

고속 도함수 근사화에 의해 개선된 무요소법을 이용한 선형탄성 고체문제의 응력해석

Stress Analysis of Linear Elastic Solid Problems by using Enhanced Meshfree Method based on
Fast Derivatives Approximation

이 상 호* 김 효 진** 윤 영 철***
Lee, Sang-Ho Kim, Hyo-Jin Yoon, Young-Cheol

ABSTRACT

Point collocation method based on the fast derivatives approximation of meshfree shape function is applied to solid mechanics in this study. Enhanced meshfree approximation with approximated derivative of shape function is reviewed, and formulation of linear elastic solid mechanics by point collocation method is presented. It implies that governing equation of solid mechanics with strong form is directly formulated without no numerical integration cells or grid. The regularity of weight function is not required due to a use of approximated derivative, so we propose the exponential type weight function that is discontinuous in first derivative. The convergence and stability of the proposed method is verified by passing the generalized patch test. Also, the efficiency and applicability of the proposed method in solid mechanics is verified by solving types of solid problems. Numerical results show that not only a use of proposed weight function leads lower error and higher convergence rate than that of the conventional weight functions, but also the improved collocation method with derivative approximation enables to compute the derivatives of shape function very fast and accurately enough to replace the classical direct derivative calculation.

1. 서 론

최근에 활발한 연구가 진행되고 있는 수치해석기법인 무요소법은 요소를 사용하지 않고 절점만으로 유한요소법과 유사한 정도의 해를 얻을 수 있다는 장점이 있지만, 몇 가지 단점 또한 지니고 있는 것이 사실이다. 즉, 원래 절점만을 사용한다는 취지와는 달리 수치적분시 적분격자를 사용해야 하는 점, 필수경계조건(essential boundary condition)을 자동적으로 만족시키지 못하는 점, 형상함수 및 그 도함수의 계산에 있어서 계산비용이 다소 높다는 점 등이다.

따라서, 무요소법이 개발된 이래, 요소를 사용하지 않는 무요소법의 장점을 충분히 발휘할 수 있는 특수공학문제로의 적용에 대한 연구뿐만 아니라 무요소법의 단점을 보완하기 위한 연구들이 끊임없이 진행되어 오고 있다⁽¹⁾⁻⁽³⁾. 특히, 최근들어 순수하게 절점만을 사용한다는 무요소법의 특성을 살리기 위한 연구들이 활발하게 진행되고 있다⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾.

* 정희원 · 연세대학교 사회환경시스템 공학부 부교수
** 정희원 · 연세대학교 사회환경시스템 공학부 박사과정
*** 정희원 · 연세대학교 사회환경시스템 공학부 박사과정

이 중, Kim and Kim⁽⁸⁾는 형상함수의 도함수를 근사화하는 방법에 의한 point collocation법을 제안하여 유체문제를 해석하였는데, 이를 고체문제에 적용할 경우, 앞서 언급했던 무요소법의 단점들이 효율적으로 해소될 것으로 기대되는데, 즉 도함수를 근사화 하므로써 이에대한 계산비용이 감소하며, 편미분방정식의 강형식(strong form)을 이용하여 계산을 수행하기 때문에 수치적분이 필요치 않으며, 절점만을 이용하여 수치해석을 수행한다는 무요소법의 장점을 심분 활용할 수 있다는 점 등이다. 따라서 본 연구에서는 도함수 근사화에 의한 point collocation법을 고체문제에 적용하는 프로그램의 개발을 그 목적으로 하며, 다양한 고체문제의 해석을 통해서 그 적용성을 검증하고자 한다.

2. 고속 도함수 근사화를 이용한 무요소 근사화

영역 Ω 와 경계 Γ 로 정의된 해석대상체에서 함수 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 의 국부적인(local) 근사함수 $\mathbf{L}^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L)$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{L}^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) = \sum_J^{NP} \Phi_J(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) \mathbf{u}_J \quad (1)$$

여기서 \mathbf{x}_L 은 국부적으로 고정된 절점의 좌표를 의미하며, $\Phi_J(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L)$ 는 국부적 무요소 형상함수를, \mathbf{u}_J 는 절점값(nodal value)를 의미한다. 또한, NP 는 기준점 \mathbf{x}_L 의 영향영역(domain of influence or compact support)내에 포함되는 절점들의 수를 의미한다. 이 때, 국부적 근사함수 $\mathbf{L}^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L)$ 는 다음과 같은 성질을 지닌다⁽⁹⁾.

$$\mathbf{L}^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) = \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}(\mathbf{x}_L) \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (2)$$

여기서 $\overline{\Omega}(\mathbf{x}_L)$ 은 고정된 절점 \mathbf{x}_L 을 중심으로 일정한 크기를 갖는 영역을 의미한다.

식 (1)에 의해서 주어진 고정 절점 \mathbf{x}_L 에 대한 국부적 근사함수 $\mathbf{L}^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L)$ 는 상수 및 선형 완전성(constant or linear completeness) 또는 재생조건(reproducing conditions)을 만족해야한다. 2차원 문제에 있어서 그 조건식은 다음과 같다.

$$\sum_{J \in \overline{\Omega}(\mathbf{x}_L)} \Phi_J(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) = 1; \quad \sum_{J \in \overline{\Omega}(\mathbf{x}_L)} \Phi_J(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) x_J = (x - x_L); \quad \sum_{J \in \overline{\Omega}(\mathbf{x}_L)} \Phi_J(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) y_J = (y - y_L) \quad (3)$$

식 (3)과 같은 재생조건을 만족시키기 위해서 재생조건을 만족시키기 위해서 가중함수(weight function)에 보정함수(correction function)를 곱한 형태의 형상함수를 사용한다.

$$\Phi_J(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) = [C_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) + C_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L)(x_J - x_L) + C_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L)(y_J - y_L)] W_J(\mathbf{x}_L) \quad (4)$$

여기서 $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L)$ 는 보정함수이고 $W(\mathbf{x}_L)$ 는 가중함수로서 Reproducing Kernel Particle Method(RKPM)에서는 창함수(window function)라고 불리운다⁽¹⁰⁾.

식 (4)에서 미정계수 C_0, C_1, C_2 를 결정하기 위해서 먼저 다음과 같은 모멘트함수들을 정의한다.

$$m_{ab}(\mathbf{x}_L) = \sum_{J \in \overline{\Omega}(\mathbf{x}_L)} (x_J - x_L)^a (y_J - y_L)^b W_J(\mathbf{x}_L) \quad (5)$$

식 (5)서 정의된 모멘트함수를 이용하여 식 (4)를 식 (3)에 대입하면 다음과 같이 미정계수 C_0, C_1, C_2 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_L) \quad (6)$$

식 (6)으로부터 얻어진 미정계수 C_0, C_1, C_2 를 식 (4)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\Phi_J(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) = \mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_L) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_L) W_J(\mathbf{x}_L) \quad (7)$$

고정된 절점 \mathbf{x}_L 에 대한 국부적 근사를 해석영역 전체로 확장하면 최종적인 무요소법의 형상함수를 얻을 수 있다.

$$\lim_{x_L \rightarrow x} L^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) = \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_J^{NP} \Phi_J(\mathbf{x}) \mathbf{u}_J \quad (8)$$

여기서 최종적인 형상함수 $\Phi(\mathbf{x})$ 는 식 (7)로부터 다음과 같이 된다.

$$\Phi_J(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(0) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}) W_J(\mathbf{x}) \quad (9)$$

지금까지 무요소법에서 형상함수의 도함수는 식 (9)를 직접 미분하므로써 얻을 수 있었지만, Kim and Kim (2002)은 식 (7)의 국부적 형상함수를 미분하여 국부적 형상함수의 도함수를 계산한 뒤 이를 다시 해석영역 전체로 확장하는 방법을 통해서 최종적인 형상함수의 도함수를 산정하는 방법을 제안하였다. 본 논문에서는 국부적 형상함수를 고려하도록 한다.

$$D_{\mathbf{x}}^n \Phi_J(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) = D_{\mathbf{x}}^n [\mathbf{P}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_L) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_L) W_J(\mathbf{x}_L)] \quad (10)$$

여기서 $D_{\mathbf{x}}$ 는 미분자이며 상첨자 n 은 미분의 차수를 의미한다.

이제 국부점 \mathbf{x}_L 을 \mathbf{x} 으로 확장하면, 다음과 같은 근사화된 최종적인 형상함수의 도함수를 얻을 수 있다.

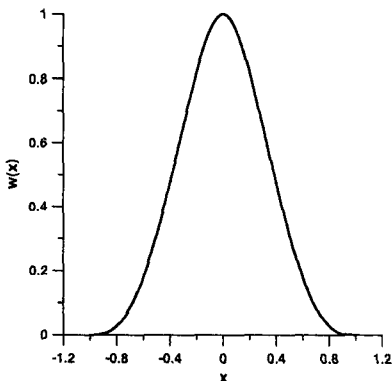
$$\lim_{x_L \rightarrow x} D_{\mathbf{x}}^n \Phi_J(\mathbf{x}, \mathbf{x}_L) = G_{J,\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \approx D_{\mathbf{x}}^n \Phi_J(\mathbf{x}) \quad (11)$$

이러한 근사화된 형상함수의 도함수를 사용하는 경우, 무요소법에서 형상함수 도함수의 미분계산을 보다 빠르고 손쉽게 수행할 수 있다는 장점 이외에 보다 다양한 가중함수의 사용을 가능하게 한다는 장점 또한 얻을 수 있다. 즉, 현재 널리 사용되고 있는 기존의 가중함수 외에도 가중함수의 도함수가 불연속한 가중함수의 사용을 가능하게 한다. 본 연구에서 제안하는 가중함수의 형태는 다음과 같이 1차 미분에서 불연속한 지수함수 형태이다.

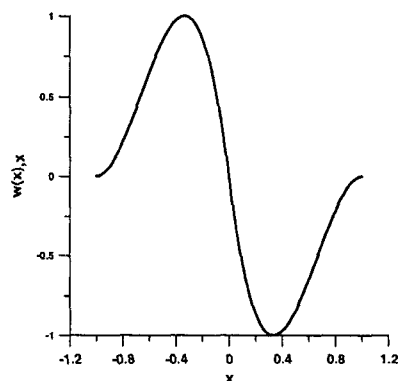
$$W(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{[-\text{sign}(\mathbf{x})/\alpha]}, & \text{for } \|\mathbf{x}\| \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

여기서, $\text{sign}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ 을 의미하며, α 값은 수치해석 경험상으로 0.05 - 0.2 이면 적당하다. 그림 1에 기존의 가중함수와 식 (12)에서 제안한 가중함수를 도시하여 비교하였다.

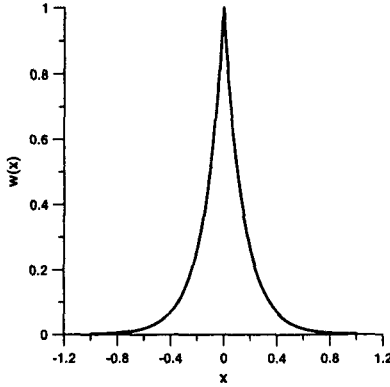
그림 1에 도시된 바와 같이 본 연구에서 제안한 1차미분 불연속 지수함수 형태의 가중함수는 1차미분에서 불연속한 것이 허용됨으로 인해 Kronecker-delta 함수와 유사한 형태를 지닐 수 있게 되었다. 4장에서 수치예제를 통해서 본 연구에서 제안된 가중함수의 특성을 알아보도록 할 것이다.



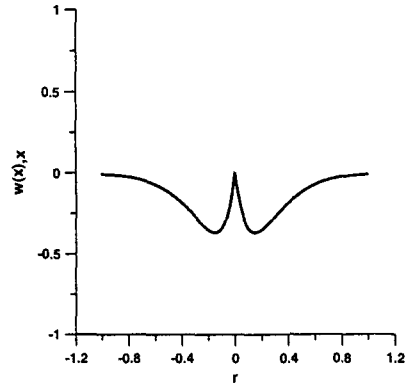
(a) 4차다항식 형태의 가중함수



(b) 4차다항식 형태의 가중함수의 1차도함수



(c) 본 연구에서 제안한 가중함수



(d) 본 연구에서 제안한 가중함수의 1차도함수

그림 1. 4차다항식 형태의 가중함수와 1차미분 불연속 지수함수 형태의 가중함수 및 그 1차 도함수.

3. 강형식(strong form)에 의한 정식화

본 연구에서는 2차원 선형탄성고체문제를 point collocation 법을 이용하여 정식화하기 때문에, 주어진 지배방정식을 약 형식(weak form)으로 바꾸지 않고 직접 강형식에서 이산화하여 표현한다. 선형탄성고체문제의 평형방정식은 다음과 같이 변위에 대한 2차편미분방정식이다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (13)$$

여기서 자연경계조건(natural boundary conditions)과 필수경계조건(essential boundary conditions)은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij}n_j = t_i, \quad \text{on } \Gamma_t; \quad u_i = \bar{u}_i, \quad \text{on } \Gamma_u \quad (14)$$

만약 체적력(body force) b_i 가 작용하지 않는다고 가정하면, 식 (13) 및 식 (14)는 point collocation 정식화에 의해서 다음과 같이 이산화 된다.

$$\sigma_{ij,j} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} \end{Bmatrix} = [\bar{\mathbf{C}}][\mathbf{V}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{0}\} \quad \text{in } \Omega \quad (15a)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y \\ \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y \end{Bmatrix} = [\mathbf{n}][\mathbf{C}][\mathbf{B}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{t}\} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (15b)$$

$$u_i = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = [\Phi]\{\mathbf{d}\} = \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (15c)$$

여기서 행렬 $[\mathbf{V}]$ 는 근사화된 2차도함수를 담고있는 행렬이며, $[\bar{\mathbf{C}}]$ 는 행렬 $[\mathbf{V}]$ 와 관련된 수정된 응력-변형을 관계를 담고 있으며, $[\mathbf{n}]$ 는 수직벡터 성분으로 구성되어 있다. 또한 $[\mathbf{B}]$ 와 $[\Phi]$ 는 각각 형상함수의 근사화된 1차도함수 및 형상함수를 담고 있는 행렬이다. 식 (15)로부터 다음과 같은 최종적인 계방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{C}}][\mathbf{V}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{n}][\mathbf{C}][\mathbf{B}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{\Phi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{d}_I\} \\ \{\mathbf{d}_J\} \\ \{\mathbf{d}_K\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{t}\} \\ \{\bar{\mathbf{u}}\} \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서, 아래첨자 I, J 와 K 는 각각 영역 Ω 내에 포함되는 절점, 경계 Γ_I 위에 있는 절점 및 경계 Γ_u 위에 존재하는 절점들을 의미한다.

이상의 과정에서와 같이 지배방정식을 point collocation을 이용하여 정식화하였기 때문에, 수치적분이 필요치 않으며 따라서 따로 적분격자 없이도 절점만으로 수치해석을 수행할 수 있게 된다. 또한, 기존의 무요소법에서는 형상함수의 2차 도함수를 계산하는 경우 복잡한 계산과정을 거쳐야 하지만, 근사 도함수를 사용하는 경우에는 간편하게 형상함수의 2차 도함수를 산정할 수 있음을 주목할 필요가 있다.

4. 수치예제

본 연구에서는 근사 도함수를 이용한 point collocation법에 의한 2차원 선형탄성고체문제를 해석하기 위해서 개발한 프로그램의 정확성 및 적용성을 확인하고자 한다. 이를 위해서 몇 가지 수치예제를 해석한다.

모든 수치예제에 있어서 수치적분격자는 요구되지 않으며, 수렴율을 평가하기 위해서 두가지 오차 norm이 이용된다. 즉, 변위오차에 대한 L_2 norm과 에너지 오차 (H_1) norm은 각각 다음과 같다.

$$\|L_2\| = \left[\int_{\Omega} (\mathbf{u}^h - \mathbf{u}^{exact})^T (\mathbf{u}^h - \mathbf{u}^{exact}) d\Omega \right]^{1/2} ; \|H_1\| = \left[\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^h - \boldsymbol{\varepsilon}^{exact})^T (\boldsymbol{\sigma}^h - \boldsymbol{\sigma}^{exact}) d\Omega \right]^{1/2} \quad (17)$$

여기서, 상첨자 'h'와 'exact'는 각각 수치해와 이론해를 의미한다.

4.1 일반화된 조각시험

기존의 필수경계조건만을 고려하는 조각시험은 제안된 수치해석 방법의 수렴성(convergence)을 검증하기 위한 필요조건은 되지만 충분조건은 되지 못하며 근사화방법의 안정성을 검증할 수 없다⁽¹¹⁾. 따라서, 필수경계조건과 자연경계조건이 부여된 "일반화된 조각시험"을 통해서 본 연구에서 제안된 근사화방법의 수렴성과 안정성을 검증하고자 한다. 이를 위한 규칙적인 절점배치와 불규칙적인 절점배치, 그 경계 조건을 그림 2에 도시한다.

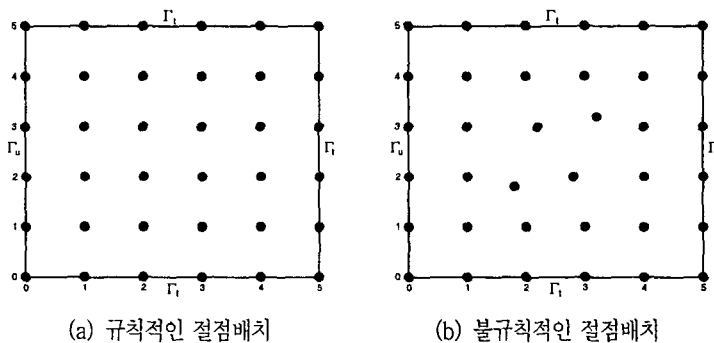


그림 2. 일반화된 조각시험을 위한 절점배치 및 경계조건.

Young's Modulus $E = 1.0$ 이고, Poisson's ratio $\nu = 0.25$ 이다. 필수경계에 규정된 변위는 다음과 같이 주어진다.

$$u_x = 0.1 + 0.2x + 0.3y + 0.4xy + 0.5x^2 + 0.6y^2 \quad (18a)$$

$$u_y = 0.6 + 0.5x + 0.4y + 0.3xy + 0.2x^2 + 0.1y^2 \quad (18b)$$

여기서 강형식을 직접 이상화하여 의해서 정식화를 수행하였기 때문에 변위함수는 최소한 2차식으로 주어져야 한다.

수치해석결과, 근사도함수에 의한 point collocation 무요소법은 일반화된 조각시험을 통과하였다. 여기서 통과라는 의미는 2차식으로 주어진 경계에서의 함수가 내부절점에서도 정확하게 재생되었음을 의미한다.

4.2 내민보 문제

두 번째 수치예제로서 Timoshenko and Goodier⁽¹²⁾에 의해서 이론해가 주어져 있는 내민보 문제를 해석하였다. 체원 및 물성치의 단위는 계산의 편의상 무차원으로 하였다. 해석대상의 물성치로서 탄성계수 $E = 10000$ 과 포아손비 $\nu = 0.25$ 로 하였다. 해석대상체와 경계조건은 그림 3에 도시된 바와 같으며, 보의 깊이 $D = 2$, 길이 $L = 8$, 그리고 하중 $P = 100$ 으로 결정하였다.

영향영역의 크기를 결정하는 계수 d_{max} 의 크기에 따라서 변위오차 및 에너지 오차 norm을 각각 그림 4 및 그림 5에 도시하였다. 그림 4 및 그림 5에 도시된 바와 같이 기존의 가중함수에 비해 본 논문에서 제안된 1차미분 불연속 가중함수의 오차가 훨씬 작게 나옴을 확인할 수 있었다. 아울러 1차미분 불연속 지수함수 형태의 가중함수의 경우, d_{max} 가 2.01일 때, 변위 및 에너지 오차 norm모두에서 가장 우수한 결과를 제시함을 확인할 수 있었다. 이 때, $\alpha = 0.1$ 을 사용하였다.

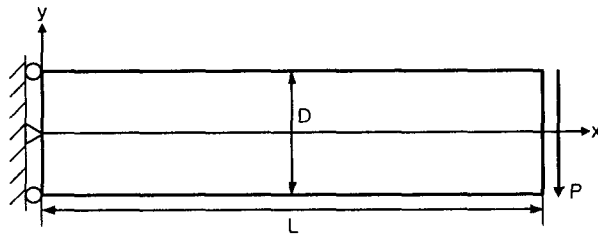


그림 3. 내민보 문제의 해석대상체 및 경계조건.

변위 오차 및 에너지오차의 수렴율을 그림 6에 도시하였으며 그 수렴율을 p 로 표시하였다. 이 때, $d_{max} = 2.01$ 및 $\alpha = 0.1$ 을 사용하였다. 그림 6에서 도시된 바와 같이 제안된 방법에 의한 변위 및 에너지 오차 모두에서 수렴속도가 유한요소법의 그것보다 보다 우수함을 확인할 수 있었다. 단, 절점의 수가 너무 적은 경우에는 point collocation 법에 의해서 경계조건을 정의하는 절점의 수가 너무 작게되어 오차가 유한요소법에 비해서 많이 발생하는 현상이 발생하였다. 하지만, 적절한 수의 절점이 되면, 유한요소법에 비해 오차가 크게 줄어든다는 것을 확인할 수 있었다.

마지막으로 그림 7에는 기존의 무요소법에서 흔히 사용하는 3차 spline 형태의 가중함수를 사용하는 경우와 본 연구에서 제안한 가중함수를 사용한 경우에 보 중앙에서의 응력성분 σ_{xy} 를 이론해와 비교하여 도시하였다. 두가지 경우에서 모두 만족할 만한 정확도를 유지하고 있지만, 본 연구에서 제안한 가중함수를 사용하는 경우에 보다 이론해와 일치하는 결과를 제시하고 있음을 확인할 수 있었다.

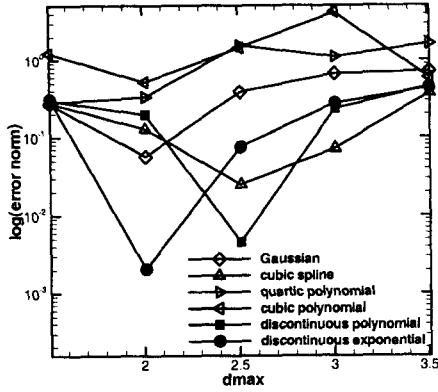


그림 4. d_{\max} 에 따른 변위오차 norm의 변화.

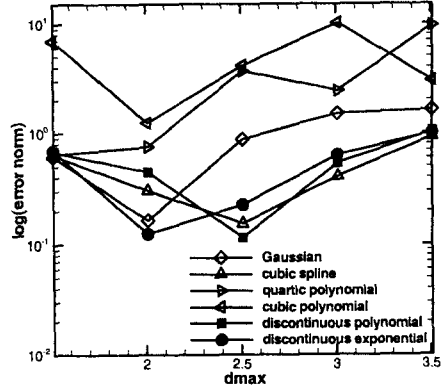
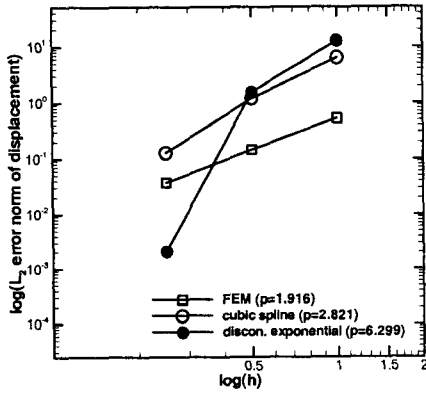
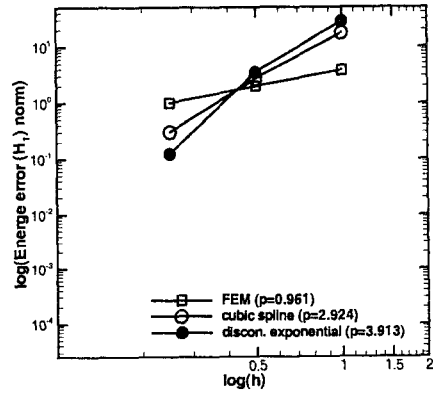


그림 5. d_{\max} 에 따른 에너지오차 norm의 변화.



(a) 변위오차 norm의 수렴율



(b) 에너지오차 norm의 수렴율

그림 6. 내민보 문제의 절점사이의 거리에 따른 수렴율

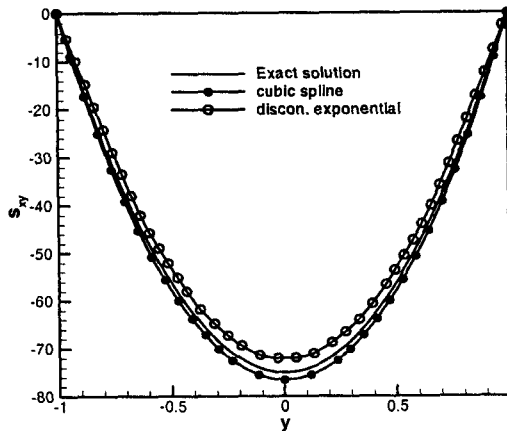


그림 7. $x = L/2$ 에서의 전단응력 σ_{xy} 의 분포도 비교

5. 결 론

무요소법에서 형상함수 도함수의 근사화에 의한 point collocation 법을 2차원 선형탄성고체문제에 적용하는 프로그램을 개발하였으며, 일반화된 조각시험을 통해서 개발된 프로그램의 수렴성 및 안정성을 검증하였으며, 선형탄성고체문제의 해석을 통해서 그 적용성을 검증하였다.

Point collocation 법에 의해서 선형탄성고체문제의 지배방정식을 정식화하였기 때문에 수치적분을 위한 적분격자가 필요치 않았으며, 고속 근사 도함수를 사용하므로써 고차의 미분계산도 빠르게 수행할 수 있음을 확인하였다. 또한, 무요소법의 단점으로 지적되던 필수경계조건의 처리 또한 point collocation 법을 사용하므로 해서 자연스럽게 만족시킬 수 있음을 확인하였다.

도함수를 근사함으로써 보다 폭넓은 가중함수를 사용할 수 있게 되었는데, 본 연구에서 제안한 1차미분 불연속 지수함수 형태의 가중함수를 사용하는 경우, 기존의 무요소법에서 사용하던 가중함수를 사용하는 경우보다 오차가 줄었으며 수렴속도 또한 빠르다는 것을 확인하였다. 단, point collocation 법을 사용하는 경우 수치적분을 수행하지 않고 절점만으로 해석을 수행하기 때문에 필수경계조건이나 자연경계조건을 표현하는 절점의 수가 너무 작게 되면 오차가 다소 크게 발생할 수 있으므로 적절한 수의 자유도를 확보하는 것이 중요하다는 것을 언급한다.

참고 문헌

1. Lu, Y.Y., Belytschko, T. and Gu, L., "A New Implementation of the Element Free Galerkin Method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.113, 1994, pp.397-414.
2. Krongauz, Y. and Belytschko, T., "Enforcement of Essential Boundary Conditions in Meshless Approximations Using Finite Elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.131, 1996, pp.133-145.
3. Lee, S.-H., Kim, T.-Y. and Yoon, Y.-C., "An Application of Element-Free Galerkin Method through a Combination with Infinite Element on Unbounded Domain", *Proceedings of 6th U.S. National Congress on Computational Mechanics*, 2001, p.52.
4. Aluru N.R. and Li, G., "Finite Cloud Method: a True Meshless Technique based on a Fixed Reproducing Kernel Approximation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.50, 2001, pp.2373-2410.
5. Zhang, X., Liu, X.H., Song, K.Z. and Lu, M.W., "Least-Squares Collocation Meshless Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.51, 2001, pp.1089-1100.
6. Park, S.H. and Youn, S.K., "The Least-Squares Meshfree Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.52, 2001, pp.997-1012.
7. Hao, S., Park, H.S. and Liu, W.K., "Moving Particle Finite Element Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.53, 2002, pp.1937-1958.
8. Kim, D.W. and Kim, Y., "Point Collocation Methods using the Fast Moving Least Square Reproducing Kernel Approximation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, in print.
9. Liu, W.K., Li, S. and Belytschko, T., "Moving Least Square Reproducing Kernel Method Part I: Methodology and convergence", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.143, 1997, pp.422-453.
10. Liu, W.K., Jun, S. and Zhang, S., "Reproducing Kernel Particle Methods", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.20, 1995, pp.1081-1106.
11. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method I: The Basis*, Butterworth-Heinemann, 5th Ed., 2000, pp.253-256.
12. Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, McGRAW-HILL, 1970. pp.41-46