# 에너지 최소화 방법을 이용한 영상분할

강진숙, 김진숙, 차의영
부산대학교 전자계산학과

# Image Segmentation with Energy Minimization Method

*Jin-Sook Kang, **Jin-Sook Kim, ***Eui-Young Cha

*,*** Dept. of Computer Science, Pusan Nat'l University
**Dept. of Multimidia, Pusan Nat'l University

E-mail : *jiskang@pusan.ac.kr, **jinsook@dit.ac.kr, ***eycha@harmony.cs.pusan.ac.kr

## 요 약

영상분할이란 영상 내에 존재하는 객체를 배경에서 분리해내는 것을 말한다. Active Contour 모델은 객체를 영상에서 분리하는 gradient 기반의 영상분할 방식이다. 전통적인 의미의 Active Contour 모델에서 사용한 gradient 함수 기반의 영상분할은 잡영이 많고 객체와 배경간 뚜렷한 경계가 없는 영상에서는 그 한계를 보이고 있다. 이에 본 논문에서는 이러한 Active Contour 모델의 단점을 극복하기 위한 방법으로 영상 내의 진화곡선에 의존하는 에너지 함수인 Mumford-Shah Functional을 이용한 방법을 제안한다. 이 방법은 영상 내의 Active Contour를 진화시켜 Mumford-Shah 함수의 에너지를 최소화시키는 Level Set 함수를 찾고 Level Set 함수에 의해 얻어진 부분영상에서 히스토그램을 이용한 임계치(thresholding) 방식을 사용하는 보다 효과적인 객체추출 모델이다.

## 1. 서론

영상처리 분야에서 영상분할(image segmentation)은 주어진 영상을 인식하기 위한 전처리 단계이다. 즉, 영상분할은 영상 내에 존재하는 객체(object)를 배경(background)으로부터 추출해냄으로써 추출된 객체를 인식할 수 있도록 하는 전 과정인 것이다.

이러한 영상분할과 영상인식을 처리하는 방법 중 하나인 Active Contour 모델은 1987년 M. Kass, A. Witkin 그리고 D. Terzopoulos에 의해 탄생되었다[4]. 이 방법의 기본적인 아이디어는 영상 내에 존재하는 객체 추출을 위해 주어진 영상 $I_0$에 Active Contour를 두어 제약조건을 주면서 객체의 경계에서 이 곡선이 멈출 때까지 이를 진화시키는 것이다. $D$를 유계(bounded)이고 열린 집합으로 $\partial D$를 경계로 갖는 $R^2$의 부분집합이라 두고 $I_0$를 $I_0 : \overline{D} \rightarrow R$인 주어진 영상으로, 그리고 $C(s)$를 $C(s) : [0,1] \rightarrow R^2$인 매개변수 곡선으로 둔다. 고전적 Active Contour 모델은 주어진 영상 $I_0$의 gradient( $\nabla I_0$)에 의존하는 edge-detector를 사용하였는데 다음의 식과 같다.

$$g(|\nabla I_0(x,y)|) = \frac{1}{1+|\nabla G_\sigma(x,y) * I_0(x,y)|^p}, \quad p \geq 1. \qquad (1)$$

여기서 $\nabla G_\sigma(x,y) * I_0(x,y)$는 영상 $I_0$에 Gaussian 함수 $G_\sigma(x,y) = \sigma^{1/2} e^{|x^2+y^2|/4\sigma}$ 를 convolution한 것이다. 곡선의 진화에 있어서는 Level Set 방법과 Osher와 Sethian의 평균곡률에 의한 움직임이 사용되어왔으며 다음의 식과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g(|\nabla I_0|)\,|\nabla \phi|\left(\mathrm{div}\left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}\right) + \nu\right),$$
$$\mathrm{in}(0, \infty) \times R^2 \qquad (2)$$

여기서 $\phi$는 진화곡선 $C$를 음함수로 표현한 함수로 $C = \{(x, y) | \phi(x, y) = 0\}$이며 $\nu$는 0이상인 상수이다. Active Contour 모델을 이용하여 영상분할을 할 때 진화하는 커브가 멈추도록 하기 위해서 영상 $I_0$의 gradient에 의존하는 edge-detector 함수와 진화곡선 방정식을 주로 사용해 왔다. 이런 방법들은 픽셀의 광강도의 변화량이 큰 곳, 즉 영상의 $|\nabla I_0|$의 값이 최대인 점($g(|\nabla I_0|)$의 값이 0인점)에서 Active Contour를 멈추게 하는 것이다. 이처럼 전통적인 Active contour 모델은 식 (1)에서와 같이 주어진 영상의 gradient에 의해 좌우되는 에지함수 $g$에 의존하고 있기 때문에 영상에서 경계가 확실히 존재하는 객체를 추출하는데는 유용하지만 잡영이 많이 존재하거나 경계가 불분명하고 또는 불연속적인 경계를 가진 영상에 적용하는 것은 무리다. 왜냐하면 잡영이 많이 존재하거나 경계가 불분명하고 불연속적인 경계를 가진 영상에서는 에지함수가 잡영에 걸려 그 점에서 곡선의 진화를 멈추게 하거나 찾고자하는 객체의 경계를 인식하지 못하여 놓여진 진화곡선이 경계선을 넘어 계속 진화하게 하기 때문이다. 이에 찾고자하는 객체의 경계를 gradient를 이용해 나타낼 필요가 없는 Active Contour 모델이 고안되어졌고 이것은 주어진 영상에 놓여진 진화곡선을 Mumford-Shah 영상분할 기법[ ]을 기반으로 하여 에너지 최소화 방법을 사용한 것이다[ ]. 본 논문은 2장에서 진화곡선을 찾고자하는 물체의 경계에서 멈추게 하기 위한 에너지 최소화 방법과 에지함수가 필요 없는 Mumford-Shah 모델과의 관계식에 대하여 알아보고 3장에서는 Level Set 함수를 이용한 Mumford-Shah 함수의 공식화와 주어진 영상에 놓여진 진화곡선을 나타내는 Level Set 함수를 구하기 위한 Euler-Lagrange 방정식을 소개한다. 4장에서는 영상에서 효과적으로 객체를 찾아내기 위하여 영상분할의 또 하나의 방식인 히스토그램을 이용하여 진화곡선 $C$에 의해서 구해지는 $D$위에서 부분적으로 상수인 함수 $I(x, y)$의 값을 구하고 Mumford-Shah 함수로부터 Euler-Lagrange 방정식의 해를 구한다. 즉, Level Set 함수를 구한다.

## 2. 에너지 최소화와 Mumford-Shah 모델

에지함수가 필요 없는 Active Contour 모델의 기본 아이디어는 주어진 영상 $I_0$내에 놓여진 곡선 $C$에 의해 생성되는 함수 $F(C)$의 값을 최소로 만드는 것이다. 함수 $F(C)$는 다음과 같다.

$$F(C) = \int\int_{Inside(C)} |I_0(x, y) - c_1|^2 dA + \int\int_{outside(C)} |I_0(x, y) - c_2|^2 dA \qquad (3)$$

아래의 그림1과 같이 $c_1$은 Active Contour $C$의 내부에 있는 영상의 광강도 평균이며 $c_2$는 진화곡선 $C$의 외부에 있는 영상의 광강도 평균이다.

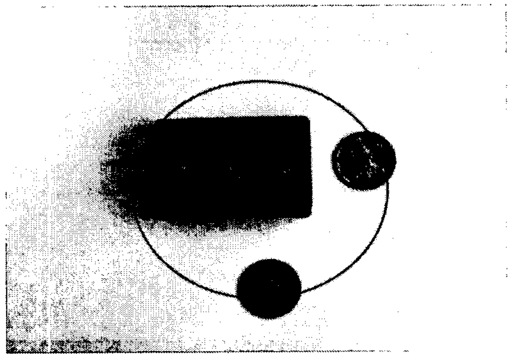

그림 1 진화곡선에 의한 영역분할

위 식(3)과 그림1에서와 같이 $c_1$과 $c_2$는 곡선 $C$에 의존적이고 $C$를 적절히 움직임으로써 $F(C)$의 값을 변화시킬 수 있다. 또한 주어진 영상에서 원하는 객체를 추출하기 위해 $F(C)$의 값이 최소가 되는 방향으로 $C$를 잘 움직여 나가야 한다. 여기서 $F(C)$를 일반화하여 $F(C)$의 값이 최소화되는 방향으로 $C$를 진화시키는 방법을 구하기 위해 Mumford-Shah 함수를 도입하였다[3]. 영상분할을 위한 Mumford-Shah 함수는 다음과 같다.

$$F^{MS}(I, C) = \mu \cdot Length(C) + \lambda \int\int_D |I_0(x, y) - I(x, y)|^2 dA + \int\int_{D\setminus C} |\nabla I(x, y)|^2 dA \qquad (4)$$

$I(x, y)$는 부분적으로 완만한 함수인데 여기서 우리는 $C$에 의해서 부분영상에서 광강도의 히스토그램을

이용하여 $I(x,y)$의 값을 구했다. 여기서 $C$에 의존하는 $I(x,y)$의 값을 부분적 상수함수로 정의함으로써 다음과 같이 Mumford-Shah functional을 정의 할 수 있다.

$$F^{MS}(I,C)$$
$$= \mu \cdot Length(C) + \nu \cdot Area(inside(C))$$
$$+ \lambda_1 \int\int_{inside(C)} |I_0(x,y) - I(x,y)|^2 dA \qquad (5)$$
$$+ \lambda_2 \int\int_{outside(C)} |I_0(x,y) - I(x,y)|^2 dA$$

## 3. Level Set 공식화와 Euler-Lagrange 방정식

주어진 영상 $I_0$에 놓여진 Active Contour $C$를 처리하기 위해 Level Set 함수를 다음과 같이 도입한다.

$$\begin{cases} C = \partial\omega = \{(x,y) \in D \mid \phi(x,y) = 0\} \\ inside(C) = \omega = \{(x,y) \in D \mid \phi(x,y) > 0\} \\ outside(C) = D \setminus \omega = \{(x,y) \in D \mid \phi(x,y) < 0\} \end{cases}$$

Heaviside 함수 $H$와 $\delta_0$는 다음과 같이 정의된다.

$$H(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{if } \phi > 0 \\ 0, & \text{if } \phi < 0 \end{cases}$$
$$\delta_0 = \frac{d}{dt} H(\phi)$$

Level Set 함수와 Heaviside 함수를 이용하여 $C$의 길이와 $C$에 내부의 면적을 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$Length(C) = Length(\phi = 0)$$
$$= \int\int_D |\nabla H(\phi(x,y))| \, dA \qquad (6)$$
$$= \int\int_D \delta_0(\phi(x,y)) |\nabla \phi(x,y)| \, dA$$
$$Area(C) = Area\{\phi \geq 0\}$$
$$= \int\int_D H(\phi(x,y)) \, dA$$

Mumford-Shah 함수를 식(6)과 곡선 $C$에 대한 Level Set 함수 $\phi$와 Heaviside 함수 $H$를 이용하여 나타내면 다음의 식(7)과 같다. 여기서 $\mu$, $\nu$, $\lambda_1$그리고 $\lambda_2$는 0 이상인 상수이다.

$$F^{MS}(I,\phi)$$
$$= \mu \cdot \int\int_D \delta_0(\phi(x,y)) |\nabla \phi(x,y)| \, dA$$
$$+ \nu \cdot \int\int_D H(\phi(x,y)) \, dA \qquad (7)$$
$$+ \lambda_1 \int\int_D |I_0(x,y) - I(x,y)|^2 H(\phi(x,y)) \, dA$$
$$+ \lambda_2 \int\int_D |I_0(x,y) - I(x,y)|^2 (1 - H(\phi(x,y))) \, dA$$

위 식(7)을 정규화하기 위하여 $H$를 $D$에서 이계미분 가능인 $H_\varepsilon(\phi) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\phi}{\varepsilon}\right)\right)$ 함수로 그리고 $\delta_\varepsilon = \frac{d}{dt}H_\varepsilon$ 함수로 두어서 Mumford-Shah 함수를 다시 나타내면 아래와 같다.

$$F_\varepsilon^{MS}(I,\phi)$$
$$= \mu \cdot \int\int_D \delta_\varepsilon(\phi(x,y)) |\nabla \phi(x,y)| \, dA$$
$$+ \nu \cdot \int\int_D H_\varepsilon(\phi(x,y)) \, dA \qquad (8)$$
$$+ \lambda_1 \int\int_D |I_0(x,y) - I(x,y)|^2 H(\phi(x,y)) \, dA$$
$$+ \lambda_2 \int\int_D |I_0(x,y) - I(x,y)|^2 (1 - H(\phi(x,y))) \, dA$$

여기서 Active Contour $C$에 의해 정의되는 Level Set 함수 $\phi$에 대한 $F_\varepsilon^{MS}(I,\phi)$함수의 최소화를 위해 이것과 관련된 $\phi$에 대한 Euler-Lagrange 방정식을 다음과 같이 추론할 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta_\varepsilon(\phi)\left[\mu \operatorname{div}\left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}\right) - \nu - \lambda_1 (I_0 - c_1)^2 + \lambda_2 (I_0 - c_2)^2\right] = 0 \text{ in } (0,\infty) \times D \qquad (9)$$

## 4. 제안된 방법과 알고리즘

주어진 영상 $I_0$에서 객체를 추출하기 위해 본 논문에서는 Mumford-Shah 에너지 함수를 사용하였다. Mumford-Shah Functional은 Level Set 함수 $\phi$와 이 곡선에 의해서 결정되는 부분적으로 상수인 함수 $I(x,y)$의 함수이다. Level Set 함수는 진화곡선 $C$를 Lipschitz 함수 $\phi : D \rightarrow R$를 이용하여 나타내었고 $I(x,y)$는 $C$에 의해서 생기는 분할된 부분영상의 평균값을 이용하여 정의되어 지는데 여기서 우리는 그림 2와 같이 각 부분 영상의 히스토그램을 이용한

다.

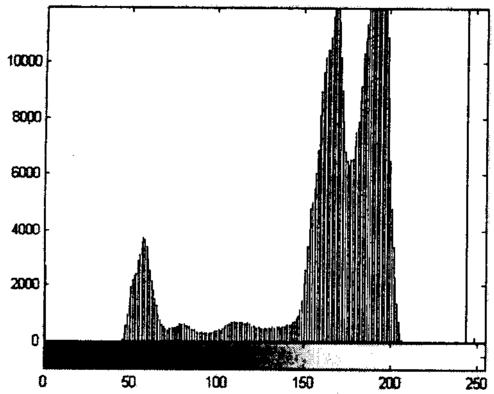


그림 2 부분영역의 히스토그램

이 방식은 $I(x,y)$의 부분적으로 상수인 함수 값을 히스토그램의 봉우리 값의 평균값으로 두는 것이다. 그림 1에서와 같이 $C$에 의해서 생기는 부분영역에서 영상의 광강도 값에 대한 히스토그램을 구한 후 제일 낮은 봉우리와 제일 높은 봉우리의 광강도 값 $\alpha_1$과 $\alpha_2$의 값을 구한다. 그리고 그 영역에서의 $I(x,y)$의 함수 값을 $(\alpha_1+\alpha_2)/2$로 둔다. $C$에 의해서 구분되는 내부 영역의 $I(x,y)$ 함수 값을 $c_1(\phi)$라 두고 외부 영역의 $I(x,y)$ 함수 값을 $c_2(\phi)$라 둔다. 이 값들을 Mumford-Shah Functional에 대입하여 에너지 함수를 구하고 에너지가 최소가 되게 하는 Level Set 함수를 구하기 위해 Euler-Lagrange의 편미분 방정식의 해를 구한다. 여기서 영상의 픽셀의 광강도 값이 연속함수가 아니므로 이산함수의 근사치를 사용하여 에너지 최소화를 위한 방정식을 해결한다. 이 과정을 Level Set 함수 값이 고정될 때까지 되풀이하여 찾고자하는 객체의 경계를 추출할 수 있다.

### -알고리즘-

1. $\phi_0$로써 $\phi^0$를 초기화한다. ( $n=0$ )
2 $c_1(\phi^n)$과 $c_2(\phi^n)$을 히스토그램을 이용하여 구한다.
3. $\phi^{n+1}$을 구하기 위해 Euler-Lagrange 방정식을 푼다. 이때 연속함수의 이산화가 필요하다.
4. $\phi$ 함수가 변하지 않을 때까지 반복한다.

## 5. 결론 및 향후 과제

고전적인 Active Contour 즉, Snakes의 단점을 보완하기 위해서 제안된 Level Set함수와 Mumford-Shah Functional을 이용한 영상분할은 주어진 영상의 Gradient를 사용하지 않고 잡영과 연속적인 경계를 가진 영상에서도 객체를 잘 찾아내는 장점이 있다. 그러나 배경 조명이 균일하지 않을 때나 주어진 영상에 따라 초기의 진화곡선을 놓는 위치문제로 인해 객체를 추출하지 못하는 경우가 있다. 이러한 것들이 향후 연구해야할 과제이다.

## [참고문헌]


[1] G. Aubert and L. Vese, "A variational method in image recovery,"SIAM J. Numer.Anal., vol.34, no. 5, pp.1948-1979, 1997.

[2] T. Chan, B. Sandberg, and L. Vese, "Active Contour Without Edges for Vector-Valued Images" J. Visual Comm. Image Repres. 11, pp.130-141, 2000.

[3] T. Chan and L. Vese, "Active Contours without Edges", IEEE Trans. Image Processing, vol. 10, no. 2, pp.266-277, February 2001.

[4] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, "Snakes: Active contour models," Int. J. Comput. Wis., vol. 1, pp.321-331, 1988.

[5] S. Osher and J. Sethian, "Fronts Propagation with curvature-dependent speed: Algorithm based on Hamilton-Jacobi Formulation," J. Comput. Phys., vol 79, pp.12-49, 1988.

[6] M. Sonka, V. Hlavac and R. Boyle, "Image Processing, Analysis, and Machine Vision," PWS Publishing, 1998.