韓國海岸·海洋工學發表論文集 (2002)
第13券, pp. 31-34

크노이드파의 Bragg 반사
Bragg Reflection of Cnoidal Waves

정재상[1] · 조용식[2] · 전정숙[1]
Jae-Sang Jung[1], Yong-Sik Cho[2], and Jeong-sook Jeon[1]

1. 서 론

Bragg 반사는 입사된 주기파의 진폭이 해저지형의 진폭의 2배가 될 때 파랑의 반사율이 공명현상(resonance)에 의해 매우 커지는 물리적 현상을 말한다. Bragg 반사를 응용할 경우, 외해로부터 입사되는 파랑 에너지의 상당량을 반사시킬 수 있으므로 항만이나 방파제 등의 해안구조물을 경제적으로 설계하고 보호할 수 있다. 또한, 해안선 보호 및 불필요한 침식이나 퇴적 등을 고려한 연안개발계획의 효율적 수립이 가능하다.

최근 Cho 등 (1995)에 의해 Bragg 반사에 대한 이론적 연구가 시작되었다. Cho 등은 Boussinesq 방정식을 이용하였으며, 정현파(sinusoidal wave) 및 크노이드파(cnoidal wave)를 입사파로 하여 수심이 일정한 천해역에서 발생하는 Bragg 반사를 연구하였다. 이종인 등 (1999)은 Cho 등의 연구를 더욱 확장하여, 경사지형을 고려한 Bragg 반사를 연구하였다.

미국과 일본에서는 오대호 및 일본 주위의 천해역을 대상으로 Bragg 반사에 관한 연구가 매우 활발히 수행되었다. 특히, 이 지역에서 많이 발견되는 정현파형 지형의 형성과정 및 그 영역에서의 파랑의 변화를 규명하기 위한 많은 이론적, 실험적 연구들이 수행되었다(Hara와 Mei, 1987; Liu와 Cho, 1993). 최근에는 Bragg반사 개념을 이용한 수중방파제 (submerged breakwater)에 관한 연구가 활발히 진행중이다 (Lamberti와 Mancinelli, 1997; Tomasicchio, 1997). Bragg 반사를 이용한 수중방파제를 건설하면, 외해로부터 입사해 오는 파랑의 에너지 상당량을 반사시킬 수 있으므로 해안구조물을 효과적으로 보호하고, 해수욕장 등 편의 시설의 경관을 보호 할 수 있다. 또한, 일반 방파제에 비해 해류의 소통이 원활하므로 항만내 환경오염 문제의 해결에도 큰 기여를 할 수 있다.

본 연구에서는 수심이 일정한 지형과 경사지형에서 바닥지형의 진폭의 크기와 분산성의 크기에 따른 주기파의 반사율의 변화에 대하여 연구하였다. 지배방정식은 Cho 등 (1995)이 Boussinesq 방정식으로부터 유도한 한 쌍의 상미분 방정식을 사용하였으며, 이를 일정수심의 정현파형 지형에 적용하여 수치적으로 Bragg 반사를 규명하였다.

2. 지배방정식

Boussinesq 방정식으로부터 외해에서 입사한 파랑이 Fig. 1과 같은 경사진 지형과 정현파형 지형을 결합한 지형을 통과할 때 파랑의 특성을 지배하는 지배방정식의 유도과정을 간략히 서술하기로 한다.

Boussinesq 방정식은 약비선형 효과와 약분산 효과를 동시에 포함하며, 비선형 천수방정식에 동수압항을 일부 포함시킨 것이다. 먼저, x축 방향만을 고려한 무차원 Boussinesq 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다. (Cho 등, 1995)

$$\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(h+\varepsilon\zeta)u\right]=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \mu^2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{h}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(hu)-\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] \tag{2}$$

---

[1] 한양대학교 대학원 토목공학과 석사과정
[2] 한양대학교 공과대학 토목공학과 부교수

여기서, ζ 는 수면변위, h 는 수심, u 는 x 방향 유속을 나타낸다. 식 (1)과 식 (2)를 유도하는 과정에서 $O(\varepsilon) \approx O(\mu^2) << 1$ 이 가정되었다. 식 (1)은 오차가 없는 연속방정식인 반면에 식 (2)는 절삭오차의 크기가 $O(\varepsilon^2, \varepsilon\mu^2, \mu^4)$ 인 운동량 방정식이다.

매개변수 ε 과 μ^2 은 각각 비선형과 분산의 크기를 나타내며, 다음과 같이 주어진다.

$$\varepsilon = \frac{a}{h}, \qquad \mu^2 = (kh)^2 \tag{3}$$

식 (3)에서 a 는 진폭이고, k 는 파수이다.

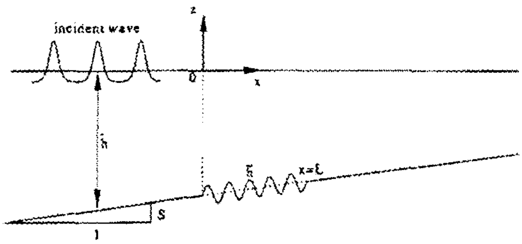

Fig. 1. Definition sketch of a sinusoidal seabed on a sloping beach.

입사된 파랑이 통과하는 해저지형의 특성을 고려한 수심은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$h(x, y) = \bar{h}(x) + \tilde{h}(x) \tag{4}$$

식 (4)에서 $\bar{h}(x)$ 는 해저지형의 일정한 경사를 고려한 항으로 완변항(slowly varying)을 나타내고, $\tilde{h}(x)$ 는 정현파형 지형을 나타낸 항으로 급변항(fast varying)을 나타낸다. 식 (4)의 각각의 크기는 식 (5)와 같다.

$$\bar{h}(x) \sim O(1), \qquad \tilde{h}(x) \sim O(\mu^2) \tag{5}$$

따라서, x 축에 대한 변화율은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left|\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}\right| \sim O(\mu^2) \qquad \left|\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x}\right| \sim O(\mu^2) \tag{6}$$

자유수면 변위와 유속은 Cho 등(1995)에서와 같이 시간에 대하여 주기를 갖는것으로 가정한다. 식 (7)에서 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 이며, 음수의 n 은 양수의 켤레복소수를 의미한다.

식 (1)과 식 (2)에서 u 를 소거하고 식 (4)~(7) 을 대입하여 정리하면 파랑의 진행과정을 지배하는 한 쌍의 상미분 방정식을 유도할 수 있다 (Cho 등, 1995).

$$\zeta(x,t) = \frac{1}{2}\sum_n \zeta_n(x) e^{-int}, \qquad u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_n u_n(x) e^{-int} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dA_n}{dx} + \left[\frac{in\tilde{h}}{2\bar{h}\sqrt{\bar{h}}} + \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left(\ln \bar{h}\right) + \frac{1}{2\bar{h}}\frac{d\tilde{h}}{dx} - \frac{i}{6}\mu^2 n^3 \sqrt{\bar{h}}\right] A_n - \left[-\frac{in\tilde{h}}{2\bar{h}\sqrt{\bar{h}}} + \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left(\ln \bar{h}\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{2\bar{h}}\frac{d\tilde{h}}{dx} + \frac{i}{6}\mu^2 n^3 \sqrt{\bar{h}}\right] B_n e^{-2in\Theta} \\ &= NLT1 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{8-a}$$

$$\begin{aligned} NLT1 = &-\frac{i\varepsilon}{4\bar{h}\sqrt{\bar{h}}}\left[\sum_{s\neq 0,n}(n+s)\left(A_s A_{n-s} + \frac{n-2s}{n} B_s A_{n-s} e^{-2is\Theta}\right)\right] - \frac{i\varepsilon}{4\bar{h}\sqrt{\bar{h}}}\left[\sum_{s\neq 0,n}(n+s)\right. \\ &\left.\left(B_s B_{n-s} + \frac{n-2s}{n} A_s B_{n-s} e^{-2is\Theta}\right)\right] e^{-2in\Theta} \end{aligned} \tag{8-b}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dB_n}{dx} + \left[-\frac{in\tilde{h}}{2\bar{h}\sqrt{\bar{h}}} + \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left(\ln \bar{h}\right) + \frac{1}{2\bar{h}}\frac{d\tilde{h}}{dx} + \frac{i}{6}\mu^2 n^3 \sqrt{\bar{h}}\right] B_n - \left[\frac{in\tilde{h}}{2\bar{h}\sqrt{\bar{h}}} + \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left(\ln \bar{h}\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{2\bar{h}}\frac{d\tilde{h}}{dx} - \frac{i}{6}\mu^2 n^3 \sqrt{\bar{h}}\right] A_n e^{2in\Theta} \\ &= NLT2 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{9-a}$$

$$\begin{aligned} NLT2 = &\frac{i\varepsilon}{4\bar{h}\sqrt{\bar{h}}}\left[\sum_{s\neq 0,n}(n+s)\left(B_s B_{n-s} + \frac{n-2s}{n} A_s B_{n-s} e^{2is\Theta}\right)\right] + \frac{i\varepsilon}{4\bar{h}\sqrt{\bar{h}}}\left[\sum_{s\neq 0,n}(n+s)\right. \\ &\left.\left(A_s A_{n-s} + \frac{n-2s}{n} B_s A_{n-s} e^{-2is\Theta}\right)\right] e^{2in\Theta} \end{aligned} \tag{9-b}$$

식 (8)과 (9)에서 NLT1, NLT2는 각각 비선형항을 의미한다. 식 (8)과 식 (9)로부터 진폭함수 A_n과 B_n을 구한 후 다음 식에 대입하여 자유수면변위를 구할 수 있다.

$$\zeta(x,t)=\frac{1}{2}\sum_n\left[A_n e^{in\Theta}+B_n^{'} e^{-in\Theta}\right]e^{-\mathrm{int}} \tag{10}$$

식 (10)에서 다음 관계식이 사용되었다.

$$\Theta=\int\frac{1}{\sqrt{h}}dx \tag{11}$$

3. 수치계산

2장에서 유도된 지배방정식을 이용하여 Fig. 1 과 같은 해저지형을 통과하는 크노이드파의 Bragg 반사를 연구한다.

해저지형의 형태는 이종인 등 (1999)의 연구를 참조하였으며, 수심 h는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} h &= 1 - Sx & L_1 &> x \\ h &= 1 - Sx - \rho\sin(\delta x) & L_1 &\le x \le L_2 \\ h &= 1 - Sx & x &> L_2 \end{aligned} \tag{12}$$

식 (8)과 식 (9)는 1차 상미분방정식으로 4th-Order Runge-Kutta method를 사용하여 적분할 수 있다. 크노이드파의 각 성분의 초기조건은 식 (13)과 같이 정의하였다 (Yoon 과 Liu, 1987).

$$\begin{aligned} &A_1=0.8923,\ A_2=0.4198,\ A_3=0.1568 \\ &A_4=0.0522,\ A_5=0.0163 \end{aligned} \tag{13}$$

먼저, 경사를 무시한 해저지형에서 크노이드파의 반사를 검토하였다. 본 연구에서는 분산성의 크기와 바닥지형의 크기가 파의 반사에 미치는 영향을 고려하였다.

Fig. 2와 Fig. 3은 분산성이 반사에 미치는 영향을 고려한 것이다. 분산성의 크기가 증가할수록 반사파의 크기 역시 증가하였으며, 최대반사가 일어나는 δ 값도 증가함을 알 수 있다. 이는 비선형성이 커짐에 따라 반사파의 크기와 최대반사가 일어나는 δ 값이 작아진다는 이종인 등 (1999)의 연구 결과에 부합한다. 비선형성과 분산성은 서로 상반되는 경향을 보이며 천해역으로 갈수록 비선형성은 커지며 분산성은 작아진다.

Fig. 4 와 Fig. 5는 정현파형 지형의 진폭이 파의 반사에 미치는 영향을 나타낸 것으로써, 바닥지형의 진폭이 증가함에 따라 반사된 파의 크기가 선형적으로 증가하고 있음을 볼 수 있다.

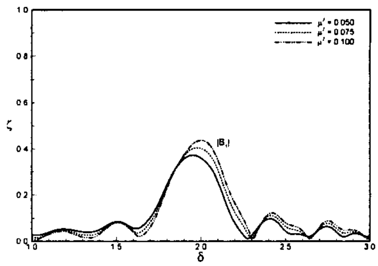

Fig. 2. Reflected first harmonics amplitude of uniform cnoidal waves (L=6π, ε=0.0881, ρ=0.10, S=0.0).

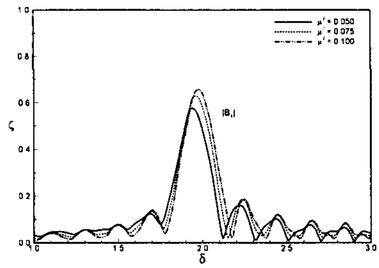

Fig. 3. Reflected first harmonics amplitude of uniform cnoidal waves (L=10π, ε=0.0881, ρ=0.10, S=0.0).

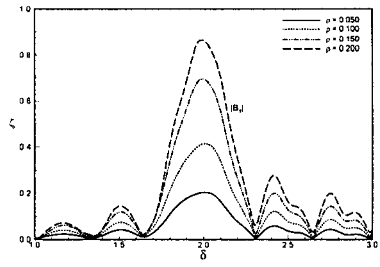

Fig. 4. Reflected first harmonics amplitude of uniform cnoidal waves (L=6π, μ^2=0.1067, ε=0.0881, S=0.00).

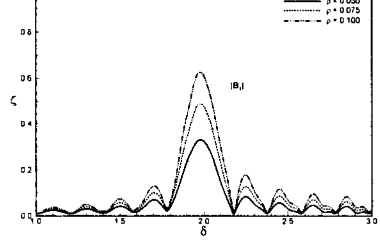

Fig. 5. Reflected first harmonics amplitude of uniform cnoidal waves(L=10π , μ^2=0.1067, ε=0.0881, S=0.00).

또한, Fig. 6에서와 같이 최대 반사파의 진폭 역시 바닥지형의 진폭의 증가에 따라 선형적으로 증가함을 알 수 있다. 바닥지형 변화에 따른 반사파의 변화율은 L=6π인 경우 4.19, L=10π인 경우 6.35이며, 정현파형 지형의 길이에 비례한다. 즉, 정현파형 지형이 널리 분포되어 있을수록 더욱 큰 양의 입사된 에너지를 외해로 반사시킬 수 있다.

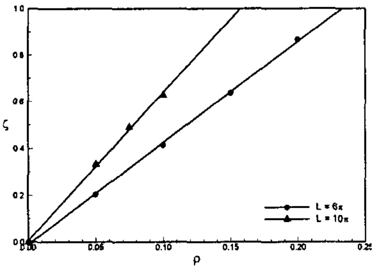

Fig. 6. Maximum reflected first harmonic amplitude of uniform cnoidal waves as variation of ρ (μ^2=0.1067, ε=0.0881, S=0.00).

4. 결 론

본 연구에서는 Boussinesq 방정식으로부터 유도된 한 쌍의 상미분방정식을 이용하여, 일정 수심지형에서의 Bragg 반사에 대하여 연구하였다. 그 결과 분산성의 크기가 증가할수록 반사율은 증가하며, 최대 반사가 일어나는 바닥지형의 파장도 증가함을 알 수 있었다. 바닥지형의 진폭과 반사율과의 관계는 서로 비례하였다.

Bragg 반사 개념을 수중방파제에 응용할 경우 방파제의 경제적 설계가 가능하며, 불필요한 해안 침식이나 퇴적 등도 조절할 수 있다. 따라서, Bragg 반사에 관한 보다 광범위한 수리모형 실험이 수행되어야 할 것으로 생각된다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부 국가지정연구실사업(한양대학교 해안공학연구실)으로 수행되었기에 이에 사의를 표합니다.

참고문헌

이종인, 조용식, 이정규., 1999. 경사지형에서의 Bragg 반사, 한국수자원학회논문집, 32(4) : 447-455.

Cho, Y.-S., Lee, J.K., and Yoon, T.H., 1995. Bragg reflection of shallow-water waves. 대한토목학회 논문집, 대한토목학회, 15(6) : 1823 - 1832.

Hara, T. and Mei, C.C., 1987. Bragg reflection of surface waves by periodic bars: Theory and experiment. *Journal of Fluid Mech.*, Vol. 178, pp. 221-241.

Lamberti, A, and Mancinelli, A., 1997. Italian experience on submerged barriers as beac defence structures. *Proceedings, 25th International Conference on Coastal Engineering, U.S.A.*, pp. 2352-2365.

Liu, P.L-F. and Cho, Y.-S., 1993. Bragg reflection of infragravity waves by sandbars. *Journal of Geophy. Res.*, Vol. 98, C12, pp. 22733-22741.

Tomasicchio, U., 1997. Submerged breakwaters for the defence of the shoreline at Ostia Field experiences. Comparison. *Proceedings, 25th International Conference on Coastal Engineering, U.S.A.*, pp. 2404-2417.

Yoon, S.B. and Liu. P.L.-F., 1987. Resonant reflection of shallow-water waves due to corrugated boundaries. *Journal of Fluid Mech.*, Vol. 180, pp. 451-469.