

무한탄성영역 해석을 위한 EFG 와 BEM 의 새로운 결합기법 개발

A new coupling method of Element-Free Galerkin Method and Boundary Element Method for infinite domain problems in elasticity

이 상 호 김 명 원
Lee, Sang-Ho* Kim, Myoung-Won**

ABSTRACT

A new coupling method of Element-Free Galerkin Method(EFGM) and Boundary Element Method(BEM) using the domain decomposition method is presented in this paper. This proposed methodology is that the problem domain is decomposed into sub-domains being modeled by the EFGM and BEM respectively and the respective EFGM and BEM domains share a partially overlapped region over an entire domain. Then, the each sub-domain is separately computed and the variables on common region are iteratively updated until converging. It is an important note that in the developed coupling method, there is no need to combine the coefficient matrices of EFGM and BEM sub-domains, in contrast with the other conventional coupling methods. In the first part of this paper, a theory of EFGM and BEM is summarized, and then a brief introduction of domain decomposition method is described. Then, a new coupling method is presented. Also, patch test and Some numerical examples are studied to verify stability, accuracy and efficiency of the proposed method, in which numerical performance of the method is compared with that of conventional method such as EFGM-BEM variational coupling method, EFGM and BEM.

1. 서 론

경계요소법(Boundary Element Method)과 1990년대 중반부터 활발히 연구가 진행되어온 무요소법(Meshfree Method)은 광범위한 영역의 공학문제의 해를 구하는데 사용되는 널리 알려진 수치해석 기법들이다. 하지만 무요소법의 경우에는 이동최소제곱 근사법(Moving Least Square Interpolant)을 근간으로 도출되는 형상함수가 Kronecker delta condition을 정확히 만족시키지 못하기 때문에 주어진 문제의 필수경계조건을 만족시키기 위한 추가적인 기법이 요구되는 단점을 지니고 있다. 이러한 단점을 극복하기 위한 일환으로 경계조건을 효과적으로 처리할 수 있으며 특수한 공학적 문제에 활용성이 높은 조합방법론들이 제시되었는데, Belytschko 등⁽¹⁾은 Element-Free Galerkin Method(EFGM)과 유한요소법(Finite Element Method, FEM)을 조합하는 방법론을, Liu와 Gu⁽²⁾는 EFGM-BEM 변분적

* 정회원· 연세대학교 사회환경시스템공학부 부교수

** 정회원· 비티컨설팅(주) 기술연구팀 대리

조합 방법론을 제시하였다. 국내에서는 이상호 등^{(3),(4)}은 EFMG-BEM 직접조합법, EFGM과 무한요소법(Infinite Element Method)의 조합방법을 제시하였다. 이중 본 연구와 관련있는 이상호 등이 제시한 EFGM-BEM 직접조합법은 EFG 영역에서 계산된 강성도매트릭스와 BEM 영역에서 계산된 강성도매트릭스를 직접조합방식에 의해 결합시킨 것으로 조합경계면 주위에서 수치해의 정도가 보장되지 못하는 단점이 있으며 Gu와 Liu 가 제시한 EFGM-BEM 변분적 조합법은 경계면에서의 수치해의 정도는 향상되나 접속영역에서의 연속조건을 만족시키기 위해 추가적인 항에 대한 계산이 요구되므로 강성도매트릭스의 크기가 커지는 단점을 가지고 있다. 이에 본 연구에서는 영역분할법(Domain Decomposition Method)을 이용하여 두 해석기법의 조합시 정확도를 유지하면서 수치해의 정도를 향상시킬 수 있는 새로운 EFGM-BEM 조합방법론을 제시하였다. 본 조합방법론은 각 영역에 대해서 완전 분리된 계산이 이루어지고 접속영역의 변수는 연속적인 업데이트를 통하여 정해에 수렴하도록 수행한다. 이와 같은 조합방법은 EFGM과 BEM의 서로 다른 정식화를 기본 프로그램으로 채택하면서 단지 EFGM과 BEM의 조합코드 작성만을 필요로 하는 장점을 지니고 있다.

2. EFGM 정식화

2.1. 2차원 선형탄성문제를 위한 약형식

경계 $\Gamma(\Gamma=\Gamma_u \cup \Gamma_t)$ 를 갖는 2차원 영역 Ω 는 미소변위의 가정 하에서 선형탄성 구성방정식이 적용된다. 영역내의 임의의 점에서 지배방정식은 응력 σ 와 체적력 b 를 갖는 식 (1)과 같은 미분방정식 형태로 나타낼 수 있으며, 이 방정식은 식 (2)와 같은 자연경계조건을 만족시켜야 한다.

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (2)$$

여기서, n 은 영역 Ω 에 대한 단위수직벡터이며, \bar{t} 는 경계에 작용하는 표면력이다. 지배방정식에 대한 약형식은 식 (3)과 같이 표현할 수 있다.

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon(u) : D : \epsilon(u) d\Omega = \int_{\Omega} \delta u \cdot b d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u \cdot \bar{t} d\Gamma \quad \forall \delta u \in H_0^1 \quad (3)$$

여기서, $u \in H^1$, $\delta u \in H_0^1$ 를 만족하는 함수들이다.

2.2. 이동최소제곱 근사법

2차원 문제에 대한 EFGM은 이동최소제곱에 의한 근사법, 식 (3)과 같은 지배방정식에 대한 약형식과 해석대상에 규정된 필수경계조건 그리고 재료에 대한 구성방정식을 기반으로 한다. EFGM에서 한 기준절점을 중심으로 일정한 거리의 영향영역 내에 포함되는 이웃한 절점들을 대상으로 국부영역 내에서의 근사함수 $u^h(x)$ 는 이동최소제곱법에 의해서 식 (4)와 같이 근사화될 수 있다.

$$u^h(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & y & \dots & x^k & x^{k-1}y & \dots & y^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = p^T(x) \cdot q \quad (4)$$

여기서, $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ 는 임의의 차수를 갖는 다항기저함수이고, \mathbf{q} 는 이에 상응하는 미지의 절점변수벡터이다. 각 절점에서의 미지계수 q_i 는 가중함수가 곱해진 잔차를 최소화시키는 stationary 조건을 이용하여 구하며, 결과적으로 식 (6a)와 같은 형상함수를 갖는 EFG 근사함수를 식(5)에 나타냈다.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{n_N} N_l(\mathbf{x}) d_l = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (5)$$

$$N_l(\mathbf{x}) = \sum_j^m \mathbf{p}_j(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{C}(\mathbf{x}))_{jl} \quad (6a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{n_N} w(\mathbf{x} - x_l) \mathbf{p}(x_l) \mathbf{p}^T(x_l), \quad \mathbf{C}(\mathbf{x}) = [w(\mathbf{x} - x_1) \mathbf{p}(x_1), \dots, w(\mathbf{x} - x_{n_N}) \mathbf{p}(x_{n_N})] \quad (6b)$$

여기서, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 와 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ 는 형상함수를 구성하는 행렬식이고, n_N 은 이동최소제곱보간에 사용된 절점의 개수이며 m 은 다항기저함수의 개수이다. 가중함수, $w(\mathbf{x} - x_l)$ 는 영향영역에 포함된 절점들의 상대적인 가중치를 결정한다. 본 연구에서는 원형의 compact support를 갖는 Gauss지수함수 형태의 가중함수를 사용하였다.

3. 경계요소법의 정식화

식 (1)에 가상일의 원리를 적용하여 적분방정식을 형성하면 임의의 가상변위에 대해 다음과 같은 체적 적분방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{p}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_t} (\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (7)$$

여기서, \mathbf{p} 는 표면력, \mathbf{u}^* 는 가상의 변위 그리고 \mathbf{p}^* 는 \mathbf{u}^* 에 대응되는 가상의 표면력을 나타낸다. 식 (7)의 왼쪽 첫번째 항목에 대해서 부분적분법을 수행하고 식 (7)과 기본해(fundamental solution)를 적용시키면 다음의 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} \mathbf{u} \mathbf{p}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{p} \mathbf{u}^* d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{b} \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (8)$$

식 (8)을 이산화하기 위해 변위와 표면력을 형상함수와 절점에서의 값을 이용하여 표현하면 결과적으로 다음과 같은 행렬 형태의 방정식을 얻게 된다.

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{p} + \mathbf{d} \quad (9)$$

여기서, $\mathbf{H} = c^i + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \Phi^T d\Gamma$, $\mathbf{G} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \Psi^T d\Gamma$ 를 나타내며 위의 적분은 경계면에서 수행하므로 영역에 대한 이산화는 필요하지 않다.

4. 영역분할법을 이용한 새로운 EFGM과 경계요소법의 조합 방법

4.1. 영역분할법(Domain Decomposition Method)

그림 1과 같은 영역 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 을 갖는 다음의 선형 미분방정식을 생각해 보자.

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega, \quad (10a)$$

$$u = g \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (10b)$$

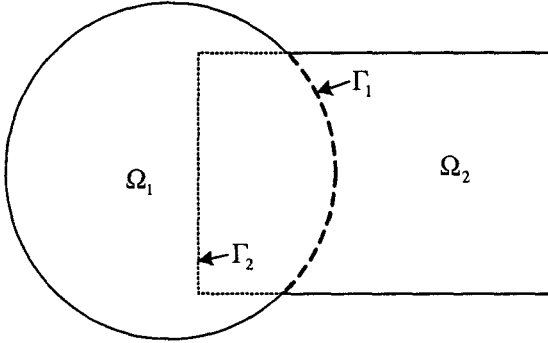


그림 1. Domain Decomposition

여기서 L 은 linear differential operator이며 문제를 단순화하기 위하여 경계조건은 Dirichlet 경계조건으로 가정한다. 주어진 영역 Ω 의 경계는 $\partial\Omega$ 로 표시하며 Γ_i 는 Ω_i 의 경계중 Ω 의 내부에 있는 부분을 의미하고 나머지 부분영역 Ω_i 의 경계는 $\partial\Omega_i \setminus \Gamma_i$ 로 나타내자.

그림 1과 같이 분할된 각각의 영역에 대해서 원래의 문제를 다음의 두 개의 경계치문제를 반복적으로(iteratively) 푸는 것으로 나타낼 수 있게 된다. ($n=1, 2, 3, \dots$)

부분영역 Ω_1 에 대해서,

$$Lu_1^n = f \quad \text{in } \Omega_1, \quad (11a)$$

$$u_1^n = g \quad \text{on } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1, \quad (11b)$$

$$u_1^n = u_2^{n-1} |_{\Gamma_1} \quad \text{on } \Gamma_1. \quad (11c)$$

부분영역 Ω_2 에 대해서,

$$Lu_2^n = f \quad \text{in } \Omega_2, \quad (12a)$$

$$u_2^n = g \quad \text{on } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2, \quad (12b)$$

$$u_2^n = u_1^n |_{\Gamma_2} \quad \text{on } \Gamma_2. \quad (12c)$$

이처럼 주어진 각 부분영역에 대한 부분문제 식 (11)과 (12)를 이산화하면 다음의 식 (13)과 (14)를 얻을 수 있다.

$$A_1 u_1^n = f_1 \quad \text{in } \Omega_1, \quad (13a)$$

$$u_{\partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1}^n = g_1 \quad \text{on } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1, \quad (13b)$$

$$u_{\Gamma_1}^n = I_{\Omega_2 \rightarrow \Gamma_1} u_2^{n-1} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (13c)$$

$$A_2 u_2^n = f_2 \quad \text{in } \Omega_2, \quad (14a)$$

$$u_{\partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2}^n = g_2 \quad \text{on } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2, \quad (14b)$$

$$u_{\Gamma_2}^n = I_{\Omega_1 \rightarrow \Gamma_2} u_{\Omega_1}^n \quad \text{on } \Gamma_2. \quad (14c)$$

이와 같은 방법으로 문제를 해결하는 알고리즘으로는 Alternating Schwarz Method, Multiplicative Schwarz Method, Additive Schwarz Method 등이 있다. 본 논문에서는 Alternating Schwarz Method를 EFGM과 BEM의 조합방법으로 사용하였다.

4.2. 영역분할법을 이용한 EFGM 과 BEM 의 조합

본 절에서는 영역분할법을 이용하여 EFGM과 BEM을 조합하기 위하여 최초의 문제의 영역을 그림 2와 같이 부분적으로 겹치는 EFGM 부분영역과 BEM 부분영역으로 나누고 겹치는 영역에 대해서는 두 해석기법에 대해서 모두 모델화한다. 일반적으로 겹치는 영역에 대해서는 임의적으로 선택을 하지만 특이경계적분을 피하기 위해서는 너무 작은 영역이 겹치는 것을 피하여야 하며 겹치는 영역이 커지면 커질수록 빠른 수렴속도를 보인다. 그러나 각 방법에 대한 방정식들이 증가하게 되므로 방법의 효율성에서 떨어진다. 따라서 EFGM에 경계조건을 부여하기 위해 계산되는 BEM interface는 최소한 경계요소의 길이와 같도록 선택해야 한다.

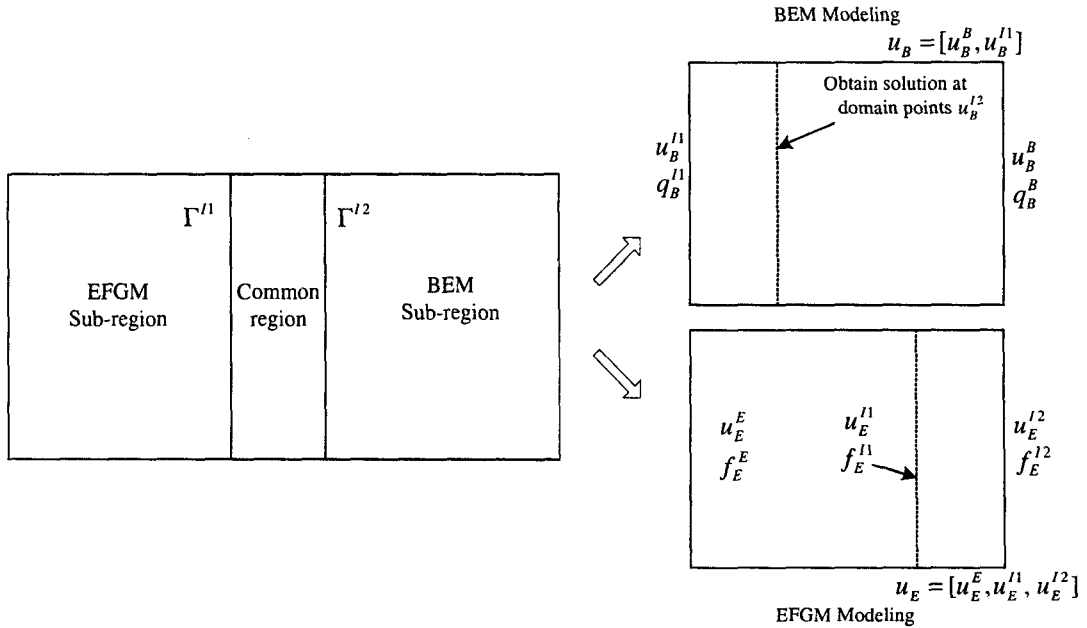


그림 2. Overlapping domain decomposition

본 연구에서 제안된 방법을 설명하기 위해 그림 2에 있는 다음의 벡터들을 정의한다:

u_B^{I1} : BEM 부분영역에서 계산된 Γ^{I1} 에서의 변위

u_B^B : u_B^{I1} 을 제외한 BEM 부분영역에서 계산된 변위

u_B^{I2} : BEM 부분영역의 내부 절점에서 계산된 Γ^{I2} 에서의 변위

$$u_B = [u_B^B, u_B^{I1}]^T$$

u_E^{I1} : EFGM 부분영역에서 계산된 Γ^{I1} 에서의 변위

u_E^{I2} : EFGM 부분영역에서 계산된 Γ^{I2} 에서의 변위

u_E^E : u_E^{I1} 을 제외한 EFGM 부분영역에서 계산된 변위

$$u_E = [u_E^E, u_E^{I1}, u_E^{I2}]^T$$

비슷하게 BEM에서의 q_B^B 와 q_B^{I1} , EFGM에서의 f_E^E , f_E^{I1} 과 f_E^{I2} 도 정의할 수 있다.

본 연구에서 제안하는 조합방법은 다음의 procedure로 진행된다:

1. **BEM 부분영역에서의 계산**
 - (1) 초기치 $u_{B,0}^{I1} = u_0$ 를 가정한다.
 - (2) $n=0, 1, 2, \dots$, 에 대해서, 다음의 시스템 방정식을 푼다.

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^B \\ u_{B,0}^{I1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_B^B \\ q_{B,0}^{I1} \end{Bmatrix}$$
 - (3) $q_{B,0}^{I1}$ 과 u_B^B 를 얻는다.
 - (4) Γ^{I2} 따라 존재하는 내부 절점의 값을 계산한다.

$$u_{B,0}^{I2} = \begin{bmatrix} H_{11}^* & H_{12}^* \\ H_{21}^* & H_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^B \\ u_{B,0}^{I1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11}^* & G_{12}^* \\ G_{21}^* & G_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_B^B \\ q_{B,0}^{I1} \end{Bmatrix}$$
2. **EFGM 부분영역에서의 계산**
 - (1) BEM 부분영역에서 계산된 값을 이용하여 다음의 시스템 방정식을 푼다.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^E \\ u_{E,0}^{I1} \\ u_{B,0}^{I2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_E^E \\ f_E^{I1} \\ f_E^{I2} \end{Bmatrix}$$
 - (2) u_E^E 와 u_E^{I1} 을 얻는다.
 - (3) Γ^{I1} 에서의 값을 업데이트한다.

$$u_{B,1}^{I1} = (1 - \alpha)u_{B,0}^{I1} + \alpha u_E^{I1}, \quad \alpha = \text{relaxation parameter}$$
3. 다음의 Stop Criterion 을 만족할 때까지 Step 1 과 2 를 반복한다.

$$\frac{\|u_{B,n+1}^{I1} - u_{B,n}^{I1}\|}{\|u_{B,n+1}^{I1}\|} < \epsilon \text{ (given tolerance)}$$

5. 수치해석예제

5.1. Patch 시험

본 연구에서 제안한 방법의 안정성과 정확성을 검증하기 위하여 사각형 영역의 외부경계를 따라 임의의 해를 가정한 후 수치해석을 수행하여 대상영역의 내부의 임의 절점에서 구한 수치해가 가정한 해를 만족시키는지의 여부를 점검한다. 본 patch 시험에서는 그림 3 과 같은 절점(EFGM nodes=77, BEM nodes=32)을 갖는 모형($0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5$)을 사용하여 patch 시험을 수행하였고 사용한 가상의 변위해는 다음과 같은 선형함수로, 탄성계수 E 는 1000 을 포아송비 ν 는 0.25 을 사용하였다.

$$u_x = x + y + 2, \quad u_y = 2x + y + 1 \quad (15)$$

표 1 은 그림 3 의 patch 시험의 결과에 따른 임의 절점에 대한 변위를 나타낸 것이다. Patch 시험의 결과 각 부분영역의 경계 Γ_E 과 Γ_B 에서의 계산된 변위값이 2 회의 iteration 을 통해 최대

0.6% 내외의 오차를 보임을 확인하였다. 따라서 본 논문에서 제시한 조합방법의 안정성과 정확성을 검증할 수 있었다.

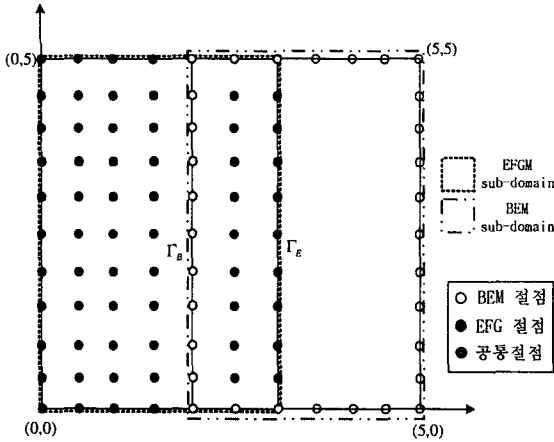


그림 3. Patch Test 모형

표 1. Patch 시험의 결과 - Γ_E 과 Γ_B

좌표	이론해		수치해		오차		
	u_x	u_y	u_x	u_y	u_x	u_y	
Γ_E	(3.0,0.0)	5.0	7.0	4.999	6.999	0.02	0.01
	(3.0,2.5)	7.5	9.5	7.454	9.467	0.61	0.35
	(3.0,5.0)	10.0	12.0	10.0	12.0	0.00	0.00
Γ_B	(2.0,0.0)	4.0	5.0	4.0	5.0	0.00	0.00
	(2.0,2.5)	6.5	7.5	6.478	7.517	0.34	0.22
	(2.0,5.0)	9.0	10.0	9.0	10.0	0.00	0.00

5.2. Cantilever beam 문제

수치예제를 통한 새로운 조합방법을 검증하기 위해 대상모형을 Timoshenko 와 Goodier⁽⁵⁾가 제안한 순수휨을 받는 보를 선정하였다. 해석대상 모형의 기하학적 형상과 하중조건은 그림 4 와 같으며 탄성계수 $E=1000\text{psi}$, 포아송비 $\nu=0.25$ 로 갖는 평면변형률(plain stress) 조건으로 가정하였다.

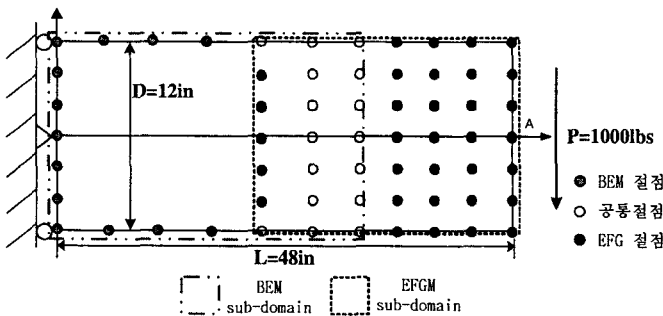


그림 4. Cantilever beam 모형

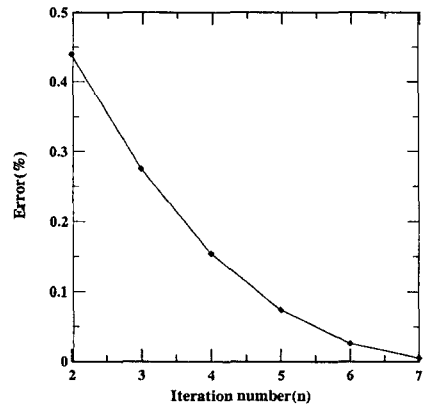


그림 5. Iteration 횟수에 따른 수렴곡선

본 알고리즘의 정확성 및 효율성을 검증하기 위해 본 알고리즘(EFGM nodes=35, BEM nodes=24)의 결과와 EFGM-BEM 변분적 조합법(EFGM nodes=49, BEM nodes=24), EFGM(nodes=85)과 BEM(nodes=56)의 해석결과들과 비교하였다. 표 2 의 결과는 그림 4 의 A 점에서의 수직변위를 비교한 것이다. 본 연구에서 제안한 조합방법과 가장 많은 절점으로 해석을 수행한 EFGM 의 해석결과가 다른 EFGM-BEM 변분적 조합법과 BEM 에 비해 훨씬 좋은 해석결과를 얻을 수 있었다. 또한 본 알고리즘에 의한 해석결과와 EFGM 의 해석결과와 근소한 차이를 보이는 높은 해의 정도을 볼 수 있었다. 따라서, EFGM 만으로 해석을 수행하기 부적합한 무한영역을 갖는 문제의 경우에는

본 연구에서 제안하는 조합방법론이 해의 정확성도 높고 효율성 면에서도 월등한 것으로 판단된다. 그림 5 는 iteration 횟수에 따른 제안한 알고리즘의 수렴곡선을 나타낸 것으로 iteration 이 증가함에 오차가 0 에 수렴함을 볼 수 있다.

표 2. 절점 A에서의 수직 변위 비교

해석방법	이론해(in)	수치해(in)	오차(%)
Proposed method	-266.5	-268.0	0.56
EFGM-BEM 변분적조합	-266.5	-273.5	2.62
EFGM(dmax=2.0)	-266.5	-265.3	0.45
BEM	-266.5	-276.2	3.64

6. 토의 및 결론

본 연구는 기존의 조합방법보다 EFGM과 BEM의 손쉽게 조합하는 해석기법을 제안하였다. 새로이 제안된 EFGM 과 BEM의 조합방법을 통해서 얻은 연구의 결과는 다음과 같다.

- (1) 영역분할법을 이용한 새로운 조합방법은 기존 조합방법과는 달리 각각의 프로그램이 독립적으로 수행되므로 추가적인 항(term)에 대한 계산이 필요없으며 단지 접속영역에 대한 조합 코드만을 작성하면 되므로 손쉽게 서로 다른 수치해석기법의 조합이 가능하다.
- (2) 본 연구에서 제안한 방법을 patch 시험과 cantilever beam 문제를 통해 살펴본 결과 모두 오차가 0.6% 내의 높은 해의 정도를 보였으며, cantilever beam 문제를 통해 기존의 조합방법과 EFGM, BEM에 비해 정확성 및 효율성 면에서 우월함을 확인할 수 있었다.
- (3) 뿐만 아니라 (1)에서 언급하였듯이 각각의 프로그램이 독립적으로 수행되므로 parallel computing이 가능하여 무한탄성영역 문제를 여러 개의 부분영역으로 분할하여 해석을 수행할 수 있으므로 대용량의 계산을 빠르고 정확하게 해석하는 것이 가능해진다.

참고문헌

1. Belytschko, T., Organ, D. and Krongauz, Y., " A coupled finite element-element free Galerkin methods", *Computational Mechanics*, Vol.74, 1996, pp.186-195
2. Liu, G. R. and Gu, Y. T., " Coupling of element free Galerkin and hybrid boundary element methods using modified variational formulation", *Computational Mechanics*, Vol.26, 2000, pp.166-173
3. 이상호, 김상효, 박철원, "무요소법절점법과 경계요소법의 조합에 관한 연구", 대한토목학회 학술발표회 논문집, 제 1 권, 1997, pp.99-102
4. 이상호, 김태연, "무요소법과 무한요소의 결합에 관한 연구", 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, 제 14 권 1 집 제 26 호, 2001, pp.76-83
5. Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Company, New York, 1970