

개선된 고차 Convex 근사화를 이용한 구조최적설계

Structural Optimization using Improved Higher-order Convex Approximation

조효남* 민대홍** 김성현***
Cho, Hyo-Nam Min, Dae-Hong Kim, Seong-Heon

ABSTRACT

Structural optimization using improved higher-order convex approximation is proposed in this paper. The proposed method is a generalization of the convex approximation method. The order of the approximation function for each constraint is automatically adjusted in the optimization process. And also the order of each design variable is differently adjusted. This self-adjusted capability makes the approximate constraint values conservative enough to maintain the optimum design point of the approximate problem in feasible region. The efficiency of proposed algorithm, compared with conventional algorithm, is successfully demonstrated in the Three-bar Truss example.

1. 서론

일반적으로 구조최적화 문제는 구조해석을 필요로 하는 많은 암시함수(Implicit function)들을 포함하고 있기 때문에 상당히 많은 해석시간과 비용이 소요된다. 따라서 계산시간과 비용의 단축이 요구되었고, 이에 대해 많은 연구자들이 근사화 기법을 사용하게 되었다. 근사화 기법은 최적화 문제에 포함되어 있는 암시함수들을 근사적으로 해석함에 따라 그 계산시간을 줄이고자 하는 것이다. Schmit와 Farshi (1974)는 Taylor 시리즈 1차항을 이용한 선형 근사화 기법을 제시하였고, 보다 효율적인 구조최적화에 대한 근사화를 위하여 설계변수에 대한 역수를 중간매개변수로 사용하는 역변수 근사화 기법에 대한 연구가 이루어졌다 (Storaasli와 Sobieszczanski-Sobieski; 1974, Noor와 Lowder; 1975). 이후 Fluery와 Braibant(1986)는 구조최적화 문제에서의 Convexity를 유지하면서 문제를 해결하기 위해 위에서 제시한 선형 근사화와 역변수 근사화의 혼합형태인 Convex 근사화 기법을 제안한 바 있다. 이 Convex 근사화 기법을 바탕으로 중간매개변수를 달리하여 많은 기법들이 발전하여 왔으며, 가장 최근에 Chung과 Chiou(2001)는 실수의 고차 중간매개변수를 이용하여 근사함수를 형성하고 매 근사함수 형성 단계에서 중간매개변수의 차수를 조정하여 최적설계를 수행함으로써 Convexity를 유지하면서 수렴속도를 증가시키는 연구를 수행하였다. 그러나 중간매개변수의 차수를 결정하

* 정회원 · 한양대학교 토목환경공학과 정교수
** 정회원 · 안산공과대학 토목과 겸임전임강사
*** 한양대학교 토목환경공학과 석사과정

는 과정에서 간편성을 이유로 모든 설계변수에 대하여 동일한 차수의 중간매개변수를 적용하였다. 본 연구에서는 기존의 확장된 Convex 근사화 기법의 개념을 이용하면서 각각의 설계변수에 대응하는 서로 다른 차수의 고차의 중간매개변수를 사용하여 구조최적화 문제에 적용시켰다. 제안한 근사화 기법은 구조최적화 과정에서 해석적인 방법에 의해 자동으로 중간매개변수의 차수를 조정하여 적용함으로써 기존의 방법에 비해 Convexity는 유지하면서 해의 정확성을 더욱 높이고 해석의 반복횟수를 줄여주었다.

2. 근사화 기법

2.1. 기존에 제안된 근사화 기법

2.1.1. Convex 근사화 기법(Convex Approximation)

Convex 근사화 기법은 일반적으로 Convex Linearization(CONLIN)이라고 하며, 선형 근사화와 역변수 근사화의 혼합된 형태로 식(1)과 같이 나타난다.

$$h_c(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{(+)} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_0} (x_i - x_{0i}) + \sum_{i=1}^{(-)} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_0} (x_i - x_{0i}) \left(\frac{x_{0i}}{x_i} \right) \quad (1)$$

여기서 $h_c(\mathbf{x})$ 는 $h(\mathbf{x})$ 의 보전적 근사화이며,

만약 $\left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_0} \geq 0$ 이라면, $h_c(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{(+)} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_0} (x_i - x_{0i})$ 이고,

만약 $\left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_0} < 0$ 이라면, $h_c(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{(-)} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_0} (x_i - x_{0i}) \left(\frac{x_{0i}}{x_i} \right)$ 이다.

CONLIN의 장점은 직접 또는 역변수 근사화의 조합들 중에서 가장 보전적(conservative) 근사화이라는 점이다. 그러나 선형 근사화의 경우 설계변수로 직접 근사화 하고, 역변수 근사화의 경우 중간매개변수의 차수를 -1만을 사용하기 때문에 보존성 및 수렴속도에 한계를 가지고 있다.

2.1.2. 자기조정 보전적 근사화(Self-adjusted Convex Approximation; SACA)

함수 근사화의 가장 기본적인 형태인 CONLIN은 중간매개변수의 차수를 1과 -1만을 사용하여 Convexity와 수렴속도에 한계를 가지고 있어서 Chung과 Chiou(2001)은 중간매개변수의 차수를 실수로 확장함으로써 일반화하였다. 여기서 중간매개변수의 차수가 고차로 될수록 Convexity가 높아진다는 수학적 증명을 하였다. 따라서 기본 개념은 실수 r 차에 대한 고차의 중간매개변수를 이용한 Convex 근사화와 같다. 또한 매 근사함수 형성과정에서 중간매개변수 차수인 r 값을 자동으로 결정해 주어야 하며 이에 대한 SACA의 형태는 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$h_a(\mathbf{x}, r) = h(\mathbf{x}_0) + \sum_i \frac{1}{r} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_0} \left[\left(\frac{x_i}{x_{0i}} \right)^{r-1} x_i - x_{0i} \right] + \sum_i \frac{1}{r} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_0} \left[\left(\frac{x_i}{x_{0i}} \right)^{r-1} x_i - x_{0i} \right] \left(\frac{x_{0i}}{x_i} \right)^r \quad (2)$$

여기서, $h_a(\mathbf{x}, r)$ 은 $h(\mathbf{x})$ 의 SACA이며,

만약 $\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)_{x_0} \geq 0$ 이라면, $h_a(\mathbf{x}, r) = h(\mathbf{x}_0) + \sum_i^+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)_{x_0} \left[\left(\frac{x_i}{x_0}\right)^{r-1} x_i - x_0\right]$ 이고,

만약 $\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)_{x_0} < 0$ 이라면, $h_a(\mathbf{x}, r) = h(\mathbf{x}_0) + \sum_i^- \frac{1}{r} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)_{x_0} \left[\left(\frac{x_i}{x_0}\right)^{r-1} x_i - x_0\right] \left(\frac{x_0}{x_i}\right)^r$ 이다.

($k-1$)번째 구조최적화과정에서, $r^{(k-1)}$ 의 값은 SACA의 중간매개변수의 차수이며, 설계변수 \mathbf{x}_{k-1} 의 근사화를 수행한다. ($k-1$)번째 최적화 과정에서 형성된 근사 함수를 이용하여 최적해 \mathbf{x}_k 를 얻게 되고 이에 대한 실제 함수값을 구하게 된다. 이때 근사 함수에 의한 함수 값과 실제 함수에 의한 함수 값이 같아지면 근사 함수를 이용한 최적화 과정이 종료된다. 그리고 매 반복단계에서 형성된 근사 함수로부터 중간매개변수에 대한 설계민감도와 차수 r 값이 결정되어야 한다. 근사화를 통해 구해진 $h_a(\mathbf{x}_k, r^{(k-1)})$ 의 값과 실제 해석을 통해 구한 $h(\mathbf{x}_k)$ 를 서로 비교하여, 만약 근사 함수 값이 실제 함수 값보다 작으면 $h_a(\mathbf{x}_k, r^{(k-1)})$ 는 보전적이지 않다. 그러므로 이러한 경우에는 새로운 근사 함수 형성에 필요한 r^k 의 값을 증가시켜줘야 한다. 반대로 실제 함수 값 보다 클 경우에는 충분히 보전적임에도 불구하고 수렴속도가 늦어진다. 이러한 경우 수렴속도를 증가시키기 위해 r^k 의 값을 감소시켜야 한다. 따라서 가장 적절한 r^k 의 값을 구하기 위하여 식(3)과 같이 전 단계의 근사 함수의 r^k 를 조정하여 현 단계의 실제함수 값과 같아지는 r^k 를 구하게 된다. 식(3)으로부터 Chung과 Chiou(2001)는 r^k 를 조금씩 이동하여 반복적으로 계산을 수행하는 간단한 수치 해석적 방법을 사용하여 r^k 를 구하였다. 즉, 근사 함수와 실제 제약 함수 값을 같다고 두고 r^k 에 대해서 수치 해석적으로 풀면 된다.

$$h(\mathbf{x}_{k-1}) + \sum_i^+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)_{x_{k-1}} \left[\left(\frac{x_{ik}}{x_{i(k-1)}}\right)^{r-1} x_{ik} - x_{i(k-1)}\right] + \sum_i^- \frac{1}{r} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)_{x_{k-1}} \left[\left(\frac{x_{ik}}{x_{i(k-1)}}\right)^{r-1} x_{ik} - x_{i(k-1)}\right] \left(\frac{x_{i(k-1)}}{x_{ik}}\right)^r = h(\mathbf{x}_k) \quad (3)$$

2.2. 개선된 고차매개변수를 이용한 보전적 근사화

기존의 SACA는 각 단계에서 근사 함수를 형성 할 때 식(4)와 같이 모든 설계변수에 대해 동일한 실수형 고차중간매개변수를 사용하게 되는데, 이는 각각의 설계변수에 대한 r 을 만족하는 것이 아니라 모든 설계변수에 대표적인 r 을 반영하는 효과를 가지고 있다.

$$y_i = x_i^r \quad (4)$$

여기서, x_i 는 각각의 설계변수, y_i 는 각각의 중간매개변수이다.

본 연구에서 제안한 근사화 기법은 개선된 고차매개변수를 이용한 Convex 근사화 기법(Improved

Higher-order Approximation: IHCA)으로 식(5)와 같이 모든 설계변수에 대응하는 중간매개변수의 차수를 사용함으로써 기존의 SACA를 확장하여 보다 적극적인 Convexity를 보장받는 방법이며, 근사 함수는 식(6)과 같이 나타내어진다.

$$y_i = x_i^{r_i} \quad (5)$$

$$h_e(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = h(\mathbf{x}_0) + \sum_i^{(+)} \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \left[\left(\frac{x_i}{x_{i0}} \right)^{r_i-1} x_i - x_{i0} \right] + \sum_i^{(-)} \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \left[\left(\frac{x_i}{x_{i0}} \right)^{r_i-1} x_i - x_{i0} \right] \left(\frac{x_{i0}}{x_i} \right)^{r_i} \quad (6)$$

여기서, $h_e(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ 은 $h(\mathbf{x})$ 의 IHCA이며,

$$\text{만약 } \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \geq 0 \text{ 이라면, } h_e(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = h(\mathbf{x}_0) + \sum_i^{(+)} \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \left[\left(\frac{x_i}{x_{i0}} \right)^{r_i-1} x_i - x_{i0} \right] \text{이고,}$$

$$\text{만약 } \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} < 0 \text{ 이라면, } h_e(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = h(\mathbf{x}_0) + \sum_i^{(-)} \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \left[\left(\frac{x_i}{x_{i0}} \right)^{r_i-1} x_i - x_{i0} \right] \left(\frac{x_{i0}}{x_i} \right)^{r_i} \text{이다.}$$

SACA에서는 구조최적화 과정에서 모든 중간매개변수에 대해 같은 차수의 값을 적용시켰으나, IHCA에서는 각각의 중간매개변수에 대해 각기 다른 차수의 값을 적용시킨다. 따라서 각각의 매개변수에 대한 차수를 구하는 방법은 SACA와 마찬가지로, $(k-1)$ 번째 구조최적화과정에서의 근사화를 통해 구해진 $h_e(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}^{(k-1)})$ 의 값과 실제 해석을 통해 구한 $h(\mathbf{x}_k)$ 를 같다고 하여 식(7)과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}_{k-1}) + \sum_i^{(+)} \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_{k-1}} \left[\left(\frac{x_{ik}}{x_{i(k-1)}} \right)^{r_i-1} x_{ik} - x_{i(k-1)} \right] \\ + \sum_i^{(-)} \frac{1}{r_i} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_{k-1}} \left[\left(\frac{x_{ik}}{x_{i(k-1)}} \right)^{r_i-1} x_{ik} - x_{i(k-1)} \right] \left(\frac{x_{i(k-1)}}{x_{ik}} \right)^{r_i} = h(\mathbf{x}_k) \end{aligned} \quad (7)$$

각각의 설계변수에 대응하는 중간매개변수에 대한 차수를 구하기 위해 식(7)을 각각의 설계변수영역으로 분리해야 각각의 r_i 를 구할 수 있다. 따라서 식(7)을 x_i 에 대해 편미분을 취하게 되면 식(8)과 같은 형태로 된다.

$$\text{만약 } \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_{i(k-1)}} \geq 0 \text{ 이라면, } \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_{i(k-1)}} \left(\frac{x_{ik}}{x_{i(k-1)}} \right)^{r_i-1} = \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_{i(k)}} \quad (8-1)$$

$$\text{만약 } \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_{i(k-1)}} < 0 \text{ 이라면, } \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_{i(k-1)}} \left(\frac{x_{i(k-1)}}{x_{ik}} \right)^{r_i+1} = \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_{i(k)}} \quad (8-2)$$

식(8)은 해석적인 방법으로 식(9)와 같이 r_i 를 구할 수 있다.

$$\text{만약 } \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_{i(k-1)}} \geq 0 \text{ 이라면, } r_i = \left[\ln \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_{i(k)}} - \ln \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_{i(k-1)}} \right] / \ln \left(\frac{x_{ik}}{x_{i(k-1)}} \right) + 1 \quad (9-1)$$

$$\text{만약 } \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_{i(k-1)}} < 0 \text{ 이라면, } r_i = \left[\ln \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_{i(k)}} - \ln \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right)_{x_{i(k-1)}} \right] / \ln \left(\frac{x_{i(k-1)}}{x_{ik}} \right) - 1 \quad (9-2)$$

식(9)로부터 구한 중간매개변수에 대한 차수를 근사 함수에 적용시켜 구조최적화 과정마다 반복하여 최적해를 구한다. SACA에서는 차수를 결정하는 과정에서 r 증분에 따른 반복적인 수치 해석적 방법을 사용하기 때문에 r 값을 구하는 과정에서 초기치 가정이 잘못 되었을 경우 계산이 많아지거나 값을 구하지 못하는 경우가 발생하지만, 본 연구에서 제안한 개선된 고차매개변수를 이용한 IHCA는 차수를 구하는데 있어서 위에서 설명한 바와 같은 해석적인 방법을 통하여 각각의 설계변수에 대한 중간매개변수의 차수를 결정하므로 보다 정확하고 신속하게 r_i 값을 구할 수 있다.

3. 설계민감도 해석 및 최적설계 알고리즘

제안된 근사함수는 설계변수에 대한 1차 설계민감도를 필요로 한다. 본 연구에서 설계민감도 값을 효과적으로 구하기 위해 자동미분(Automatic differentiation)을 사용하였으며, 수치해석을 FORTRAN 프로그램으로 사용하였기 때문에 FORTRAN 코드를 자동미분할 수 있는 ADIFOR2.0(Bichof 등, 1996)을 사용하였다. 근사함수를 이용한 최적설계 알고리즘은 그림1과 같으며 최적화 방법으로는 신뢰성 면에서 우수한 ALMM (Augmented Lagrange Multiplier Method과 BFGS (Broydon-Fletcher-Goldforb-Shanno)방법을 사용하였다. 또한 선탐색은 황금분할법을 사용하였다. 이와 같은 최적화 기법은 국부 최적화기법들을 부프로그램으로 형성하고 있는 ADS (Automated Design Synthesis)[G. N. Vanderplaats: 1985]를 이용하여 수행하였다.

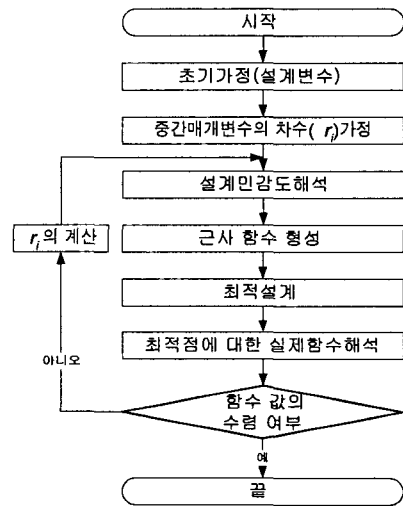


그림 1 최적설계 알고리즘

4. 수치예제

본 연구에서 근사함수를 이용한 효율적인 구조최적설계를 위하여 IHCA를 제안하였고, 이를 기존의 근사화 방법인 CONLIN 및 SACA와 비교하기 위하여 Chung과 Chiou(2001)의 연구에서 사용한 동일한 트러스 구조물에 대하여 수치해석을 수행하였다.

4.1. 수치예제에 대한 최적설계 문제의 정식화

그림 2와 같이 수치예제에 사용된 트러스 구조물의 설계변수는 부재의 단면적으로 정하였으며, 사재의 단면적이 동일하다고 가정하여 사재의 단면적 x_1 과 중앙부재의 단면적 x_2 로 하였다. 또한 최적설계의 초기치

는 각각 1 in^2 으로 하였다. 목적함수는 식(10)과 같이 트러스 구조물의 총 중량으로 하였다.

$$F(x) = 200\sqrt{2} \cdot x_1 + 100 \cdot x_2 \quad (10)$$

제약조건은 식(11)과 같이 트러스 부재에 대한 응력 만족조건으로 설정하였다.

$$h_1(x) = 20 \frac{x_2 + \sqrt{2}x_1}{2x_1x_2 + \sqrt{2}x_1^2} - 20 \leq 0 \quad (11-1)$$

$$h_2(x) = -20 \frac{x_2 + \sqrt{2}x_1}{2x_1x_2 + \sqrt{2}x_1^2} - 15 \leq 0 \quad (11-2)$$

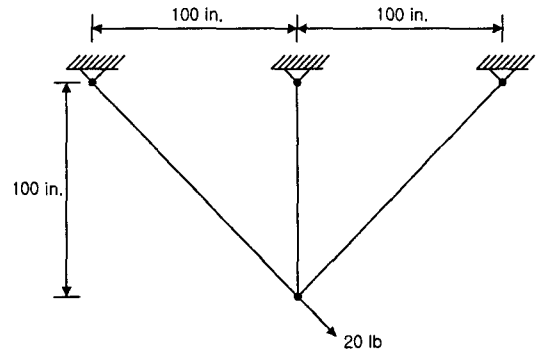


그림 2 수치예제

4.2. 결과 및 분석

최적설계 정식화에 근거하여 수치예제의 최적설계를 각각의 근사화 방법에 따라 수행하였으며, 설계결과를 표1에 제시하였다. 또한 안정적인 수렴여부를 살펴보기 위하여 반복횟수에 따른 목적함수의 변화를 그림3에 제시하였고, 중간매개변수의 차수인 r 값을 표 2에 나타내었다.

표1의 최적설계 결과에서 나타난 바와 같이 각각의 근사화 방법에 따른 설계변수의 값은 사재의 경우 0.788 in.^2 이고, 중앙부재의 경우 $0.408 \sim 0.409 \text{ in.}^2$ 이다. 그리고 목적함수의 값은 263.9 lb 로 나타났다. 이는 각각의 근사화 방법을 이용한 구조최적화 방법이 정확도 면에서 모두 우수한 성능을 보이고 있음을 알 수 있다. 또한 그림3의 목적함수 수렴이력을 보면 각각의 근사화 방법에 근거한 최적화 과정이 안정적으로 해에 수렴하고 있음을 볼 수 있다. 따라서 기존의 근사화 방법과 제안한 근사화 방법은 정확도 및 안정성을 확보한 신뢰도가 높은 방법임을 알 수 있다. 그러나 각각의 방법에 따른 반복횟수를 살펴보면 CONLIN의 경우 13회이고, SACA는 7회인데 반해 본 연구에서 제안한 IHCA는 5회의 반복횟수를 나타냄으로써 기존의 기법에 비해 IHCA가 가장 효율적인 방법임을 알 수 있다. 표2는 SACA와 IHCA의 구조최적화 과정에서 조정되는 중간매개변수의 차수인 r 값의 변화를 보여주고 있다.

표 1 최적설계 결과

	CONLIN	SACA	IHCA
$x_1 \text{ (in.}^2\text{)}$	0.788	0.788	0.788
$x_2 \text{ (in.}^2\text{)}$	0.409	0.408	0.408
목적함수(lb)	263.9	263.9	263.9
반복횟수	13	7	5

표 2 중간매개변수의 차수 r 값

반복횟수	SACA		IHACA	
	r	r_1	r_2	
1	3.50	3.50	3.50	
2	1.13	1.07	0.75	
3	0.75	2.07	0.20	
4	0.10	-0.39	-0.22	
5	-0.20	-0.37	-0.31	
6	-0.30			
7	-0.34			

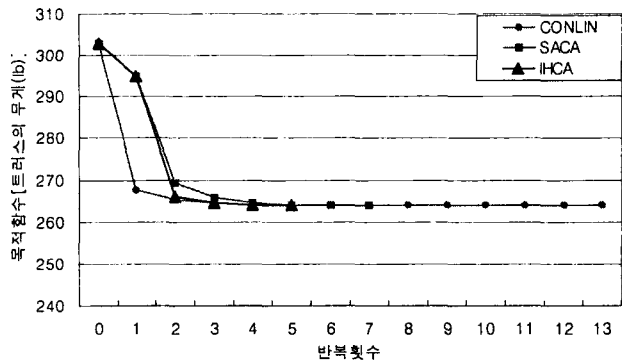


그림 3 목적함수의 수렴이력

본 예제에서 CONLIN의 경우 역변수 근사화가 선택되었기 때문에 차수 r 은 모두 -1값을 갖는 효과를 나타내어 수렴속도가 늦어지는 반면에 SACA는 대표적인 중간매개변수의 차수인 r 값이 근사 함수 형성단계에서 매번 계산되어 CONLIN 보다는 수렴속도를 증진시키는 효과를 가져왔다. 그러나 IHCA의 경우 각각의 설계변수 x_1 과 x_2 에 따른 중간매개변수의 차수를 각각 r_1 과 r_2 에 대하여 구함으로써 Convexity를 유지하면서 수렴성을 높이는 효과를 가져왔다. 따라서 IHCA가 해의 신뢰도를 확보하면서 가장 효율성이 뛰어난 방법임을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 기존의 Convex 근사화 기법을 보다 일반적인 형태로 확장한 IHCA를 제안하였다. 이를 수치 검증 예제에 적용해 기존의 Convex 근사화 기법을 이용한 구조최적설계와 비교하여 해의 정확도, 안정성 및 효율성을 검토하였으며, 이에 대한 결론은 다음과 같다.

- 1) 본 논문에서 제안한 IHCA는 최적화 과정에서 각각의 설계변수에 따른 중간매개변수의 차수를 해석적인 방법으로 구함으로써 매우 적극적인 Convexity와 수렴속도를 동시에 고려하는 방법이다. 또한 기존의 근사화 방법을 사용한 구조최적설계와 비교하여 기존방법의 신뢰도를 확보하면서 효율성 면에서 우수한 근사화 방법이다.
- 2) Convex 근사화를 가장 일반적으로 확장한 IHCA방법을 보다 대형화된 실질적인 구조최적설계문제에 적용한다면 매우 효과적인 구조최적설계를 수행할 수 있다고 기대된다.

감사의 글

본 연구는 BK21의 지원으로 이루어졌으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. Bichof, c., Carle, A., Khademi, P., Andrew, M., and Hovland, P., "ADIFOR2.0Users' Guide" Mathematics and Computer Science Division Technical Memorandum No.192 and Center for Research on Parallel Computation Technical Report CRPc-95516-S, June 1998
2. Fluery C, Braibant V. "Structural optimization: a new dual method using mixed variable", Int J Num Meth Engng, Vol.23, 1986, pp.409-28
3. Haftka RT, Gurdal Z. Elements of structural optimization. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1992. pp.237-9.
4. Kirsch U. "Structural optimization fundamentals and applications", Berlin, Springer, 1993, pp.32-3
5. Noor AK, Lowder HE. "Structural reanalysis via mixed method", Comput Struct, Vol.5, 1975, pp.9-12
6. Storaasli OO, Sobieszczanski-Sobieski J. "On the accuracy of the Taylor approximation for structure resizing", AIAA, Vol.1, 1974, pp.231-3
7. Tien-Tung Chung, Chyon-Huey Chiou. "Self-adjusted convex approximation method for structural optimization", Comput Struct, Vol.79, 2001, pp.665-672
8. Schmit LA, Farshi B. "Some approximation concepts for structural synthesis", AIAA, Vol.12, No.5, 1974, pp.629-9.