

지진해일 전파 모의를 위한 ADCIRC 유한요소모형의 분산보정 Dispersion-Correction of ADCIRC Finite Element Model for the Simulation of Tsunami Propagation

윤성범¹ · 임채호¹ · 윤기승¹ · 최병호²

Sung Bum Yoon¹, Chae Ho Lim¹, Ki Seung Yoon¹, and Byung Ho Choi²

1. 서 론

조석을 수치모의하기 위해 North Carolina 대학의 R.A. Luettich와 Notre Dame 대학의 J.J. Westerink가 개발한 ADvanced CIRCulation model for oceanic, coastal and estuarine waters(ADCIRC) 유한요소모형(Luettich, et al., 1992)은 수심 적분된 2 차원 모형(2DDI)과 3 차원 모형(3DL)으로 구성되어 있는데, 그 중 2 차원 ADCIRC 유한요소모형은 천수방정식에서 연속방정식과 운동방정식을 합성하여 수면변위에 대해 하나의 식으로 표현한 파동방정식(wave equation)을 지배방정식으로 사용하고 있다. 여기서 2 차원 ADCIRC 유한요소모형의 지배방정식에 대한 수치기법으로 질량집중행렬(lumped mass matrix) 혹은 원래질량행렬(consistent mass matrix)을 선택적으로 사용할 수 있고, 공간 미분항의 시간단계에 대해서는 양해법(explicit scheme) 또는 음해법(implicit scheme)을 선택적으로 사용할 수 있다.

동해에서 발생하는 지진해일파는 조석에 비하여 파장이 짧아 상대적으로 분산성이 강하므로 먼 거리를 전파하는 경우에는 파의 분산성을 고려하여 해석하여야 하지만, 2 차원 ADCIRC 유한요소모형에 사용된 파동방정식은 분산항을 포함하지 않아 지진해일파의 물리적인 분산효과를 고려할 수 없다. 그러나 2 차원 ADCIRC 유한요소모형에서 사용된 수치기법에 따라 발생하는 수치적인 분산오차의 특성을 분석하여 지진해일 전파 수치모의에 적용한

다면, 약한 분산효과를 고려할 수 있는 Boussinesq 방정식 대신 수치해석이 쉬운 파동방정식을 사용하면서도 분산효과를 정도 높게 고려할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 2 차원 ADCIRC 유한요소모형을 이용하여 초기의 수면형상이 Gauss 분포를 가진 hump가 등수심의 1 차원 수로를 따라 전파되는 과정을 서로 다른 수치기법을 적용하여 수치모의를 수행하고, 각 수치기법에 대한 분산오차의 특성을 분석함으로써 ADCIRC 유한요소모형을 이용한 지진해일 전파 수치모의시 분산효과를 정도 높게 고려할 수 있는 방법을 제안하고자 한다.

2. 지배방정식

2 차원 ADCIRC 유한요소모형은 천수방정식에서 연속방정식과 운동방정식을 합성하여 수면변위에 대한 하나의 식으로 유도된 2 차원 비선형 파동방정식(Lynch and Gray, 1979; Kinnmark, 1985)을 지배방정식으로 사용하고 있지만, 분산항을 포함하고 있지 않아 지진해일파의 물리적인 분산효과를 고려할 수 없다. 그러나 2 차원 ADCIRC 유한요소모형에 사용된 수치기법에 따른 분산오차를 이용하면 지진해일의 물리적인 분산효과를 정도 높게 고려할 수 있을 것으로 판단된다.

본 연구에서는 수심에 비해 수면변위가 매우 미소하고, 등수심상을 전파한다는 가정하에 다음과 같

¹ 한양대학교 토목·환경공학과 (Department of Civil & Environmental Engineering, Hanyang University, Ansan, Kyunggi 425-791, Korea)

² 성균관대학교 토목·환경공학과 (Department of Civil & Environmental Engineering, Sungkyunkwan University, Suwon, Kyunggi 440-746, Korea)

은 1 차원 선형 파동방정식을 대상으로 하였다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

여기서 ζ 는 정수면으로부터의 수면변위(m), g 는 중력가속도(m/s^2), h 는 정수면으로부터 바닥까지의 수심(m)이며, \sqrt{gh} 는 1 차원 선형 파동방정식의 전파속도(m/s)를 의미한다.

3. 유한요소식의 구성

Galerkin 의 가중잔차법(weighted residual method) 을 이용한 1 차원 선형 파동방정식에 대한 유한요소식은 다음과 같다.

$$\langle \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}, \phi_i \rangle_L - \langle gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \phi_i \rangle_L = 0 \quad i=1, N \quad (2)$$

여기서 $\langle a, b \rangle_L \equiv \int a b dL$, ϕ_i 는 보간함수(interpolation function)로서 이 연구에서는 선형 보간함수를 사용한다. 또한 L 은 전체영역, N 은 공간에 대한 절점수를 의미한다.

식(2)의 시간미분항에 대해 중양차분을 적용하고, 공간미분항의 시간단계를 3 단계로 나누어 각 시간단계에 대해 가중치(weighting factor)를 도입한 후 공간미분항에 Green 의 정리를 적용하여 간단히 하면 식(3)과 같은 유한요소식이 구성된다(Kinmark, 1985).

$$\begin{aligned} & \langle \frac{\zeta_i^{n+1} - 2\zeta_i^n + \zeta_i^{n-1}}{\Delta t^2}, \phi_i \rangle_L + [\alpha_1 \langle gh \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \rangle \\ & + \alpha_2 \langle gh \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \rangle + \alpha_3 \langle gh \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \rangle]_L = 0 \\ & \quad i=1, N \quad (3) \end{aligned}$$

여기서 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 는 시간단계에 대한 가중치를 의미하며, 하첨자 i 는 공간격자번호, 상첨자 n 은 시간단계번호이고, Δt 는 시간간격을 나타낸다.

1 차원 선형 파동방정식에 대한 요소식은 수치오차로 인해 지배방정식에 대한 정확해를 주지 못하고 다음의 식(4)와 식(5)로 주어진 변형방정식

(modified equation)에 대한 정확해를 각각 주게된다. 식(4)와 식(5)는 각각 질량집중행렬과 원래질량행렬을 사용한 경우의 변형방정식으로 식(3)을 점(i, n)에 대해 Taylor 전개한 다음 Δx 와 Δt 에 대한 고차항을 제거하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - gh\Delta t(\alpha_1 - \alpha_3) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \\ & - \frac{gh}{12} \Delta x^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) [1 + 6Cr^2 (\alpha_1 + \alpha_3) \\ & - Cr^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)] \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = O(\Delta x^3, \Delta t \Delta x^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta t^3) \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - gh\Delta t(\alpha_1 - \alpha_3) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \\ & - \frac{gh}{12} \Delta x^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) [-1 + 6Cr^2 (\alpha_1 + \alpha_3) \\ & - Cr^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)] \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = O(\Delta x^3, \Delta t \Delta x^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta t^3) \quad (5) \end{aligned}$$

여기서 $Cr (= \sqrt{gh} \Delta t / \Delta x)$ 은 Courant Number 이며, 식(4)와 식(5)의 3 번째 항은 수치적인 진폭오차(amplitude error)를 유발하며, 4 번째 항은 수치적인 전파속도오차 즉 분산오차(dispersion error)를 유발한다. 우선 식(4)와 식(5)에 존재하는 수치적인 진폭오차항을 제거하기 위해 $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha$, $\alpha_2 = 1 - 2\alpha$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ 로 놓으면, 수치적인 분산오차항만 포함하는 변형방정식(6)과(7)로 각각 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{gh}{12} \Delta x^2 [1 + (12\alpha - 1)Cr^2] \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \quad (6) \\ & = O(\Delta x^3, \Delta t \Delta x^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta t^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{gh}{12} \Delta x^2 [-1 + (12\alpha - 1)Cr^2] \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \quad (7) \\ & = O(\Delta x^3, \Delta t \Delta x^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta t^3) \end{aligned}$$

한편 물리적인 분산항을 포함하고 있는 1 차원 선형 Boussinesq 방정식을 수심이 상대적으로 작고 일정할 때 다음식과 같이 합성할 수 있다. 여기서 오차항의 k 는 파수(wave number)를 표시한다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{gh^3}{3} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = O(k^6 h^6) \quad (8)$$

앞에서 제시한 유한요소식 (3)은 영역내부 점에 대해 질량행렬 M (mass matrix)과 강성행렬 K (stiffness matrix)를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + K [\alpha \zeta^{n+1} + (1-2\alpha)\zeta^n + \alpha \zeta^{n-1}] = 0 \quad (9)$$

여기서 M 은 질량집중행렬 M^l 과 원래질량행렬 M^c 중 하나를 선택하여 적용할 수 있다. 또한 공간미분항에 대해 $\alpha=0$ 이면 양해법, $\alpha \neq 0$ 이면 음해법이 적용된다.

4. ADCIRC 의 수치기법에 따른 분산 특성

4.1 초기조건

Gauss 분포의 초기수면형상이 수심이 일정한 지형 위를 전파하는 경우에 대하여 서로 다른 수치기법을 적용해 보고, 각 수치기법에 대한 1차원 파동방정식의 수치적인 분산오차의 특성을 분석하기 위해 다음과 같은 초기조건과 상수값을 사용하였다. 또한 선형 Boussinesq 방정식의 1방향 진행과 공식인 KdV 방정식의 해석해를 구하기 위해, 양의 x 방향으로 진행하고 있는 Gauss 분포의 초기파형이 Fig. 1 과 같이 N 개의 델타함수로 구성되어 있다고 가정하면, 선형미분방정식의 경우에는 해의 중첩원리가 성립하므로 각각의 델타함수의 해 (Yeh, 1991)를 모두 더하여 다음과 같은 해석해를 얻을 수 있다(Yoon and Liu, 1992).

$$\zeta(x,t) = \sum_{n=1}^N a_n / S^{1/3} A_i \left((X_n - \sqrt{gh} t) S^{1/3} \right) \quad (10)$$

여기에서

$$S = \frac{2}{\sqrt{gh} h^2 t} \quad (11)$$

이고, A_i 는 Airy 함수, a_n 은 n 번째 델타함수의 높이, l 은 델타함수의 폭, 그리고 X_n 은 Fig. 2 에 제시한 바와 같이 델타함수의 중심으로부터 좌표가 x 인 점까지의 거리로서 다음과 같이 주어진다.

$$X_n = \left(n - \frac{(N+1)}{2} \right) l + x - x_0 \quad (12)$$

여기서 n 은 초기파형 선단으로부터 n 번째 델타함수의 번호를 나타내며, x_0 는 좌표원점으로부터 초기파형 중심까지의 거리이다.

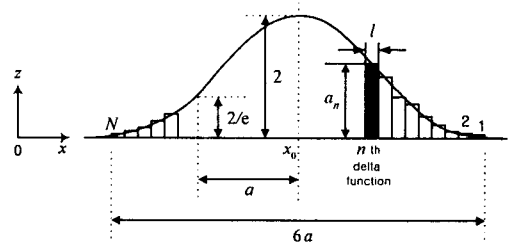


Fig. 1. Initial free surface profile of Gaussian hump.

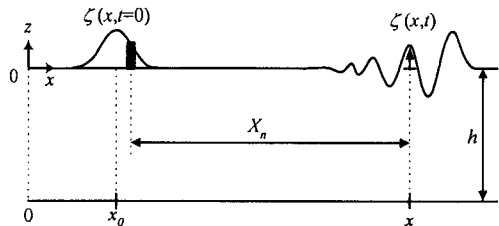


Fig. 2. Schematic sketch to calculate analytical solution.

$$\zeta(x,t=0) = \begin{cases} 2e^{-((x-x_0)/a)^2} \\ 0 \end{cases} \quad \text{if } -3a \leq x-x_0 \leq 3a \quad \text{otherwise} \quad (13)$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = 1000 \text{ m}, \quad a = 7500 \text{ m}, \quad (14)$$

$$x_0 = 0, \quad N = 300, \quad l = 6a/N = 150 \text{ m}$$

여기서 a 는 높이가 2 인 Gauss 분포의 중심으로부터 $\zeta = 2e^{-1}$ 인 곳까지의 거리이며, Gauss 분포의 상대적인 폭을 나타낸다. Gauss 분포는 중심부에서 최대값 $\zeta = 2$ 을 가지며, 중심부에서 멀어질수록 그 값이 감소하여 중심으로부터의 거리가 $3a$ 가 되면 최대값의 0.01%로 감소하므로, 본 연구에서는 초기의 수면변위가 중심으로부터의 거리가 $3a$ 보다 작은 구간에만 존재하는 것으로 보았다. 또한 시간간격 (Δt)은 6 초, 요소간격 (Δx)은 1500 m 를 수치해석에 사용하였다.

4.2 수치기법에 따른 분산특성

ADCIRC 모형의 수치기법에 따른 분산오차의 특성을 파악하기 위해 다음과 같이 두 가지 경우 즉 질량집중행렬 M^I 을 사용하거나 혹은 원래질량행렬 M^c 를 사용하는 경우에 대하여 식(13)과 식(14)에서 제시한 초기조건과 상수값을 이용하여 수치모의를 수행하였다.

Fig. 3 은 질량집중행렬 M^I 을 사용하면서, 공간미분항에 대한 가중치를 $\alpha=0.0$, $\alpha=0.2$, $\alpha=0.4$ 인 경우로 구분하여 각각 수치모의한 결과를 제시한 것이다. 여기서 $\alpha=0.0$ 이면 공간에 대해 양해법이 적용되고, 그렇지 않은 경우에는 음해법이 적용됨을 의미한다. Fig. 3 에서 보는 바와 같이 질량집중행렬 M^I 이 사용된 경우에는 장파가 단파보다 빨리 진행(positive dispersion)하는 일반적인 분산오차의 특성이 나타난다. 또한 가중치 $\alpha=0.0$ 을 사용한 경우보다 $\alpha=0.4$ 를 사용한 경우에 수치적인 분산오차가 더 많이 발생한다. 즉 가중치 α 의 값이 증가함에 따라 분산오차의 정도 또한 증가되고 있음을 의미한다.

Fig. 4 는 원래질량행렬 M^c 를 사용하고, 같은 방

법으로 공간미분항에 대해 $\alpha=0.0$, $\alpha=0.2$, $\alpha=0.4$ 를 적용하여 각각 수치모의를 수행한 결과이다. 여기서 원래질량행렬 M^c 를 사용한 경우에는 Fig. 3 에서 제시한 것과는 반대로 단파가 장파보다 빨리 진행(negative dispersion)하고 있다. 또한 가중치 α 의 값이 증가함에 따라 Fig. 3 과 마찬가지로 장파가 단파보다 빨리 진행(positive dispersion)하는 방향으로 분산오차가 조절되고 있음을 확인할 수 있다.

이와 같이 사용된 질량행렬 M 과 공간미분항의 시간단계에 대한 가중치 α 의 값에 따라 분산오차의 정도가 달라지게 된다. 그러므로 ADCIRC 모형을 이용하여 조석을 수치모의 할 때에는 수치기법에 의해 발생하는 수치적인 분산오차가 제거되는 수치기법을 사용해야 옳을 것이고, 분산성이 상대적으로 강한 지진해일 전파를 수치모의하기 위해서는 수치기법에 따른 분산오차의 특성을 정확히 분석하여 실제 지진해일 전파시 발생하는 물리적인 분산과 같아지도록 분산오차를 조절할 수 있는 수치기법을 사용해야 할 것이다.

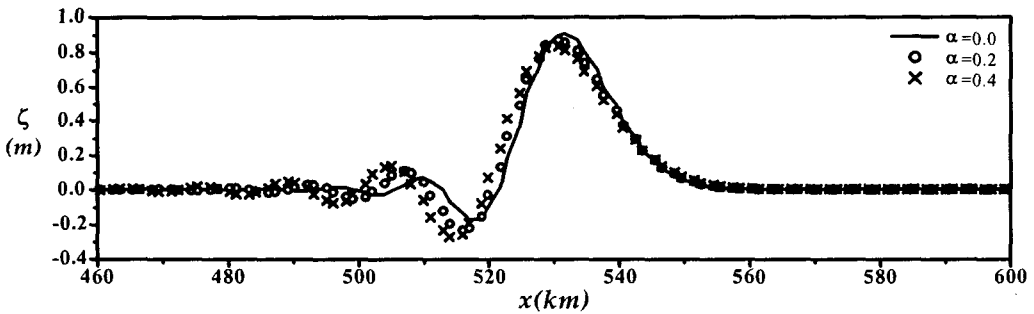


Fig. 3. Comparison of free surface profiles at $t = 5400$ s calculated using M^I for various α -values.

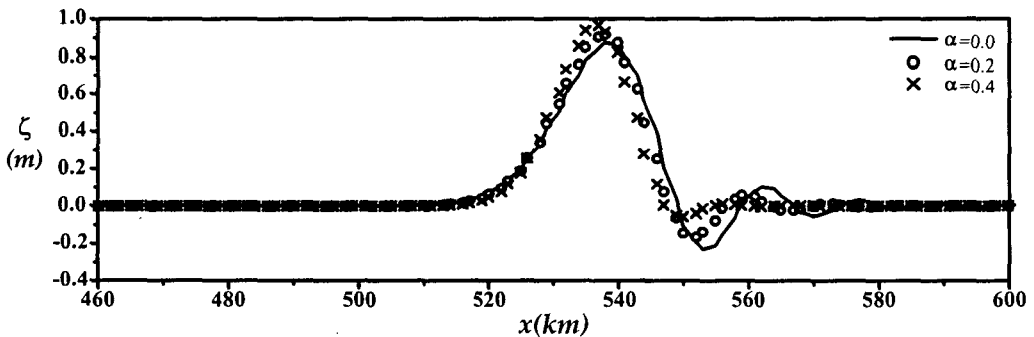


Fig. 4. Comparison of free surface profiles at $t = 5400$ s calculated using M^c for various α -values.

4.3 지진해일에 대한 분산보정

조석을 수치모의하기 위해 개발된 ADCIRC 모형을 이용하여 분산성이 상대적으로 강한 작은 규모의 지진해일전파를 수치모의하기 위해서는 앞에서 제시한 수치기법에 따른 분산오차의 특성을 정확히 분석하여 적용하여야 한다. 특히 물리적인 분산항을 포함하고 있지 않은 ADCIRC 모형의 지배방정식인 과도방정식을 이용하여 지진해일에 대한 수치모의를 하기 위해서는 식(6) 또는 식(7)의 3번째 항을 물리적인 분산효과를 고려할 수 있는 1차원 선형 Boussinesq 방정식(8)의 3번째 항과 같다고 놓으면, 공간미분항의 시간단계에 대한 가중치 α 에 대하여 정리할 수 있다. 여기서 질량집중행렬 M^I 을 사용한 경우에는 식(15), 원래질량행렬 M^c 를 사용한 경우에는 식(16)과 같이 유도된다.

$$\alpha = \frac{1}{12} \left[1 + \left(\frac{4h}{g\Delta t^2} - \frac{1}{Cr^2} \right) \right] \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{1}{12} \left[1 + \left(\frac{4h}{g\Delta t^2} + \frac{1}{Cr^2} \right) \right] \quad (16)$$

주어진 수심 ($h=1000m$)과 요소간격 ($\Delta x=1500m$) 그리고 시간간격 ($\Delta t=6s$)에 대해 식(15) 또는 식(16)을 이용하여 각각 계산한 가중치 α 를 Gauss 분포의 초기수면형상이 1 방향으로 전파하는 경우에 대하여 질량집중행렬 M^I 을 사용한 경우와 원래질량행렬 M^c 을 사용한 경우에 대하여 수치모의한 결과를 선형 Boussinesq 방정식의 1방향 진행과공식인 KdV 방정식의 해석해와 비교하였다.

그 결과 Fig. 5에 나타난 바와 같이 해석해와 수치해의 분산정도가 모두 잘 일치하고 있다.

Fig. 6은 질량집중행렬 M^I 을 사용하면서, 주어진 수심 ($h=1000m$)과 시간간격 ($\Delta t=6s$)에 대해서로 다른 요소간격 ($\Delta x=1500m$ or $\Delta x=2500m$)을 사용하여 수치모의하고, 수치해를 해석해와 비교한 것으로 Δx 가 $1500m$ 인 경우에는 식(15)에 의해 α 를 0.4963 으로 놓고, Δx 가 $2500m$ 인 경우에는 α 를 -0.4476 으로 놓고 계산하였다. Fig. 6에서 보인 바와 같이 서로 다른 Δx 에 대해서도 수치 분산오차를 이용한 경우와 물리적 분산을 고려한 해석해가 잘 일치하고 있다. 이것은 2차원 ADCIRC 유한요소모형의 α 값을 시간간격(Δt) 그리고 수심(h)에 따라 조정하면 입의 크기로 구성된 유한요소망을 이용하면서도 물리적인 분산효과를 정도 높게 고려할 수 있음을 의미한다. 현재 ADCIRC 모형은 정해진 α 만을 사용하도록 제한되어 있으므로 α 를 먼저 일정한 값으로 정한 다음 식(15)나 식(16)에 의해 Δx 를 구하고 이에 따라 유한요소망을 구성하여야 한다. 만약 ADCIRC 모형의 source code를 수정할 수 있다면 식(15) 또는 식(16)에 의해 주어진 수심 h 와 시간간격 Δt 에 상응하는 α 값을 구하여 이미 구성된 유한요소망을 그대로 사용할 수 있는 장점이 있다. 현재 개발되어 있는 ADCIRC 모형을 지진해일 수치모의에 그대로 사용하는 경우 계산부담을 줄이기 위해 병렬처리가 상대적으로 쉬운 양해법을 사용하는 것이 일반적이다.

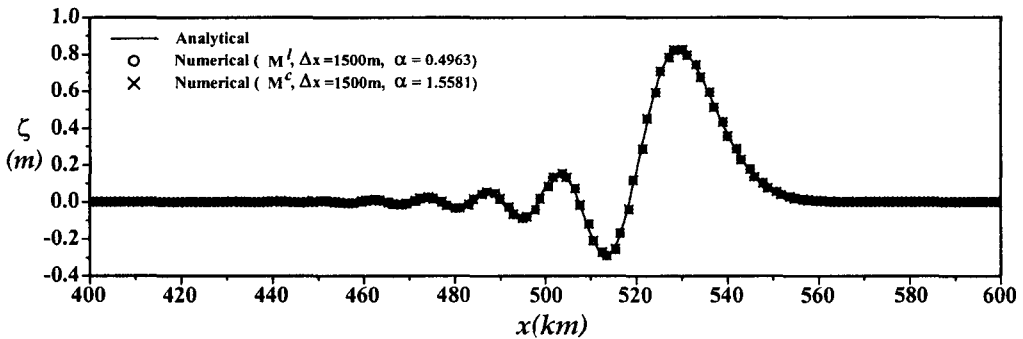


Fig. 5. Comparison of free surface profiles at $t = 5400$ s calculated using different mass matrix and associated α -value for $\Delta x = 1500$ m.

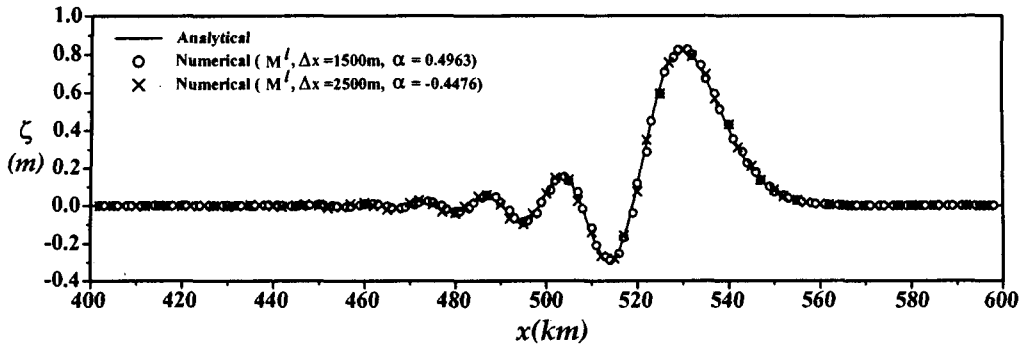


Fig. 6. Comparison of free surface profiles at $t = 5400$ s calculated using lumped mass matrix for different Δx and associated α -value.

그러므로 질량집중행렬 M^l 을 사용하고 가중치 α 는 0 으로 놓아야 한다. 이 경우 식(15)로부터 다음 식을 얻는다.

$$\Delta x = \sqrt{4h^2 + g h \Delta t^2} \quad (17)$$

식(17)은 Imamura et al. (1988), 윤 (1999)이 leap-frog 유한차분모형에 대해 제시한 분산보정 조건과 같다.

5. 결 론

조석을 수치모의하기 위해 개발된 2 차원 ADCIRC 유한요소모형의 수치기법에 따른 분산오차의 특성을 검토해 보았다. 또한 지진해일 전파시 발생하는 물리적인 분산과 사용된 수치기법에 따라 발생하는 수치적인 분산이 같게 되도록 순수 양해법에 대해서는 요소크기 Δx 를 조절하는 기법을, 음해법에 대해서는 가중치 α 값을 조절하는 기법을 제안하였다.

가중치 α 를 이용하여 분산오차의 정도를 조절하는 방법은 질량집중행렬 M^l 을 사용하는 경우라도 음해법을 피할 수 없게 되므로 많은 계산시간이 요구되는 단점이 있다. 그러므로 임의 크기로 구성된 유한요소망을 사용하면서도 순수 양해법을 사용하여 물리적인 분산효과를 적절히 고려할 수 있는 병렬처리용 유한요소모형을 개발하기 위한 연구가 수행중이다.

사 사

본 연구는 기상청 기상연구소의 특정사업 '지진 예지 및 지진해일 예측기술 개발' 의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- 윤성범, 1999. 완변수심상 지진해일 전파 2 차원 유한차분모형의 분산보정. 대한토목학회논문집, 19 권 II-6 호, 695-703.
- Imamura, F., Shuto, N. and Goto, C., 1988. Numerical simulation of the transoceanic propagation of tsunamis. *Proc. Of 6th Congress Asian and Pacific Regional Division, IAHR, Japan*, pp. 265-271.
- Kinnmark, I.P.E., 1985. The shallow water wave equation s: formulation, analysis and application. *Lecture Notes in Engineering*, Vol. 15, 187p.
- Luettich, R.A., Westerink, J.J. and Scheffner, N.W., 1992. ADCIRC: An advanced three-dimensional circulation model for shelves, coasts, and estuaries, report 1: theory and methodology of ADCIRC-2DDI and ADCIRC-3DL. *Dredging Research Program Technical Report DRP-92-6, U.S. Army Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS*, 137p.
- Lynch D.R and Gray W.G., 1979. A wave equation model for finite element tidal computations. *Computers and Fluids*, Vol. 7, pp. 207-228.

- Yeh, H., 1991. Lecture note, University of Washington, Seattle, WA(private communication)
- Yoon, S.B. and Liu, P.L.-F., 1992. Numerical simulation of a distant small-scale tsunami. *Recent Advances in Marine Science and Technology*, PACON92, Pacific Congress on Marine Science and Technology, Kona, Hawaii, pp. 67-78.