

이동 최소 제곱 근사와 안정화 절점 적분을 이용한 불일치 유한 요소망의 처리

A novel treatment of nonmatching finite element meshes via MLS approximation with stabilized nodal integration

조 영 삼* 김 현 규** 전 석 기*** 임 세 영****
Cho, Young-Sam Kim, Hyun-Gyu Jun, Sukky Im, Seyoung

ABSTRACT

The interface element method for non-matching FEM meshes is extended using stabilized nodal integration. Two non-matching meshes are shown to be joined together compatibly, with the aid of the moving least square approximation. Using stabilized nodal integration, the interface element method is able to satisfy the patch test, which guarantees the convergence of the method.

1. 서 론

수치해석 방법이 개발된 이래, 많은 고체 및 구조의 경계치문제들에 대한 해석은 유한요소법에 의해 효율적으로 이루어져 왔다. 이런 유한요소법의 적용이 활발해 지면서, 해석하고자 하는 구조물이 복잡해지고, 세밀한 영역까지 모델링이 요구되기 시작했다. 이런 이유로 큰 구조물의 모델링을 할 때 여러 하위영역(sub-region)으로 나누어 분할 모델링(partitioned modeling)을 이용하거나, 특정 부분에 요소를 추가하거나 하는 개선들이 이루어지게 되었다. 그러나, 모델링에서의 이런 일련의 작업들은 계면에서 일치성(compatibility)을 유지해야 하는 유한요소법의 특성으로 인해 많은 어려움이 존재한다. 그러한 계면에서의 어려움을 해결하기 위해 많은 노력들이 있어 왔는데, 그 중 등성인 요소와 세밀한 요소를 연결하는 간단한 방법으로, 형상함수의 수정을 통한 요소 세화 방법이 있으나,^(7,14) 이 방법은 마스터 경계의 절점이 슬레이브 경계의 절점과 일치해야만 일반적인 불일치 계면을 처리할 수 있다. 또, 분할모델링된 하위영역을 전체영역으로 통합하는 방법으로 영역의 경계에서의 반작용 힘으로 계면을 처리하는 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)를 이용한 방법이 있다. 라그랑지 승수를 이용해 변분적인 의미에서 계면의 연속성을 처리하는 하이브리드 유한요소법(hybrid FEM)이 있고,^(2,5,13) 몰타르 유한 요소(mortar finite element)라고 불리는 두 경계의 중간 영역을 이용해 불일치 계면을 처리하는 방법도 있다.^(3,4,15) 이 몰타르 유한 요소법을 이용하여 3차원 문제의 수정 적용을 하거나,⁽¹³⁾ 마찰이 존재하는 접촉문제로 확장하기도 했다.⁽¹¹⁾ 또한 라그

* 한국과학기술원 기계공학과 박사과정

** 현대자동차연구소

*** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과 초빙교수

**** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과 교수

량지 승수 방법을 이용한 분할 시스템을 해석하는 반복 솔버(iterative solver)의 병렬 계산에 FETI 방법을 적용하기도 했다.⁽⁸⁾ 최근에는 영역의 경계에서 정의되는 집중 라그랑지 승수(localized Lagrange multiplier)를 이용한 방법이 제시되기도 했다.⁽¹²⁾ 분할영역을 붙이는 방법 또한 제시되었다.⁽¹⁾ 그러나, 이러한 라그랑지 승수를 이용한 방법들은 변분적인 의미에서 연속성을 만족시키는 것이며, 수식화의 어려움이 존재하고, 자유도를 증가시키는 방법이다. 최근 들어, 이동 최소 제곱을 이용하여 계면의 형상함수를 만들어 계면과 계면의 연속성과 유한요소와 경계요소간의 일치성(compatibility)을 모두 만족시키는 계면요소법(Interface Element Method)이 제시되었다.^(9,10) 이 방법은 라그랑지 승수를 이용한 방법과 달리 자유도를 증가시키지 않을 뿐 아니라, 계면과 계면의 연속성을 만족시키므로, 일반적인 불일치 계면의 처리가 용이하다. 그러나, 계면요소법에서 사용된 이동 최소 제곱 근사의 특성 때문에 계면 요소 형상 함수는 다항식이 아닌 유리수 함수로 표현이 된다. 이 특성으로 인해 경계요소에서의 수치적분을 유한요소법에서 사용하는 가우스 적분으로 수행하기에는 어려움이 따르게 된다. 이것은 패치 시험을 통해서도 알 수 있는데, 결과적으로 계면요소법의 수렴성을 보장할 수 없게 되는 것이다. 최근 이동 최소 제곱 근사법의 이러한 수치적분에서의 문제점을 해결하는 안정화 적합 절점 적분법(stabilized conforming nodal integration)이 J.-S. Chen⁽⁶⁾에 의해 제시되었다. 이 방법은 무요소 갤러킨 근사법에서의 선형 정확성에 대한 필요 조건인 적분 구속(IC, Integration Constraint)을 만족하여, 무요소법에서의 수치적분에 가우스 적분이나 절점 적분이 만족시키지 못한 선형 정확성을 보장한다. 본 연구에서는 2차원 계면 요소법에 안정화 적합 절점 적분을 적용하여 패치 시험을 통과함을 보인다.

2. 계면요소법(IEM, Interface Element Method)

문제영역 Ω 를 분할하여 얻은 i 번째 영역을 Ω_i 라 하면, 계면 $\Gamma_{ij}^c (i < j)$ 은 다음과 같이 정의된다.^(9,10)

$$\Gamma_{ij}^c = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j, i < j \quad (1)$$

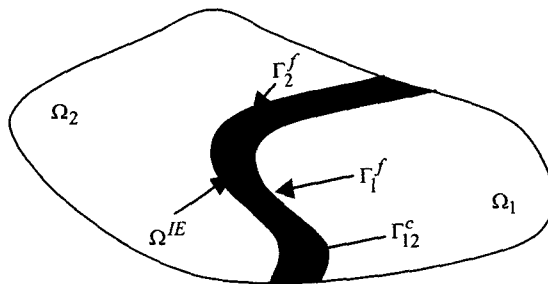


Fig. 1 partitioned domains Ω_1 , Ω_2 and interface element domain Ω^{IE}

모든 계면 Γ_{ij}^c 의 합집합을 계면 집합 Γ^c 라 정의하고, Fig. 1과 같이 계면을 따라 얇은 층을 정의하여 이 영역을 계면 요소 영역, Ω^{IE} 이라고 한다. 이 계면 요소 영역 Ω^{IE} 은 계면 요소 Λ 로 이산하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Omega^{IE} = \cup \Lambda, \quad (2)$$

전체 영역 Ω 에서 계면 요소 영역 Ω^{IE} 을 제외한 나머지 영역을 유한요소, K 로 이산화하고, 이 영역을 유한 요소 영역, Ω^{FE} 이라 하면, 전체 영역과 계면 요소 영역, 유한 요소 영역은 다음과 같은 관계에 있다.

$$\Omega^{FE} = \cup K, \tag{3}$$

$$\Omega = \Omega^{FE} \cup \Omega^{IE}, \tag{4}$$

$$\Omega^{FE} \cap \Omega^{IE} = \phi. \tag{5}$$

계면 요소의 형상함수는 이동 최소 제곱 근사를 이용해 구성된다. 계면 요소의 형상함수를 구성하기 위해, 이동 최소 제곱 근사에서의 절점의 영향 영역을 정의해야 한다. 계면 요소에서의 절점의 영향 영역은 계면에서의 연속성과 일치성을 만족시키도록 계면 요소 영역 내에서 정의되어 져야 한다.

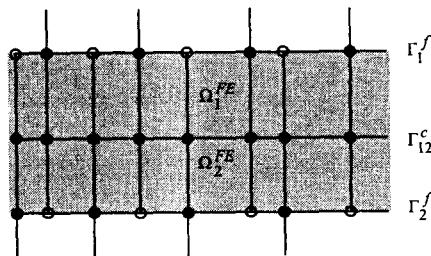


Fig. 2 Interface element domain Ω^{IE} joining finite element domains Ω_1^{FE} and Ω_2^{FE}

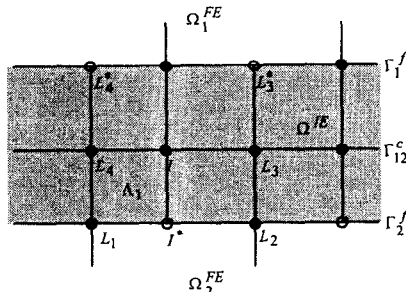


Fig. 3 Pseudo nodes in the interface elements defined by extending the finite element bordering on the interface Γ_{12}^c . Pseudo nodes are indicated by open circles.

계면 Γ_{12}^c 에서 절점의 영향 영역을 정의하기 위해 Fig. 2에서 처럼 영역 Ω_1 의 계면 Γ_{12}^c 를 둘러싼 유한요소를 영역 Ω_2 의 계면 Γ_{12}^c 을 둘러싼 유한요소로 확장을 하고, 마찬가지로 영역 Ω_2 의 계면 Γ_{12}^c 을 둘러싼 유한요소를 영역 Ω_1 의 계면 Γ_{12}^c 를 둘러싼 유한요소로 확장을 한다. 그러면, 확장선과 유한요소와 계면 요소의 경계 $\Gamma^f = \partial\Omega^{FE} \cap \partial\Omega^{IE}$ 의 교차점에 유사 절점(pseudo node)이 정의 된다. 유사 절점은 Fig. 3에서 속이 빈 원으로 표현되어 있다. 유사 절점은 수식화에서 자유도를 갖지는 않지만, 이동 최소 제곱 근사에서의 가중 함수(weight function)를 생성하는데 있어서는 절점 값을 갖게 된다. 유사 절점 I^* 의 위치는 다음과 같이 정의한다.

$$\frac{\overline{L_4 I}}{L_4 I + IL_3} = \frac{\overline{L_1 I^*}}{L_1 L_2}, \quad (6)$$

이때, L_1, L_2, L_3, L_4 는 Fig. 3에서의 절점이고, $\overline{L_1 L_2}$ 는 절점 L_1 과 절점 L_2 사이의 거리이다. 그러므로, 유사 절점의 위치는 경계 Γ^f 에서 비례하는 곳으로 쉽게 정의할 수 있다. 그러면 계면 요소는 실제 절점과 유사 절점으로 만들어 지는 사각형 모양의 영역으로 정의된다. Fig. 3에서 처럼, 계면 요소 Λ_1 은 절점 L_1, I^*, I, L_4 로 이루어진 사각형 모양의 영역으로 정의 된다. 계면에서의 요소망이 불일치하기 때문에 계면 요소는 계면 영역 Ω^{IE} 에서의 유한요소를 세분하게 되는 것이다.

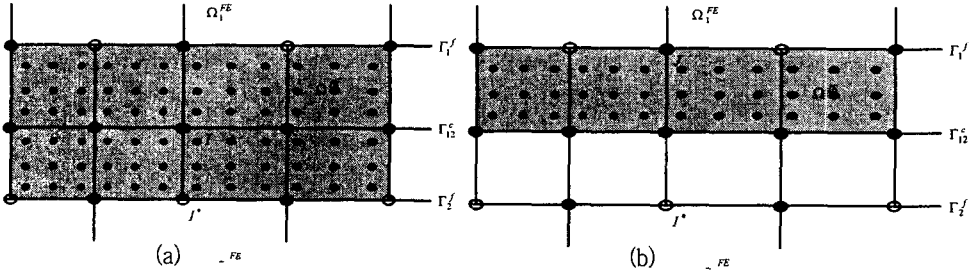


Fig. 4 Sub-domains and integration points:

(a) for the nodes I on the interface Γ_{12}^c and (b) for the node J and on the boundary Γ_1^f

계면 요소 영역 Ω^{IE} 에서의 절점 영향 영역은 계면 Γ_{12}^c 를 둘러싼 유한요소를 기초로 정의되어 진다. 계면 Γ_{12}^c 과 계면 Γ^f 에서의 절점 I 와 J 의 영향 영역 Ω_s^I 와 Ω_s^J 은 Fig. 4과 같다. 영향 영역 Ω_s^I 은 절점 I 와 관계 있는 유한요소로 반대 영역으로 확장시켜 만들어진 계면 요소로 정의 된다. 마찬가지로 영향 영역 Ω_s^J 도, 절점 J 와 관계있는 유한요소로 구성된 계면 요소로 정의된다. 결과적으로 계면 요소의 가장자리는 계면 요소 영역 Ω^{IE} 의 절점 영향 영역의 경계가 되는 것이다. 즉 유사 절점이 계면 Γ^f 에서의 위치가 결정되면 계면 요소 영역 Ω^{IE} 에서 영향 영역과 계면 요소는 쉽게 결정된다. 계면요소법에서는 Fig. 4에서처럼 계면 요소가 적분 영역으로 사용된다.

본 연구에서 사용된 이동 최소 제곱 근사법에서 가중함수는 다음과 같다.

$$w_I(\mathbf{x}) = 1 - 3r_I(\mathbf{x})^2 + 2r_I(\mathbf{x})^3 \quad \mathbf{x} \in \Omega^{IE} \quad (7)$$

$$r_I(\mathbf{x}) = 1 - s_I(\mathbf{x}), \quad s_I(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^4 N^k(\mathbf{x}) \bar{w}_I^k \quad (8)$$

이때, k 는 계면 요소에서의 실제 절점과 유사 절점이고, $N^k(\mathbf{x})$ 는 유한요소 형상함수이다. 가중함수의 절점값 $\bar{w}_I^k = \bar{w}_I(\mathbf{x}_k)$ 은 계면 요소에서의 실제 절점과 유사 절점에서 정의 된다. 계면 Γ_{12}^c 위 절점의 가중함수는 영향 영역의 경계에서 그 값이 0이기 때문에 계면 Γ^f 위의 실제 절점과 유사 절점의 \bar{w}_I^k 의 값은 0이 된다. 즉, Fig. 5처럼 계면 Γ_{12}^c 의 절점에서만 그 값을 정의하면 된다. 사용된 \bar{w}_I^k 는 다음과 같이 1차 함수이다.

$$\bar{w}_I^k = \begin{cases} 1 - \frac{d_I^k}{D_I^k} & \text{on } \Gamma_{12}^c \\ 0 & \text{on } \Gamma^f \end{cases} \quad (9)$$

이때, d_I^k 는 절점 I 에서 절점 k 까지 계면 Γ_{12}^c 을 따라 생기는 거리이고, D_I^k 는 절점 I 에서 영향 영역 Ω_s^I 의 끝까지 절점 k 방향으로 계면 Γ_{12}^c 을 따라 생기는 최대 거리이다. 마찬가지로, 계면 Γ^f 위의 절점의 가중함수는 계면 Γ^c 에서 0의 값을 갖게 된다. 계면 Γ^f 위의 절점 J 와 관계된 \bar{w}_J^k 는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{w}_J^k = \begin{cases} 1 - \frac{d_J^k}{D_J^k} & \text{on } \Gamma^f \\ 0 & \text{on } \Gamma_{12}^c \end{cases} \quad (10)$$

절점 I 의 쌍일차(bilinear) 함수 $s_I(\mathbf{x})$ 와 가중 함수 $w_I(\mathbf{x})$ 는 Fig. 5와 같다.

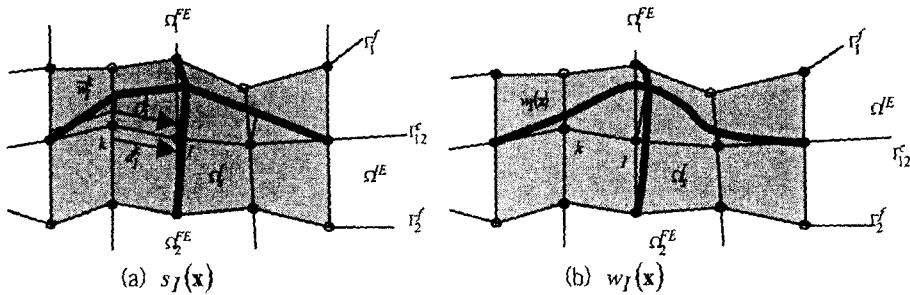


Fig. 5 Illustration of the bilinear functions $s_I(\mathbf{x})$ and $w_I(\mathbf{x})$ for the node I on the interface Γ_{12}^c

계면요소법의 형상함수는 다음과 같은 성질이 있다.^(9,10)

- (1) 계면 Γ^c 에서 연속성을 만족한다.
- (2) 계면 요소와 유한 요소사이의 계면 Γ^f 에서 일치성(compatibility)을 만족한다.
- (3) 형상함수 $\phi^k(\mathbf{x})$ 는 선형 독립적인 유리수 함수이다.
- (4) 기저(basis)의 정도까지 완전성(completeness)을 보장한다.

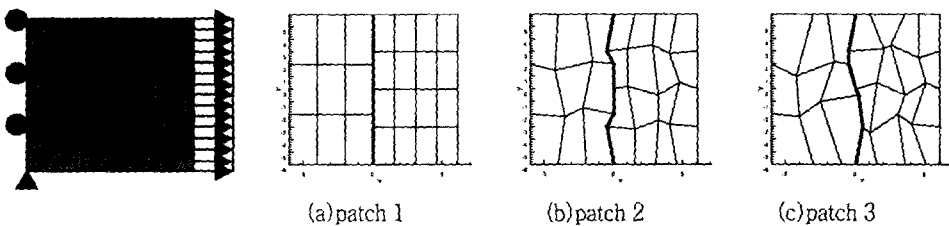


Fig. 6 Patch test models

그러나, 계면 요소의 형상함수 $\phi^k(\mathbf{x})$ 는 위의 성질에서 보아 알 수 있듯이 유리수 함수이므로, 가우스 구적법으로 정확하게 적분하는 것은 어려운 일이다.^(9,10) 실제로 Fig. 7에서 보아 알 수 있듯이, 가우스 구적법으로 수치 적분을 행하는 것은 구적법의 정도를 높여서 패치 시험의 결과가 점진적으로 만족하도록 하는 방법일 뿐 정확히 패치 시험을 통과했다고 말할 수는 없는 것이다. Fig. 7의 그래프는 Fig. 6의 세가지 경우의 패치에 대해 해석한 결과의 오차로써 Fig. 6은 수치적분 점의 개수에 대해, 즉 2×2 , 3×3 , ..., 10×10 까지의 가우스 구적법으로 해석하였을 때의 오차를 정리한 그래프이다. 그래프에서 보아 알 수 있듯이, 가우스 구적법을 증가시키면, 오차가 감소하기는 하지만, 패치 시험을 통과한다고 말할 수는 없다.

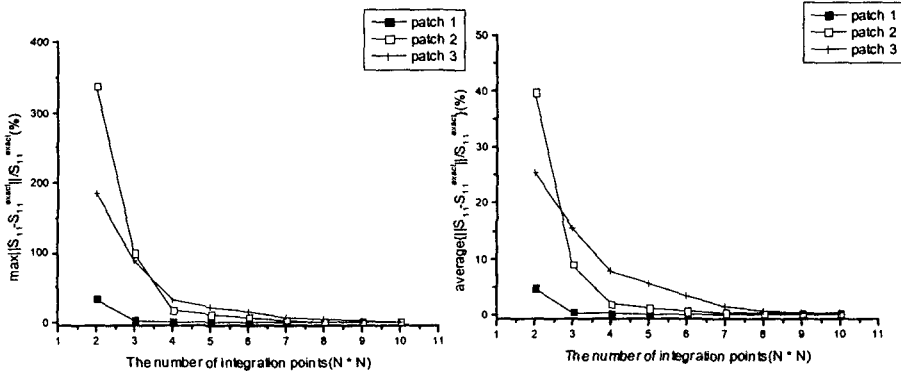


Fig. 7 The graph of error vs. the number of integration points in patch test.

3. 안정화 적합 절점 적분법(stabilized conforming nodal integration)

절점 적분법을 안정화 시키기 위해 다음과 같이 수정된 변형률을 취한다.⁽⁶⁾

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^h(\mathbf{x}_L) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^h(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}; \mathbf{x} - \mathbf{x}_L) d\Omega \quad (11)$$

ε_{ij}^h 는 변위로부터 $\varepsilon_{ij}^h = (u_{i,j}^h + u_{j,i}^h)/2$ 로 계산되고, Φ 는 분포함수로 다음과 같은 가중 함수를 사용하였다.

$$\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{x} - \mathbf{x}_L) = \frac{\phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_L)}{\sum_{J=1}^{NP} \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_J) A_J} \quad (12)$$

이때, $A_J = \int_{\Omega_J} d\Omega$ 는, 예를 들어, 보로노이 도표(Voronoi diagram)으로부터 얻어지는 절점 J 의 영역의 넓이다. 가중

쉐퍼드 함수는 다음과 같은 성질을 만족한다.

$$\sum_{L=1}^{NP} \Phi(\mathbf{x}; \mathbf{x} - \mathbf{x}_L) A_L = 1 \quad (13)$$

문제를 단순하게 하기 위해

$$\phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_L) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_L \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_L \end{cases} \quad (14)$$

를 사용하여 정리하면, 다음과 같다.

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^h = \sum_I \tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{x}_L) \mathbf{d}_I \quad (15)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{hT} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11}^h & \tilde{\varepsilon}_{22}^h & 2\tilde{\varepsilon}_{12}^h \end{bmatrix}, \mathbf{d}_I^T = [d_{1I} \quad d_{2I}] \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{x}_L) = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{I1}(\mathbf{x}_L) & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{I2}(\mathbf{x}_L) \\ \tilde{b}_{I2}(\mathbf{x}_L) & \tilde{b}_{I1}(\mathbf{x}_L) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\tilde{b}_{Ii}(\mathbf{x}_L) = \frac{1}{A_L} \int_{\Gamma_L} \phi_I(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (18)$$

4. 안정화 절점 적분을 이용한 계면 요소법의 패치 테스트

Fig.8(a)와 같은 인장 테스트를 통해 안정화 절점 적분을 이용한 계면 요소법의 패치 테스트를 수행하였다. 물성치는 $E = 1 \times 10^6 Pa, \nu = 0.25$ 이고, 경계 조건은 Fig.8(a)와 같다. Fig.7과 같이 가우스 수치 적분법을 이용한 계면 요소법은 가우스 점의 수가 증가함에 따라 패치 테스트를 점진적으로 통과하지만 안정화 절점 적분을 이용한 계면 요소법은 Fig.8(b)에서 보아 알 수 있듯이 정확하게 패치 테스트를 통과함을 알 수 있다. Fig.8(b)의 결과는 인장 응력값으로, 정해가 $1 \times 10^5 Pa$ 이고, 패치 테스트의 결과 역시 모든 영역에서 $1 \times 10^5 Pa$ 이다. 그러므로, 안정화 절점 적분을 이용한 계면 요소법은 불일치 유한요소 경계를 가지는 문제의 경우, 해의 수렴성을 보장하는 방법으로 사용될 수 있을 것이다.

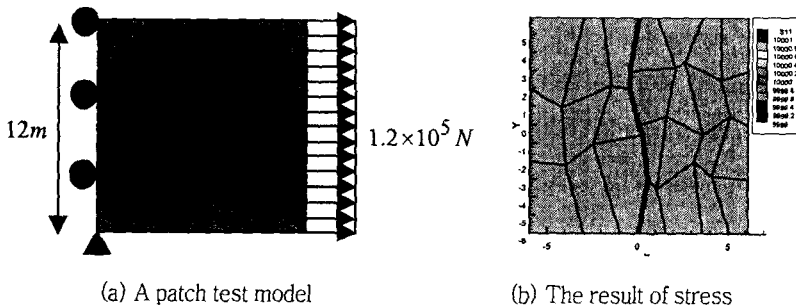


Fig. 8 A patch test model and the result of stress using stabilized nodal integration with IEM

5. 결 론

앞의 결과를 보아 알 수 있듯이, 안정화 절점 적분법을 이용하여 계산한 경계면 요소법은 해의 수렴성을 보장하는 패치 테스트를 정확하게 통과한다. 이것은 불일치 요소망을 가지는 모델링의 해석에서 안정화 절점 적분법을 이용한 경계면 요소법이 해의 수렴성을 보장하며 사용될 수 있다는 것이다.

참고 문헌

1. Aminpour, M. A., Ransom, J.B., "A coupled analysis method for structures with independently modeled finite element subdomains," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.38, 1995, pp3695-3718
2. Babuska, I., Oden, J. T. and Lee, J. K., "Mixed-hybrid finite element approximation of second-order elliptic boundary-value problems," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.11, 1977, pp175-206
3. Belgacem, F. B., "The mortar finite element method with Lagrange multipliers," *Numer. Math.*, Vol.84, 1977, pp173-197
4. Bernardi, C., Maday, Y. and Patera, A. T., *A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method*, in: Brezis, H. and Lions, J. L., eds., *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications*, New York: Pitman, 1994
5. Brezzi, F. and Fortin, M., *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, New York, 1991
6. Chen, J.-S., Wu, C.-T., Yoon, S. and You Y., "A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.50, 2001, pp435-466
7. Demkowicz, L., Devloo, P. and Oden, J. T., "On an h-type mesh-refinement strategy based on minimization of interpolation errors," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.53, 1985, pp67-89
8. Farhat, C. and Mandel, J., "The two-level FETI method for static and dynamic plate problems, Part I: An optimal iterative solver for biharmonic systems," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.155, 1998, pp129-151
9. Kim, H.-G., "Arbitrary placement of local meshes in a global mesh by interface element method (IEM)," Submitted
10. Kim, H.-G., "Interface element method (IEM) for a partitioned system with non-matching interfaces," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Accepted
11. McDevitt, T. W. and Laursen, T. A., "A mortar-finite element formulation for frictional contact problems," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.48, 2000, pp1525-1547
12. Park, K. C., Felippa, C. A. and Rebel, G., "A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces," *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol.53, 2002, pp2117-2142
13. Seshaiyer, P. and Suri, M., "hp submeshing via non-conforming finite element methods," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.189, 2000, pp1011-1030
14. Stouboulis, T. and Haque, K. A., "Recent experiences with error estimation and adaptivity, Part II: Error estimation for h-adaptive approximations on grid of triangles and quadrilaterals," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.100, 1992, pp359-430
15. Wheeler, M. F. and Yotov, I., "Multigrid on the interface for mortar mixed finite element methods for elliptic problems," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.184, 2000, pp287-302