 방법이다. 여기서는 방정식의 해를 구하는데 있어 뉴우턴법에서처럼 별도의 1차 미분 계산이 요구되지 않는다.

따라서 신경망 기반 ICA를 위한 뉴우턴법의 FP 알고리즘에서 목적함수의 근을 구하기 위해 1차 미분인 도함수의 값을 계산하는 제약을 해결하기 위하여 할선법에 기초한 새로운 FP 알고리즘을 제안한다. 일반적으로 할선법에서는 도함수  $f'(W)$ 를 유한차분으로 근사화하기 위하여 함수의 현재와 이전의 값을 이용한다. 이때 도함수  $f'(W)$ 는 다음과 같이 근사화된다. 즉,

$$f'(W_k) \approx [f(W_k) - f(W_{k-1})] / [W_k - W_{k-1}] \quad (14)$$

이다. 여기서  $k$ , 그리고  $k-1$ 은 각각 현재, 그리고 이전의 반복수를 의미한다. 식 (14)의 근사화식을 이용하여 할선법에 기초한 역혼합행렬  $W$ 의 경신 반복식은

$$W_{k+1} = W_k - f(W_k)(W_k - W_{k-1}) / [f(W_k) - f(W_{k-1})] \quad (15)$$

와 같다. 식에서는  $W$ 의 경신을 위해 2개의 초기값인  $W_k$ 와  $W_{k-1}$ 를 요구한다. 하지만 이들 값들은 별도로 설정되는 것이 아니며 계산과정에서 생성되는 값들이다. 결국 식 (15)로 표현되는 할선법에서는 식 (12)의 뉴우턴 기법에 기반을 둔 반복식에서처럼 별도의 1차 미분 계산이 요구되지 않아 계산적으로 좀더 효율적이다.

할선법에 기초한 경신 반복식 (15)를 이용하여 방정식(9)의 근을 구함으로써 역혼합행렬  $W$ 를 구할 수 있다. 결국  $\beta$ 를  $W_0$  대신에  $W$ 의 현재값으로 나타낸 역혼합행렬  $W$ 를 위한 학습과정은

$$\begin{aligned} f(W^*) &= [E(xg(W^{*T} x)) - \beta W^*] \\ f(W) &= [E(xg(W^T x)) - \beta W] \\ W^* &= W - f(W)[(W - W^*) / (f(W) - f(W^*))] \\ W^* &= W^* / \|W^*\| \end{aligned} \quad (16)$$

와 같다. 여기에서  $W^*$ 는 바로 전에 계산된  $W$ 의 값이고,  $W^*$ 는  $W$ 의 새롭게 경신된 값이며,  $\beta = E(W^T x g(W^T x))$ 이다. 결국 식 (16)은 할선법에 기초를 둔 신경망 기반 ICA를 위한 FP 알고리즘이다.

제안된 할선법에 기초를 둔 FP 알고리즘의 역혼합행렬  $W$ 의 경신과정을 요약하면 다음과 같다.

단계 1 :  $W(0) = \text{rand}(\ )$ 로 설정한다.

단계 2 :  $W = W(0) / \|W(0)\|$ 의 값을 계산한다.

단계 3 :  $W^* = 0$ 로 설정한다.

단계 4 :  $\|W - W^*\| > \epsilon$  이고  $\|W + W^*\| > \epsilon$  이면 다음의 식에 따라  $W$ 를 계산하고, 그렇지 않으면 과정을 종료한다.

- (1)  $\beta$ ,  $f(W^*)$ , 그리고  $f(W)$ 를 계산한다.
- (2)  $W^* = W - f(W)[(W - W^*) / (f(W) - f(W^*))]$ 를 계산한다.
- (3)  $W^* = W$ 로 둔다.
- (4)  $W = W^* / \|W^*\|$ 를 계산한다.

위의 과정에서 벡터  $x$ 는 whitening된 신호벡터이며,  $W$ 의 변화량  $\epsilon$ 은 1보다 작은 임의의 값이다. 특히 경신식에서  $g(\cdot)$ 는 비선형함수로 일반적으로  $(\cdot)^3$ 과  $\tanh(\cdot)$ 의 함수가 이용된다<sup>[3-4]</sup>.  $(\cdot)^3$ 함수는 학습속도가 빠르며,  $\tanh(\cdot)$ 함수는 좀더 안정한 특성을 가진다<sup>[9]</sup>. 본 연구에서는 실험을 통하여 상대적으로 이들 함수에 대한 성능들이 거의 유사함을 확인하였으며, 여기서는 학습속도를 고려한  $(\cdot)^3$ 함수의 적용 결과들을 서술한다.

#### 5. 시뮬레이션 결과 및 분석

제안된 학습알고리즘의 신경망 기반 ICA의 타당성과 성능을 평가하기 위하여 2차원의 데이터를 가지는 영상을 대상으로 임의의 혼합행렬에 따라 발생하는 혼합영상들을 각각 시뮬레이션 하였다. 신호나 영상의 분리성능을 평가하기 위해 각 데이터의 절대합오차(absolute sum error : ASE)를 정의하여 원 신호와 복원된 신호의 정합성을 각각 비교하였다. 이때 절대합오차  $ASE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|$ 로 하였으며, 여기서  $x_i$ 와  $y_i$ 는 각각 원 신호와 복원된 신호의  $i$ 번째 값이며,  $N$ 은 픽셀의 총 수이다. 또한 학습의 종료조건으로는 역혼합

행렬  $W$ 의 변화량  $\epsilon$ 이 0.0001 이하일 때나 하나의 신호나 영상을 분리하는데 소요되는 학습반복수가 5,000회 이상일 때로 하였다. 실험은 펜티엄IV-1.5G 컴퓨터 상에서 Matlab 5.1로 실행하였다.

그림 4는 실험에 이용된 풍경화, 레나, 로즈, 바다, 그리고 서류꽂이 등의 10개 원 영상 중 5개의 원 영상과 임의의 혼합행렬로부터 생성된 10개 중 5개의 복합영상을 각각 나타낸 것이다. 그림 4(b)는 그림 4(a)로부터  $10 \times 10$ 의 임의의 랜덤값을 가지는 혼합행렬  $A$ 로부터 생성된 복합영상들이다. 그림에서 혼합된 영상들 각각으로부터 원 영상들에 대한 정보들은 발견할 수 없으며, 실험에서는 혼합된 영상을 역평균과 whitening하여 ICA의 입력신호로 이용하였다.

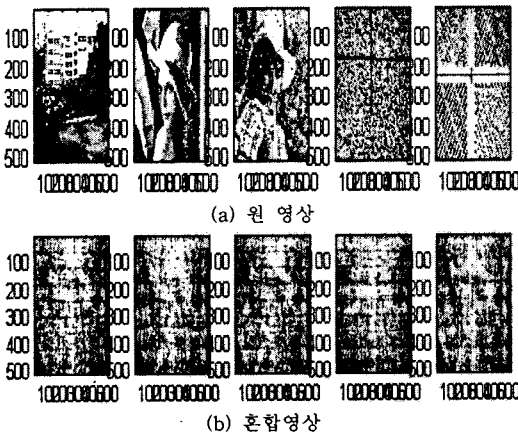
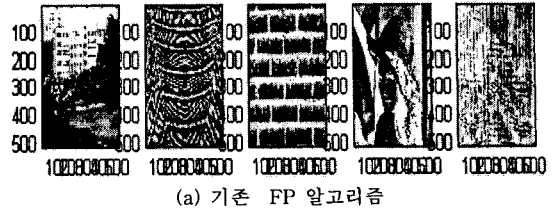


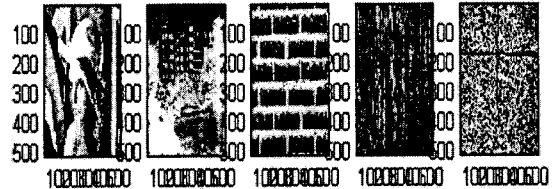
그림 4. 512×512 픽셀의 10개 중 5개 독립영상

그림 5 (a)와 (b)는 그림 4(b)의 혼합영상들을 대상으로 각각 뉴턴법과 할선법의 FP 알고리즘으로 ICA를 수행한 후 분리된 10개의 영상들 중 5개를 각각 나타낸 것이다. 그림에서 보면 어느 알고리즘이나 원 영상과 분리된 영상들 사이의 순서는 일치되지 않으므로 ICA가 영상의 분리순서는 고려하지 않음을 알 수 있다. 기존 FP 알고리즘으로 수행된 그림 5(a)를 보면 레나와 서류꽂이의 분리된 영상이 원 영상과 반대의 부호를 가지며, 제안된 그림 5(b)에서는 풍경화와 서류꽂이 영상의 경우가 원 영상과 반대의 부호를 가진다. 이 결과 역시 ICA에서 독립성분을 추출할 때 순서뿐만 아니라 부호도 고려하지 않는 속성이 반영된 것이다. 한편 복원된 분리영상은 각각 혼합된 영상에서의 독립성분이며, 풍경화를 비롯한 10개의 독립영상 각각을 찾아내는데 평균적으로 소요되는 알고리즘의 학습반복수에서 기존 알고리즘은 8, 13, 1, 17, 9, 67, 9, 69, 44, 그리고 5회 각각 수행되었고, 제안된 알고리즘은 각각 11, 13, 7, 6, 5, 10, 6, 1, 7, 그리고 9회 수행되었다. 이는 512 x 512 픽셀을 가지는 10개의 영상을 분리하는데 각각의 알고리즘이 총 242와 75회 반복수행 되었음을 의미한다. 따라서 독립성분분석을 위한 신경망의 학습에서 제안된 알고리즘은 기존의 알고리즘에 비해 약 3.2 배정도 개선되었다.

한편 그림 6은 혼합된 10개의 신호를 대상으로 제안된 FP 알고리즘과 기존의 FP 알고리즘을 각각 20회 수행하여 그 중 분리하는데 가장 오래 걸리는 로즈영상의 학습반복수를 나타낸 것이다. 그림에서 기존 FP 알고리즘의 학습반복수는



(a) 기존 FP 알고리즘



(b) 제안된 FP 알고리즘

그림 5. 512×512 픽셀의 10개 중 5개의 분리된 영상

최소 1에서 최대 55회이며, 제안된 알고리즘의 학습반복수는 최소 1에서 최대 18회이다. 이들의 평균 학습반복수는 각각 약 34와 8회 정도로 제안된 알고리즘이 기존의 알고리즘보다 약 4.3배 정도가 개선되었다. 특히, 그림에서 기존 알고리즘이 제안된 알고리즘에 비해 시행에 따른 학습반복수의 변화가 심함을 알 수 있다. 이는 기존 알고리즘의 성능이 제안된 알고리즘보다 설정되는 역혼합행렬의 초기값에 더욱 더 의존됨을 보여 준 것이다.

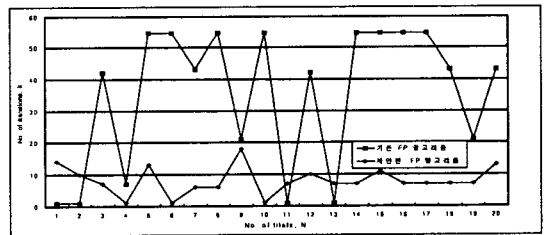


그림 6. 로즈영상의 분리에 따른 학습반복수

표 1은 10개의 혼합된 영상에 대해 제안된 FP 알고리즘과 기존의 FP 알고리즘을 각각 20번씩 반복 실험하여 대응되는 원 영상과 복원된 영상에 대해 데이터 단위로 절대합오차 ASE, 학습반복수  $k$ , 그리고 학습에 소요된 CPU 시간  $t$  각각의 평균을 나타낸 것이다. 특히 기존 알고리즘의 경우 영상의 분리를 위한 20회 시행 중 8회가 종료조건을 만족하지 못하여 전체 10개의 영상을 분리하는데 실패하였다. 하지만 학습반복수에 따른 종료조건을 무시하여 실험을 반복한 결과 이 경우는 최소 2290에서 최대 43117회까지 소요되는 비현실적인 수렴시간을 보였다. 하지만 제안된 알고리즘에서는 20회 시행 모두에서 영상의 분리가 이루어졌다. 이는 기존의 알고리즘이 뉴턴법에 기초한 것으로 기울기인 도함수의 값이 0에 수렴될 경우 역혼합행렬의 경신과정에서 0으로 나누어지는 결과가 발생되어 비현실적인 수렴현상이 일어나는 것으로 추측된다. 표에서 기존 알고리즘의 결과는 추가시행을 실시하여 학습의 종료조건을 만족한 경우에 대한 결과이다. 먼저 기존과 제안된 알고리즘의 적벽돌,

벽돌타일, 철대문 각각의 절대합오차를 살펴보면, 다른 영상들에 비해 상대적으로 큰 값을 가진다. 이는 복합영상 중에 상대적으로 독립성이 다른 영상에 비해 낮은 영상일수록 그 분리성능은 떨어짐을 보여주는 것이다. 10개 영상 모두에 대해 기존과 제안된 알고리즘의 평균 절대합오차는 각각 3.593과 2.345로 제안된 알고리즘이 약 1.5배 우수하다. 한편, 학습반복수에서도 기존 알고리즘과 제안된 알고리즘 각각 175와 94회로 제안된 알고리즘이 약 1.9 배정도 개선되었다. 10개의 영상을 분리하는 소요된 평균 시간에서도 기존 알고리즘과 제안된 알고리즘 각각 433.199와 301.901로 제안된 알고리즘이 약 1.4 배정도 빠름을 알 수 있다. 따라서 제안된 알고리즘에 기초한 FP 알고리즘이 기존의 뉴우턴법에 기초한 FP 알고리즘보다 더욱 더 우수한 분리성능과 빠른 분리속도의 독립성분석이 가능함을 알 수 있다.

표 1. 기존 FP 알고리즘과 제안된 FP 알고리즘에 의한 학습결과

입력영상	기존 FP 알고리즘		
	절대합오차, ASE	반복학습수, k	소요시간, t
풍경화	0.281	28	69.312
레나	0.275	12	29.705
로즈	0.333	34	84.165
바닥	0.322	8	19.803
서류꽃이	0.372	26	64.361
나무무늬	0.393	16	39.607
우산	0.310	8	19.803
적벽돌	0.428	21	51.984
벽돌타일	0.426	10	24.754
철대문	0.453	12	29.705
계	3.593	175	433.199

입력영상	제안된 FP 알고리즘		
	절대합오차, ASE	반복학습수, k	소요시간, t
풍경화	0.079	13	41.752
레나	0.122	14	44.964
로즈	0.088	8	25.694
바닥	0.226	10	32.117
서류꽃이	0.247	9	28.905
나무무늬	0.315	10	32.117
우산	0.230	8	25.694
적벽돌	0.342	3	9.635
벽돌타일	0.320	8	25.694
철대문	0.376	11	35.329
계	2.345	94	301.901

이상의 신호와 영상에 대한 실험결과로부터 독립성분석을 위해 제안된 FP 알고리즘은 기존의 FP 알고리즘보다 학습속도와 분리성능의 개선된 학습성능이 있음을 확인할 수 있다. 또한 학습성능이 역혼합행렬의 초기값에 상대적으로 덜 의존함을 확인할 수 있다. 특히 문제의 규모가 클 때, 제안된 알고리즘은 기존 알고리즘에서 발생될 수 있는 비현실적인 수렴시간도 동시에 해결할 수 있다. 따라서 신경망용 독립성분석에 이용할 때 제안된 FP 알고리즘은 기존 FP 알고리즘의 효과적인 대안이 될 수 있다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 신경망 기반 독립성분석을 위한 효율적인 복합영상 분리기법을 제안하였다. 제안된 기법에서는 엔트로피 최적화 방법에서 유도된 FP 알고리즘에서 목적함수의 근을 구하기 위한 방법으로 뉴우턴법 대신 할선법을 도입하여 도함수의 계산과정을 줄임으로써 좀 더 빠르면서도 개선된 분리성능을 가지도록 하였다.

제안된 기법을 512x512의 픽셀을 가지는 10개의 영상들을 대상으로 임의의 혼합행렬에 따라 발생하는 복합신호와 복합영상들을 각각 시뮬레이션 한 결과, 우수한 분리성능과 빠른 분리속도가 있음을 확인하였다. 또한 기존의 알고리즘보다 임의로 설정되는 역혼합행렬의 초기값에 덜 의존하는 학습성능이 있으며, 대규모 문제에 적용할 경우 기존의 알고리즘에서 발생될 수 있는 비현실적인 수렴시간도 동시에 해결할 수 있었다.

향후 제안된 FP 알고리즘의 독립성분석 기법을 좀 더 다양한 분야에 큰 규모의 문제에 적용하며, 다른 독립성분석 기법과의 비교·연구가 뒤따라야 할 것이다.

## 참고문헌

- [1] K. I. Diamantaras and S. Y. Kung, 'Principal Component Neural Networks : Theory and Applications, Adaptive and learning Systems for Signal Processing, Communications, and Control', John Wiley & Sons, Inc., 1996
- [2] S. Haykin, 'Neural Networks : A Comprehensive Foundation', Prentice-Hall, 2ed, London, 1999
- [3] J. Karhunen and J. Joutsensalo, "Generation of Principal Component Analysis, Optimization Problems, and Neural Networks," *Neural Networks*, Vol. 8, No. 4, pp. 549-562, 1995
- [4] P. Comon, "Independent Component Analysis -A New Concept?," *Signal Processing*, vol.36, No.3, pp.287-314, Apr. 1994
- [5] T. W. Lee, 'Independent Component Analysis : Theory and Applications', Kluwer Academic Pub., Boston, 1998
- [6] J. Karhunen, "Neural Approaches to Independent Component Analysis and Source Separation," 4th European Symp., *Artificial Neural Network, ESANN96*, Burges, Belgium, pp. 249-266, Apr. 1996
- [7] A. Hyvaerinen, J. Karhunen, and E. Oja, 'Independent Component Analysis', John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001
- [8] A. Hyvaerinen and E. Oja, "A Fast Fixed Point Algorithms for Independent Component Analysis", *Neural Computation*, 9(7), pp. 1483-1492, Oct.1997
- [9] A. Hyvaerinen, "Fast & Robust Fixed-Point Algorithms for Independent Component Analysis", *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 10, No. 3, pp.626-634, May 1997
- [10] A. Hyvaerinen and E. Oja, "Independent Component Analysis : Algorithms and Applications", *Neural Networks*, Vol. 13, No. 4-5, pp. 411-430, June 2000
- [11] A. Cichocki and R. Unbehauen, "Robust Neural Networks with On-Line Learning for Blind Identification and Blind Separation of Sources", *IEEE Trans. on Circuits & Systems*, Vol. 43, No. 11, pp. 894-906, Nov. 1996
- [12] K. Atkinson, 'Elementary Numerical Analysis', John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993