

## B-spline 을 이용한 비선형 경계요소법 모델 개발 Nonlinear B.E.M. Model Development using B-splines

진찬후<sup>1</sup> · 조용식<sup>2</sup> · 이해진<sup>1</sup>

Jeon, Chan-Hu · Cho, Yong-Sik · Lee, Hye-Jin

### 1. 서 론

경계요소법은 Laplace 방정식을 지배방정식으로 하는 지하수 흐름이나 해안공학 문제의 해석에 있어 매우 정확한 해를 제공하는 수치기법이다. 특히, 경계요소법은 유한차분법이나 유한요소법과 같은 다른 수치기법과 달리 계산시간이나 기억용량의 절감 등에서 매우 효율적이다. 또한, 임의의 형태를 갖는 지형에도 큰 문제없이 쉽게 적용할 수 있고 요소의 크기를 자유롭게 조절할 수 있는 장점이 있다. 그리고, 모든 수치오차는 경계에 국한되기 때문에 매우 정확한 수치해를 제공하는 것으로 알려져 있다 (Liggett 과 Liu, 1983).

국내에서 경계요소법에 대한 연구는 선형보간식을 이용했거나 비선형성을 고려하지 않은 선형 경계요소법을 중심으로 이루어져왔다. 김영택 등(2000)과 조용식과 안영창(2002)은 Bragg 반사를 해석할 때 선형 경계요소법을 사용하였고, 조용식과 이봉희(1997)는 단일파의 최대 처오름높이를 선형보간을 이용한 경계요소법으로 산정하였다.

본 연구에서는 기존의 선형보간을 이용한 경계요소법을 확장하여 3차 B-spline 보간법으로 자유수면을 표현하는 경계요소법 모델을 개발하였다. 모델의 검증은 최대 처오름높이의 실험식, 이론식, 선형보간 모델에 의한 해석식과 비교하여 수행하였다. 또한, Bragg 반사가 일어나는 지형에 대해서도 수치해석을 시도하였다.

### 2. 지배방정식과 경계조건

유체는 비점성이고 유체의 흐름은 비압축성, 비회전으로 가정하면 식(2.1)과 같은 Laplace 방정식이 지배방정식이 된다.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.1)$$

식(2.1)에서,  $\phi$ 는 속도포텐셜을 의미한다.

자유수면은 유형의 수면이므로 자유수면 입자는 수면에서 떨어져 나가지 않는다고 가정하면 식(2.2)로 표현할 수 있다.

$$x = \xi(t, x_0), \quad z = \zeta(t, z_0) \quad (2.2)$$

운동학적 자유수면 경계조건은 식(2.3)과 같이 나타난다.

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (2.3)$$

여기서,  $u$ 와  $w$ 는 각각  $x$ 와  $z$  방향의 속도 성분이다.

동역학적 경계조건은 베르누이 방정식으로부터 식(2.4)로 유도할 수 있다.

$$\frac{D\phi}{Dt} = -\frac{P}{\rho} - g\zeta + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.4)$$

<sup>1</sup> 한양대학교 대학원 토목공학과 석사과정

<sup>2</sup> 한양대학교 공과대학 토목공학과 부교수

여기서,  $\rho$  는 유체의 밀도,  $g$  는 중력가속도,  $P$  는 자유수면에서의 압력을 나타내고,  $D/Dt$  는 식(2.5) 을 의미한다.

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.5)$$

바닥경계는 연직 속도가 0 인 고체경계라고 가정 하면 식(2.6)처럼 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (2.6)$$

여기서,  $n$  은 경계에서 외부로 향하는 방향이다.

### 3. 경계요소법

2 차원 free space Green 함수는 divergence theorem 으로부터 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (3.1)$$

여기서,  $\mathbf{v}$  는 미분가능한 벡터,  $\Omega$  는 적분 영역,  $\Gamma$  는  $\Omega$  의 경계를 나타낸다. 식(3.1)을 이용하여 식 (3.2)와 같은 Green 의 2 차 정리를 구한다.

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \phi) d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \quad (3.2)$$

여기서,  $G$  는 Poisson 방정식을 만족하는 Green 함수로서 2 차원 Laplace 방정식을 만족하는 free space Green 함수는 식(3.3)과 같다.

$$G = \ln r \quad (3.3)$$

특이점을 반지름이 작은 원 ( $r_0 \rightarrow 0$ )으로 제외 시 키고 선적분의 정의에 의하여 적분을 수행하면 식 (3.4)와 같은 2 차원 적분방정식을 얻을 수 있다.

$$\alpha \phi = \int_{\Gamma} \left( \phi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds \quad (3.4)$$

여기서,  $\alpha$  는 특이점이 인접한 양쪽의 요소에 의하여 이루는 각을 의미한다.

또한, 새로운 좌표축  $\xi, \eta$  를 이용하여 경계상의

절점과 특이점에서의  $\phi$  와  $\partial \phi / \partial n$  를 (3.5), (3.6)과 같이 이산화할 수 있다.

$$\phi = \frac{\xi - \xi_j}{\xi_{j+1} - \xi_j} \phi_{j+1} + \frac{\xi_{j+1} - \xi}{\xi_{j+1} - \xi_j} \phi_j \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\xi - \xi_j}{\xi_{j+1} - \xi_j} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j+1} + \frac{\xi_{j+1} - \xi}{\xi_{j+1} - \xi_j} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j \quad (3.6)$$

### 4. B-spline

3 차 B-spline 은 Fig. 1 에 나타낸 것과 같이 각 요소에 대해 네 개의 점(control point)을 이용하는데, 인접한 요소는 세 점을 공유하고 다른 한 점을 갖게 된다 (Cabral 등, 1990).

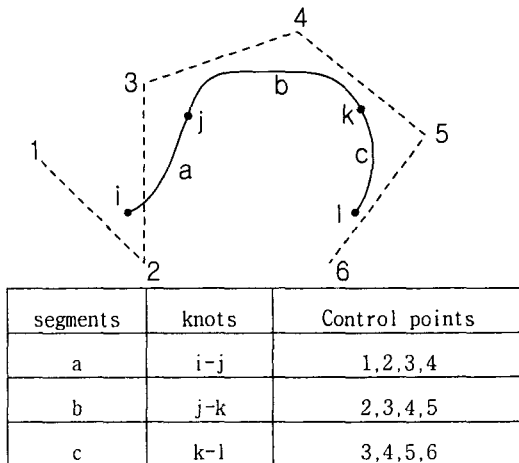


Fig. 1. B-spline 개념도.

따라서, 표현하고자 하는  $N$  개의 물리변수  $P_i$  는  $N+2$  개의 점  $Q_i$  를 필요로 하게 된다. 3 차 B-spline 의 일반적인 행렬 형태는 식(4.1)과 같다(Gerald 와 Wheatley, 1989).

$$P_i(a) = \frac{1}{6} (a^3, a^2, a, 1) \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{i-1} \\ Q_i \\ Q_{i+1} \\ Q_{i+2} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

식(4.1)은 변수  $a$  가 구간[0,1]에서 적용되며, 이는  $(P_i, P_{i+1})$  에 대응된다. 식(4.1)로부터 식(4.2)와 식 (4.3)을 쉽게 얻을 수 있으며, 상수 1/6 을  $Q$  에 포함시

켜 식(4.4)와 같은 행렬을 얻을 수 있다.

$$P_i = P_i(a=0) = Q_{i-1} + 4Q_i + Q_{i+1} \quad (4.2)$$

$$P_{i+1} = P_i(a=1) = Q_i + 4Q_{i+1} + Q_{i+2} \quad (4.3)$$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{N-1} \\ P_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \\ Q_N \\ Q_{N+1} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

식(4.4)의 행렬  $\{P\} = [M] \cdot \{Q\}$  에서  $[M]$  은  $N \times (N+2)$  행렬이다. 격자의 개수가  $N$  개 이므로 점  $Q_i$  는  $P_i$  보다 2 개의 점을 더 많이 갖게 되므로 이를 해결하기 위해 두 개의 경계 조건이 필요하다. 이 경계조건은 식(4.5)와 (4.6)으로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial P}{\partial a} \Big|_{node 1} = 3(Q_2 - Q_0) \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial a} \Big|_{node N} = 3(Q_{N+1} - Q_{N-1}) \quad (4.6)$$

## 5. 모델 검증

### 5.1 처오름높이 계산 및 비교

Hall 과 Watts(1953)은 고립파를 이용하여 처오름 높이에 관한 수리모형실험을 수행하였고, 수리실험 관측자료를 회귀분석하여 고립파의 최대 처오름 높이에 관한 다음과 같은 공식을 제안하였다.

$$R = 3.10H^{1.150}, \quad \theta = 45^\circ$$

Fig. 2 은 최대 처오름높이를 수리모형실험 결과, 제안식, 선형보간 경계요소법 모델과 이번 모델의 결과값으로 비교한 것이다. 이를 보면 B-spline 모델의 결과는 선형 모델과 큰 차이를 나타내진 않지만 실험 값과 제안식의 값에 더욱 근접하는 것을 알 수 있다.

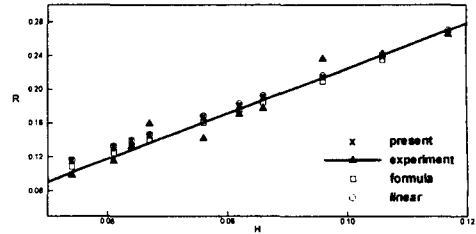


Fig. 2. 최대 처오름높이 비교.

### 5.2 방사경계조건

방사경계조건은 고립파(solitary wave)의 진행으로 알아보았다. Fig. 3는 시간의 경과에 따른 고립파의 진행을 나타낸다. 왼쪽의 조파장치에서 발생한 파가 오른쪽의 방사경계를 지나면서 소멸되고 있다. 이때 반사파가 발생하지 않으므로 방사경계가 성립되고 있음을 알 수 있다.

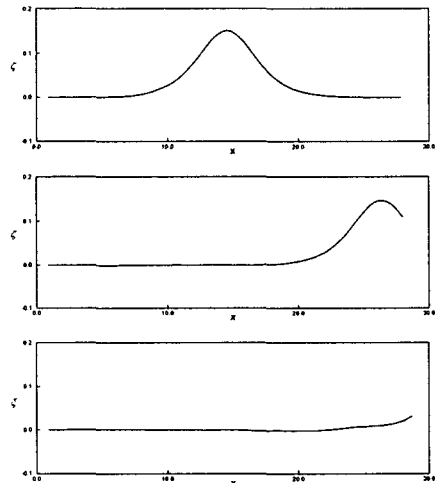
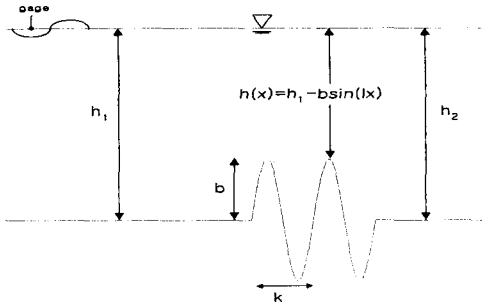


Fig. 3. 방사경계조건.

## 6. 정현파형 지형에의 적용

Fig.4는 Bragg 반사 해석에 이용된 지형으로 Davies 와 Heathershaw(1984)가 정현파형 지형을 통과하는 파랑의 반사율 해석에 사용했던 실험안을 기준으로 하였다. 지형에 관한 수식은 식(6.1)로 표현된다.

$$\begin{aligned} h(x) &= h_1 \quad (x < 0) \\ h(x) &= h_1 - b \sin(Lx) \quad (0 < x < 2k) \\ h(x) &= h_2 \quad (x > 0) \end{aligned} \quad (6.1)$$



· Fig. 4. 정현파형 지형.

여기서,  $b$ 는 정현파형 지형의 진폭,  $h_1$ 은 입사파가 통과하는 지역의 수심,  $h_2$ 는 통과파가 통과하는 지형의 수심,  $k$ 는 정현파형 지형의 파장이다.

Fig. 5는 파장이 바닥지형 파장의 두배인 정현파가 지형을 통과할 때 발생하는 자유수면변위를 시간별로 측정된 것이다. Fig. (a)는 지형이 없는 평탄한 지형을 통과할 때의 변위를 나타내고, Fig. (b)는 정현파형 지형을 통과할 때를 나타낸다. Fig. (a)의 경우 일정한 크기의 파가 반복해서 나타나지만 Fig. (b)는 일정한 시간이 흐른 후에 진폭이 커지는 것을 볼 수 있다. 이는 지형에 의한 Bragg 반사가 발생했기 때문이다. 그러나 진폭의 증가폭이 상당히 크게 나왔는데, 이는 조파장치에서의 재반사가 일어났기 때문으로 판단된다.

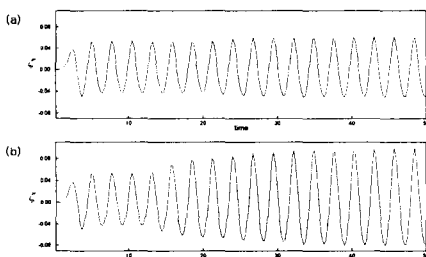


Fig. 5. 자유수면변위.

## 7. 결 론

본 연구에서는 선형보간을 이용한 기존의 경계요소법을 확장하여 자유수면을 B-spline 보간법으로 표현하는 비선형 경계요소법을 개발하였다. 개발된 프로그램으로 최대 처오름높이를 계산한 결과는 실험식과 제안식, 기존 경계요소법 모델의 결과값과 비교하였다. 이번 모형이 기존의 모델에 비해 결과값의 정확도가 다소 높아진 것을 알 수 있었다.

또한 Bragg 반사를 재현하기 위해 정현파형 지형

을 갖는 모형에 적용하였다. 그 결과, Bragg 반사가 발생하는 것은 확인하였으나 결과값이 약간 크게 나왔다. 이는 지형에 의해 반사된 파가 조파장치에서 재반사되었기 때문이라 판단된다. 앞으로 이 부분에 대한 연구를 수행하여 문제점을 보완해야 할 것이다.

## 감사의 글

본 연구는 과학기술부 국가지정연구실사업 (한양대학교 해안공학연구실)으로 수행되었기에 이에 사의를 표합니다.

## 참고문헌

- 김영택, 조용식, 이정규, 2000. 2차원 경계요소법을 이용한 Bragg 반사 해석, 한국수자원학회논문집, 33(6): 805-814.
- 조용식, 안영창, 2002. 비스듬히 입사하는 파장의 Bragg 반사. 한국수자원학회논문집, 35(1): 91-96.
- 조용식, 이봉희, 1997. 단일파의 최대 처오름높이. 한국수자원학회논문집, 30(5): 487-493.
- Cabral, J.J.S.P., Wrobel, L.C. and Brebbia, C.A., 1990. A BEM formulation using B-splines: I-uniform blending functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 7, No. 3.
- Davies, A.G. and Heathershaw, A.D., 1984. Surface wave propagation over sinusoidally varying topography, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 144, pp.419-443.
- Gerald C.F. and Wheatley P.O., 1989. *Applied numerical analysis*, 4th ed., Addison-Wesley.
- Hall, J.V., and Watts, J.W., 1953. Laboratory investigation of the vertical rise of solitary waves on impermeable slopes, *Technical Memorandum 33*, Beach Erosion Board, US Army of Corps of Engineers, USA.
- Liggett, J.A. and Liu, P.L.-F., 1983. *Boundary Integral Equation Method for Porous media Flow*, George Allen and Unwin, U.K.