

선형파 이론을 사용하여 수심변화에 따른 파랑변형 예측 시 소멸파의 중요성 검토

Investigation of importance of evanescent modes in predicting the transformation of waves on a varying topography by the linear wave theory

이창훈¹ · 조용식² · 조대희²

Chang Hoon Lee¹, Yong Sik Cho², and Dea Hee Cho²

1. 서 론

파랑은 주로 먼바다에서 바람에 의해 생성되어 육지로 전파해오면서 천수, 굴절, 회절, 반사, 부서짐 등의 여러 가지 변형의 과정을 거친다. 이러한 파랑의 변형을 예측하는 한 방법은 비압축성 유체와 비회전류의 연속방정식인 Laplace 방정식을 지배 방정식으로 하고 해수면에서의 운동학적 경계조건과 동역학적 경계 조건, 그리고 바닥에서의 운동학적 경계조건을 적용하여 해를 구한다. 파랑의 비선형성을 무시할 경우, 즉 선형파 이론을 사용할 경우 그 해에는 진행파 성분과 소멸파 성분이 있다. 소멸파의 크기는 진행파에 비해서 충분히 작아서 통상 진행파 성분만 고려하여 파랑의 변형을 예측한다. 본 연구에서 선형파 이론을 사용하여 파랑변형을 예측할 때 소멸파 성분의 중요성을 진행파 성분과 비교하여 논하고자 한다. 비교의 수단으로 파랑의 동역학적인 특징인 운동에너지와 위치에너지를 사용하여 그 크기를 비교하겠다. 먼저 파랑의 운동에너지와 위치에너지를 유도하였다. 그리고, 수치실험으로서 고유함수전개법을 사용하여 단순한 계단형 지형에서 파랑이 전파할 때 반사파와 소멸파의 에너지를 구하였다. 그 에너지를 진행파와 소멸파 성분으로 구분하여 비교하였다.

2. 운동에너지와 위치에너지 유도

파랑이 +x 축 방향으로 전파한다고 할 때 선형파 이론에서 수면변위를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \exp(-k_j x) \sin \omega t \quad (1)$$

위 식에서 우변의 첫번째 항은 진행파 성분이고, 우변의 나머지 항들은 소멸파 성분이다. 이 수면변위에 대응하는 속도포텐셜을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \omega t) \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j g}{\omega} \frac{\cos k_j(h+z)}{\cos k_j h} \exp(-k_j x) \cos \omega t \end{aligned} \quad (2)$$

단위 폭 당 $x = [0, l]$ 구간에서의 파랑의 운동에너지의 합 KE를 시간에 따라 평균하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} KE = & \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^l \int_0^{-h} \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] dz dx dt \\ = & \langle 1 \rangle + \langle 2 \rangle + \langle 3 \rangle + \langle 4 \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

여기서,

¹ 세종대학교 토목환경공학과 (Department of Civil and Environmental Engineering, Sejong University, Seoul, 143-747, Korea)

² 한양대학교 토목공학과 (Department of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul, 133-791, Korea)

$$\langle 1 \rangle = \frac{1}{4} \rho g a^2 l \quad (4)$$

$$\langle 2 \rangle = -\frac{1}{2} \rho g a \frac{1}{\sinh kh} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j a_j}{(k^2 + k_j^2)^2 \cos k_j h} \\ \times \left\{ k \sinh kh \cos k_j h + k_j \cosh kh \sin k_j h \right\} \\ \times \left[k_j (1 - \exp(-k_j l) \cos kl) + k \exp(-k_j l) \sin kl \right] \\ + \left[k \cosh kh \sin k_j h - k_j \sinh kh \cos k_j h \right] \quad (5)$$

$$\langle 3 \rangle = -\frac{1}{4} \rho g h \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \frac{1 - \exp(-2k_j l)}{\sin 2k_j h} \quad (6)$$

$$\langle 4 \rangle = \frac{1}{4} \rho \frac{g^2}{\omega^2} \sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} \frac{a_i a_j k_i k_j}{(k_i + k_j)(k_i - k_j)} \frac{\sin[(k_i - k_j)h]}{\cos k_i h \cos k_j h} \\ \times \left[1 - \exp(-(k_i + k_j)l) \right] \quad (7)$$

단위 폭 당 $x = [0, l]$ 구간에서의 파랑의 위치에너지의 합 PE를 시간에 따라 평균하면 다음과 같다.

$$PE = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^l \int_{-h}^0 \frac{1}{2} \rho g (h + \eta)^2 dx dt - \frac{1}{2} \rho g h^2 l \quad (8) \\ = \langle 5 \rangle + \langle 6 \rangle + \langle 7 \rangle + \langle 8 \rangle$$

여기서,

$$\langle 5 \rangle = \frac{1}{4} \rho g a^2 l \quad (9)$$

$$\langle 6 \rangle = \frac{1}{2} \rho g a \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{k^2 + k_j^2} \\ \times \left[k (1 - \exp(-k_j l) \cos kl) - k_j \exp(-k_j l) \sin kl \right] \quad (10)$$

$$\langle 7 \rangle = \frac{1}{8} \rho g \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j^2}{k_j} (1 - \exp(-2k_j l)) \quad (11)$$

$$\langle 8 \rangle = \frac{1}{4} \rho g \sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} \frac{a_i a_j}{k_i + k_j} \left[1 - \exp(-(k_i + k_j)l) \right] \quad (12)$$

식 (4), (9)는 진행파 성분만을 의미하고, 식 (5), (10)은 진행파와 소멸파의 합성 성분을 의미하고, 식 (6), (11)은 서로 같은 소멸파의 합성 성분을 의미하고, 식 (7), (12)는 서로 다른 소멸파의 합성 성분을 의미한다. 우리가 통상적으로 파랑에너지를 운운할 때는 식 (4), (9)의 진행파 성분만을 생각하였다. 이 두 성분을

제외한 성분이 소멸파의 영향을 받은 성분이다. 수평길이가 $l = nL$ (L 은 진행파의 파장이고, $n = 1, 2, \dots$)이면 단위 폭 당 $x = [0, l]$ 구간에서의 운동에너지의 합 KE와 위치에너지의 합 PE는 다음과 같다.

$$KE = \frac{1}{4} \rho g a^2 l \left\{ 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{a} \frac{k_j}{l(k^2 + k_j^2)} \right. \\ \times \frac{\tan k_j h}{\tanh kh} (1 - \exp(-k_j l)) \\ - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{a_j}{a} \right)^2 \frac{h}{l} \frac{1 - \exp(-2k_j l)}{\sin 2k_j h} \\ + \frac{1}{\tanh kh} \sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} \frac{a_i a_j}{a^2} \frac{k_i k_j}{l(k_i^2 - k_j^2)} \frac{\sin[(k_i - k_j)h]}{\cos k_i h \cos k_j h} \\ \left. \times \left[1 - \exp(-(k_i + k_j)l) \right] \right\} \quad (13)$$

$$PE = \frac{1}{4} \rho g a^2 l \left\{ 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{a} \frac{k}{l(k^2 + k_j^2)} (1 - \exp(-k_j l)) \right. \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{a_j}{a} \right)^2 \frac{1}{lk_j} (1 - \exp(-2k_j l)) \\ + \sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} \frac{a_i a_j}{a^2} \frac{1}{l(k_i + k_j)} \left[1 - \exp(-(k_i + k_j)l) \right] \left. \right\} \quad (14)$$

파랑이 $-x$ 축 방향으로 전파하는 경우에도 운동에너지와 위치에너지는 식 (4) - (7), (9) - (14)와 같이 유도됨을 확인하였다.

3. 수치실험

수심변화에 따른 파랑의 변형에서 소멸파의 중요성을 확인하는 방법으로 계단형 바닥 위로 파랑이 전파하는 경우 파랑의 반사와 통과를 예측하였다. 이때 반사파와 통과파에 진행파 뿐만 아니라 소멸파 성분을 구하여 각 성분의 운동에너지와 위치에너지를 구하였다. 이 성분들을 예측하는 모형으로서 국내에서도 이미 여러 연구자들에 의해 사용되고 있는 고유함수전개법 (eigen function expansion method)을 사용하였다 (조용식과 이창훈, 1998).

고유함수전개법은 Laplace 방정식 $\nabla^2 \phi = 0$ 의

해를 미소진폭과의 속도포텐셜로 표현하고 수심의 변화가 있는 경계에서 $\partial\phi/\partial n$ 의 연속성(즉, 질량의 연속성)과 ϕ 의 연속성(즉, 압력의 연속성)을 이용하여 영역의 시작점에서 입사파 성분이 주어졌을 때 영역의 시작점에서의 반사파 성분을 구하고 영역의 끝점에서의 통과파 성분을 구하는 것이다. 이 해에는 진행파 성분과 소멸파 성분이 포함되어 있다. 식 (2)가 $+x$ 축 방향의 진행파와 소멸파의 속도포텐셜을 표현한 것이고, $-x$ 축 방향의 속도포텐셜은 식 (2)의 각 항에서 x 를 $-x$ 로 바꾸면 된다. 진행파 성분의 파수 k 와 소멸파 성분의 파수 k_j 는 다음의 분산관계식을 만족한다.

$$\omega^2 = gk \tanh kh, \quad \omega^2 = -gk_j \tan k_j h \quad (15)$$

수심이 두 배로 증가하는 경우와 수심이 반으로 감소하는 각각의 경우에 수치실험을 하였다. 상류수심에서의 상대수심이 $kh = \pi/10$ 인 경우에 소멸파 성분을 4개 고려했을 때의 운동에너지와 위치에너지, 그리고 두 에너지의 합을 계산하였다. Fig. 1은 수심이 두 배로 증가하는 경우에 수평거리 l 에 따라 변하는 에너지를 $\rho g a^2 l / 4$ 로 무차원화한 값을 도시한 것이다. 각각의 에너지는 진행파 성분을 제외한 값이다. 즉, 식 (13), (14)의 우변 첫번째 항을 제외한 값이다. 진행파 성분이란 반사파의 경우 반사파의 진행파를 의미하고 통과파의 경우 통과파의 진행파를 의미한다. Fig. 2는 수심이 반으로 감소하는 경우의 에너지를 도시한 것이다. 소멸파의 영향을 받은 에너지는 진행파만의 에너지에 비해서 반사파의 경우 $O(10^{-2}) \sim O(10^{-3})$ 의 크기로 작았고 통과파의 경우 $O(10^{-10}) \sim O(10^{-14})$ 의 크기로 미미할 정도로 작았다. 소멸파의 영향을 받은 에너지는 수심이 변하는 경계점에서 멀리 떨어질수록 기하급수적으로 감소하였다.

4. 결 론

선형파 이론을 사용하여 수심변화에 따른 파랑의 변형을 예측할 때 소멸파가 얼마나 중요한지 계량화하는 방법으로 진행파 성분 뿐만 아니라 소멸파 성분이 포함된 파랑에너지를 유도하였다. 그리고, 계단형 지형 위로 파랑이 전파할 때 반사파와

통과파의 파랑에너지를 진행파 성분 대비 소멸파 성분의 비로 비교하였다. 수심이 2배로 증가하거나 반으로 감소하는 모든 경우에 소멸파 성분의 에너지는 진행파 성분에 비해서 2% 이하로 작았다. 특히, 통과파의 경우에 소멸파 성분의 에너지는 진행파 성분에 비해 미미할 정도로 작았다.

사 사

본 연구의 제 1 저자는 한국과학재단의 특정기초연구사업(R01-2000-00365)의 지원에 감사드리고, 제 2, 3 저자는 과학기술부 국가지정연구실사업(한양대학교 해안공학연구실)의 지원에 감사를 드립니다.

참고문헌

조용식, 이창훈, 1998. 수심이 변하는 지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율 산정, 대한토목학회논문집, 18(2-4): 351-358.

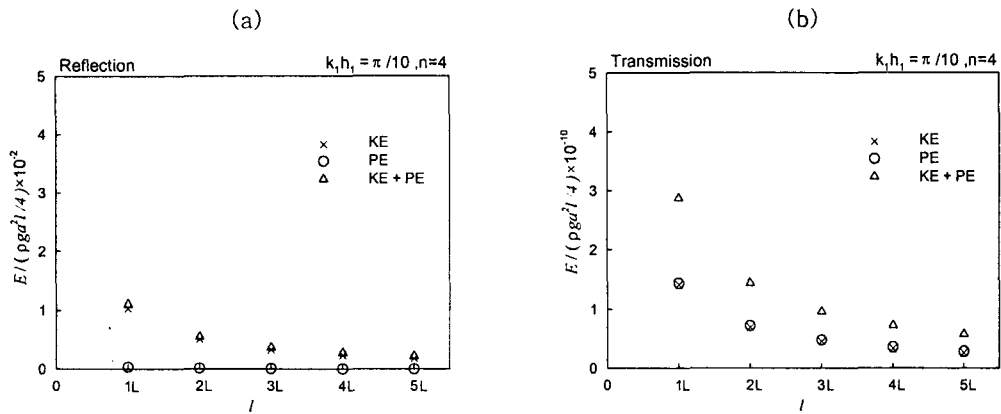


Fig. 1. 수심이 두 배로 증가하는 계단형 지형에서 소멸파 성분이 포함된 파랑의 운동에너지(KE)와 위치에너지(PE)와 두 에너지의 총합(KE+PE), (a) 반사파, (b) 통과파.

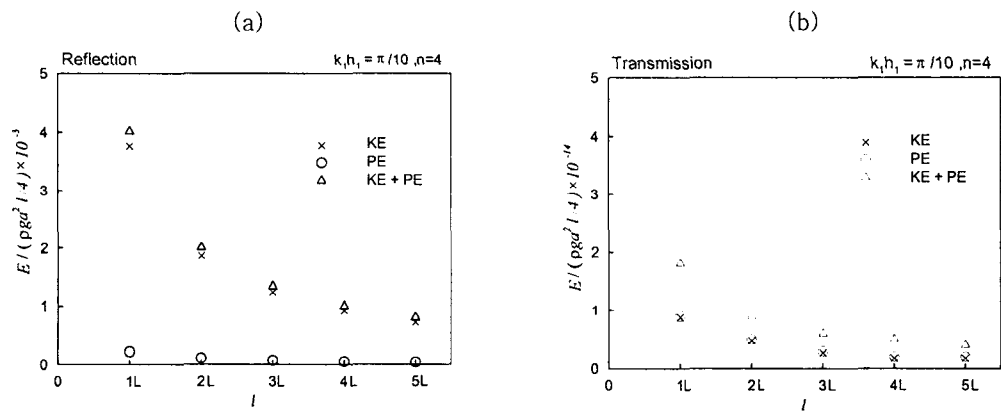


Fig. 2. 수심이 반으로 감소하는 계단형 지형에서 소멸파 성분이 포함된 파랑의 운동에너지(KE)와 위치에너지(PE)와 두 에너지의 총합(KE+PE), (a) 반사파, (b) 통과파.