

## 비보존력이 작용하는 캔틸레버형 기둥의 안정성

### Stability of Cantilever-Type Columns under Nonconservative Load

오 상 진<sup>†</sup>                      이 병 구<sup>\*</sup>                      최 규 문<sup>\*\*</sup>  
Oh, Sang-Jin                  Lee, Byoung-Koo              Choi, Kou-Moon

---

#### ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate the stability of tapered columns with general boundary condition(translational and rotational elastic support) at one end and carrying a tip mass of rotatory inertia with translational elastic support at the other end. The column model is based on the classical Bernoulli-Euler beam theory which neglects the effects of rotatory inertia and shear deformation. The governing differential equation for the free vibrations of linearly tapered columns subjected to a subtangential follower force is solved numerically using the corresponding boundary conditions. And the bisection method is used to calculate the critical divergence/flutter load. After having verified the results of the present study, the frequency and critical divergence/flutter load are presented as functions of various nondimensional system parameters.

---

#### 1. 서 론

기둥은 보, 평판 등과 함께 구조물을 형성하는 가장 기본이 되는 구조요소이어서 다양한 조건을 갖는 기둥요소의 자유진동 및 안정 문제에 관한 많은 연구가 이루어져 왔다. 이 연구들에서는 기둥을 연속계 또는 이산계로서 모형화하였으며, 기둥에 작용하는 축하중으로는 보존력(conservative force) 또는 비보존력(nonconservative force)을 고려하였다. 비보존력을 받는 구조물의 안정성에 관한 문제는 현대 공학문제에서 특히 중요하게 다루어지고 있다.<sup>1)~11)</sup> 예를 들어 비행체의 날개 또는 몸체에 작용하는 공기력(aerodynamic force), 전동기의 회전자(rotor)에 작용하는 힘은 비보존력이며, 자동제어가 이루어지는 많은 구조계는 비보존력계를 형성하고 있다.<sup>1),2)</sup> 또한 1940년에 발생한 Tacoma Narrows교의 붕괴는 비보존력인 풍하중에 의한 것이다.<sup>8)</sup> 비보존력인 subtangential follower force를 받는 기둥에서는 subtangential parameter의 크기에 따라 divergence형 또는 flutter형 임계하중을 나타낸다. 이와 같은 비보존력을 받는 기둥의 안정해석을 위해서는 판성효과가 고려된 동적개념(dynamic concept)에 의한 해석이 수행되어야 한다.

이 논문에서는 일단은 회전 및 수직방향 스프링으로 지지된 일반적인 단부조건을 갖고 타단은 집중질량과 수직방향 스프링을 갖는 변단면 기둥에 subtangential follower force가 작용하는 경우 여러 가지 제변수 변화에 따른 임계하중과 고유진동수의 변화를 고찰하는데 연구목적이 있다.

---

<sup>†</sup> 정회원 · 담양대학 토목과 조교수

<sup>\*</sup> 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

<sup>\*\*</sup> 원광대학교 대학원 토목환경공학과 박사과정

## 2. 해석모형

그림 1은 좌측단은 회전 및 수직방향 스프링으로 지지되어 있고, 우측단은 집중질량과 수직방향 스프링을 갖는 지간길이  $l$ 인 변단면 기둥에 subtangential follower force  $P$ 가 작용하는 경우 진동형의 예를 나타낸 것이다. 이 그림에서  $A$ 와  $I$ 는 각각 기둥축상 임의점  $x$ 에서의 단면적과 단면2차모멘트이며,  $A_a$ 와  $I_a$ 는 좌측단에서,  $A_b$ 와  $I_b$ 는 우측단에서 기둥단면의 단면적과 단면2차모멘트이다. 그리고  $K_{ra}$ 는 회전스프링상수,  $K_{ta}$ 와  $K_{tb}$ 는 수직방향 스프링상수이며,  $M$ 과  $J$ 는 각각 집중질량의 크기 및 질량관성모멘트이다. 그리고  $\alpha$ 와  $\gamma$ 는 각각 우측단에서의 단면회전각 및 subtangential parameter이며,  $w(x, t)$ 는 횡방향 진동변위이다.

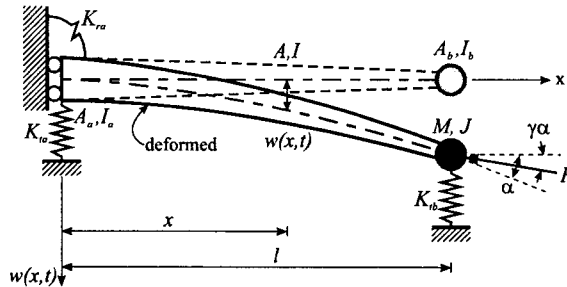


그림 1 Subtangential follower force를 받는 변단면 기둥의 지지조건 및 제변수

Bernoulli-Euler이론을 적용하는 경우 그림 1에 나타낸 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + P \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

식 (1)에서  $E$ 와  $\rho$ 는 각각 기둥 재료의 탄성계수 및 밀도이다.

대상 기둥이 조화진동을 한다고 가정하면, 횡방향 진동변위에 대한 조화진동식은 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

여기서  $w_x$ 는 조화진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이며,  $\omega_i$ 는 고유각진동수(rad/s),  $i$ 는 모드번호이다.

본 연구에서는 해석 대상 기둥으로 좌측단의 단면적 및 단면2차모멘트를 기준으로 식 (3), (4)에 나타낸 바와 같이 단면적과 단면2차모멘트가 직선적으로 변화하는 선형 변단면 기둥을 택하였다.

$$A = A_a [1 + (\beta - 1)x/l]^m \quad (3)$$

$$I = I_a [1 + (\beta - 1)x/l]^n \quad (4)$$

윗 식들에서  $\beta$ 는 좌측단과 우측단에서의 단면제원  $d_a$ 와  $d_b$ 의 비로서 이후 단면비( $d_b/d_a$ , section ratio)라 한다. 그리고 ( $m$ ,  $n$ )은 단면형상계수로서 변화율이 변단면인 경우 (1, 3), 변화폭 변단면인 경우 (1, 1), 정방형 변단면인 경우 (2, 4)이다.<sup>12)</sup>

지배 미분방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = w_x/l \quad (5,6)$$

$$p = Pl^2/(EI_a), \quad C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho A_a / (EI_a)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (7,8)$$

식 (8)에서  $C_i$ 는 무차원 고유진동수(frequency parameter)이다.

식 (1)에 식 (2)~(4)를 대입하고, 식 (5)~(8)의 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 식 (9)와 같다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = - \frac{2n(\beta-1)}{[1+(\beta-1)\xi]} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \left\{ \frac{n(n-1)(\beta-1)^2}{[1+(\beta-1)\xi]^2} + \frac{p}{[1+(\beta-1)\xi]^n} \right\} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + C_i^2 [1+(\beta-1)\xi]^{m-n} \eta \quad (9)$$

좌측단은 회전스프링과 수직방향 스프링으로 구성되어 있으므로 경계조건은  $EI_a d^2 w_x / dx^2 = K_{ra} dw_x / dx$ ,  $EI_a d^3 w_x / dx^3 = -K_{la} w_x$ 이며, 우측단은 집중질량과 수직방향 스프링으로 구성되어 있으므로 경계조건은  $EI_b d^2 w_x / dx^2 = \omega_l^2 J dw_x / dx$ ,  $EI_b d^3 w_x / dx^3 = -P(1-\gamma) dw_x / dx + (K_{lb} - \omega_l^2 M) w_x$ 이다. 이들 경계조건을 무차원 변수를 이용하여 나타내면 다음 식들과 같다.

$$d^2 \eta / d\xi^2 - k_{ra} d\eta / d\xi = 0 \quad (10)$$

$$d^3 \eta / d\xi^3 + k_{la} \eta = 0 \quad (11)$$

$$d^2 \eta / d\xi^2 - \beta^{-n} j \theta C_i^2 d\eta / d\xi = 0 \quad (12)$$

$$d^3 \eta / d\xi^3 + \beta^{-n} p(1-\gamma) d\eta / d\xi - \beta^{-n} (k_{lb} - \mu \theta C_i^2) \eta = 0 \quad (13)$$

위의 식들에서  $k_{ra}$ ,  $k_{la}$ ,  $k_{lb}$ 는 무차원화된 스프링상수로서 그 내용은 식 (14)~(16)과 같고,  $\mu$ 와  $j$ 는 각각 우측단의 집중질량과 기둥 전체질량의 비(mass ratio) 및 무차원화된 질량관성모멘트(dimensionless mass moment of inertia)로서 식 (17), (18)과 같다. 그리고  $\theta$ 는 변단면 기둥을 동일지간의 등단면 기둥으로 변환한 경우 기둥 단면의 단면적  $A_m$ 과 좌측단에서의 단면적  $A_a$ 의 비로서 단면비  $\beta$ 의 향으로 표시되며, 변화 높이 및 변화폭 변단면인 경우 식 (19), 정방형 변단면인 경우 식 (20)과 같이 표현된다.

$$k_{ra} = K_{ra} l / (EI_a), \quad k_{la} = K_{la} l^3 / (EI_a), \quad k_{lb} = K_{lb} l^3 / (EI_a) \quad (14-16)$$

$$\mu = M / (\rho A_m l), \quad j = J / (\rho A_m l^3) \quad (17,18)$$

$$\theta = (\beta + 1) / 2, \quad \theta = (\beta^2 + \beta + 1) / 3 \quad (19,20)$$

### 3. 수치해석 에 및 고찰

그림 2는 축하중을 받는 기둥의 일반적인 하중-고유진동수 관계와 전형적인 두 가지 임계하중의 형태를 나타낸 것이다. 이 그림에서 축하중이 증가함에 따라 고유진동수가 감소하다가 제1고유진동수가 "0"이 되는 하중은 divergence형 임계하중  $p_d$ 로서 그림 1에 보인 기둥에서  $\gamma=0$ 인 모든 Euler기둥은 반드시 이러한 경향을 보인다. 또한 이 그림의 다른 곡선에서  $C_1 = C_2$ 인 지점의 하중은 flutter형 임계하중  $p_f$ 로서  $\gamma=1$ 인 경우에는 반드시 이러한 경향을 보이게 된다. 그러나 subtangential follower force가 작용하는 기둥에서는  $\gamma$ 에 따라 임계하중의 형태가 결정된다.

본 연구에서는 문헌 [13]에 수록된 수치해석방법을 이용하여 식 (10)~(13)의 경계조건을 적용, 식 (9)의 지배미분방정식으로부터 하중단계별 대상기둥의 최저차 2개의 무차원 고유진동수를 산출하였으며, 이러한 과정에서 반분법을 이용하여 최저차 임계하중을 결정하였다. 본 연구에서는  $C_1 \leq 0.01$ 인 축하중을 divergence

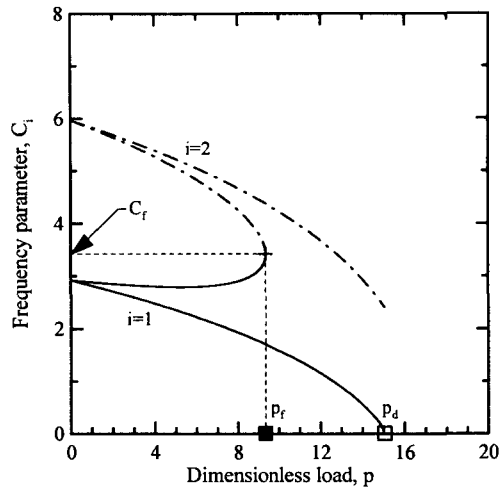


그림 2 하중-고유진동수 관계

형 임계하중  $p_d$ 로 결정하였고,  $C_2 - C_1 \leq 0.1$ 인 축하중을 flutter형 임계하중  $p_f$ , 그리고 이때  $(C_1 + C_2)/2$ 를 flutter 고유진동수  $C_f$ 로 결정하였다.

본 연구에서는 해석 대상기둥에 대한 단면변화형태, 단면비  $\beta$ , subtangential parameter  $\gamma$ , 질량비  $\mu$ , 무차원 질량관성모멘트  $j$  및 무차원 스프링상수  $k_{ra}, k_{ta}, k_{tb}$ 가 입력되면 최저차 임계하중( $p_d$  또는  $p_f$ )이 계산되도록 FORTRAN77어로 컴퓨터 프로그램을 작성하였다. 표 1은 본 연구결과를 검증하기 위하여 문헌의 flutter형 임계하중과 비교한 것으로 이 표에서 본 연구결과는 문헌의 결과와 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다. 그림 3~9는  $k_{ra} = k_{ta} = 10^8$ 인 경우 본 연구에서 산출된 결과를 나타낸 것이다.

그림 3 (a)~(c)는  $\mu=1.0, j=0.1$ 일 때 단면비  $\beta=0.9$ 와  $0.6$ 인 변화높이, 변화폭 및 정방형 변단면 기둥에서 subtangential parameter  $\gamma$ 의 변화에 따른 최저차 임계하중을 나타낸 것이다. 이 그림에서  $\gamma$ 가 "0"으로부터 일정값에 도달할 때까지 최저차 임계하중은 divergence형, 이후에는 flutter형으로 나타나며,  $\beta$  및  $k_{tb}$ 에 따라 임계하중의 형태가 변환되는  $\gamma$ 값이 달라짐을 알 수 있다.

표 1 본 연구와 문헌의 결과 비교

Geometry		Critical flutter load, $p_f$	
		Reference	This study
Uniform	$\beta=1.0, \gamma=0.5, \mu=1.0, j=0.1$ $k_{ra}=10^8, k_{ta}=10^8, k_{tb}=0$	14.20 Ref. [10]	14.19
Uniform	$\beta=1.0, \gamma=1.0, \mu=1.0, j=0.1$ $k_{ra}=10^8, k_{ta}=10^8, k_{tb}=10$	6.760 Ref. [10]	6.761
Depth taper	$\beta=0.9, \gamma=1.0, \mu=0.0, j=0.0$ $k_{ra}=10^8, k_{ta}=10^8, k_{tb}=0.0$	17.36 Ref. [5]	17.36
Breadth taper	$\beta=0.4, \gamma=1.0, \mu=0.0, j=0.0$ $k_{ra}=10^8, k_{ta}=10^8, k_{tb}=0.0$	14.81 Ref. [5]	14.81
Square taper	$\beta=0.6, \gamma=1.0, \mu=0.0, j=0.0$ $k_{ra}=10^8, k_{ta}=10^8, k_{tb}=0.0$	8.422 Ref. [5]	8.422

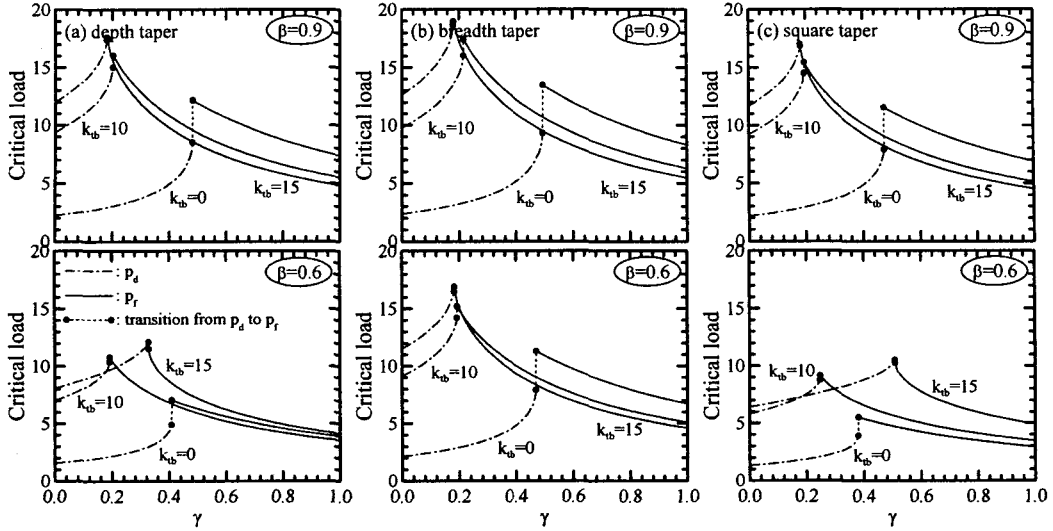


그림 3  $\gamma$ 에 따른 임계하중의 변화( $\mu=1.0, j=0.1$ )

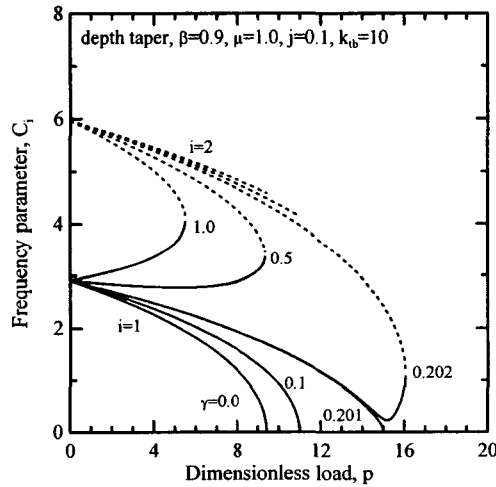


그림 4 하중-고유진동수 곡선의 예

그림 4는 변화율이 변단면,  $\beta=0.9, \mu=1.0, j=0.1, k_{ib}=10$ 인 경우  $\gamma=0.0, 0.1, 0.201, 0.202, 0.5$  및  $1.0$ 에 대한 하중-고유진동수 곡선을 나타낸 것이다.

그림 5, 6은  $j=0.1$ 인 경우  $\beta=0.9$ 와  $0.6$ 인 기둥에서 질량비  $\mu$ 에 따른 flutter형 임계하중  $p_f$ 와 고유진동수  $C_i$ 의 변화를 나타낸 것이다. 이 그림들에서  $k_{ib}=0$ 인 경우  $\gamma=1.0, \beta=0.6$ 의 변화율이 및 정방형 변단면 기둥 일 때를 제외하고는 질량비  $\mu$ 가 증가함에 따라 임계하중은 증가하며,  $\gamma=1.0, \beta=0.6$ 의 변화율이 및 정방형 변단면 기둥인 경우에는 각각  $\mu=0.2$  및  $0.5$  부근에서 최소값을 나타냄을 알 수 있다. 그리고  $k_{ib}=10$ 인 경우에는 일반적으로 일정  $\mu$ 값에서 최소값을 보인 후 증가하지만,  $\beta=0.6$ 인 정방형 변단면 기둥에서는  $\mu$ 가 0에서 2까지 증가함에 따라 임계하중은 항상 감소함을 알 수 있다.

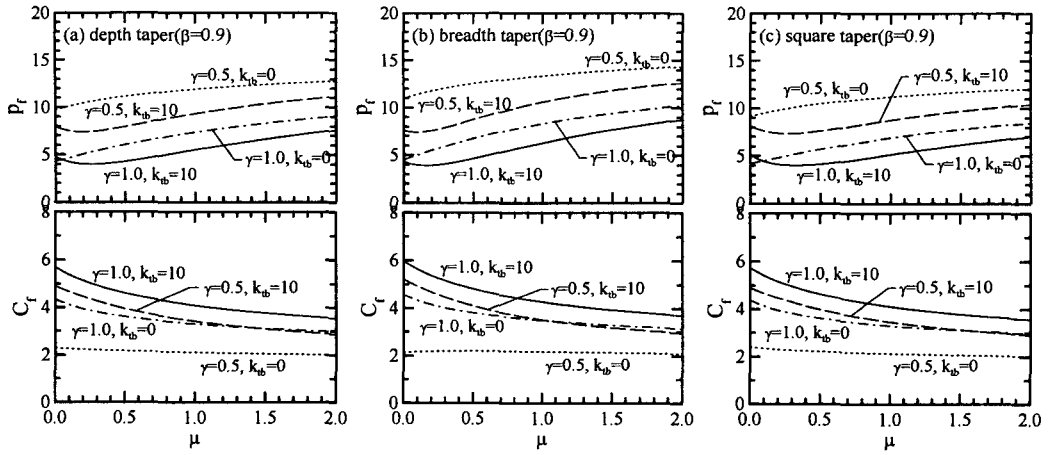


그림 5  $\mu$ 에 따른  $p_r$ 와  $C_r$ 의 변화( $j=0.1, \beta=0.9$ )

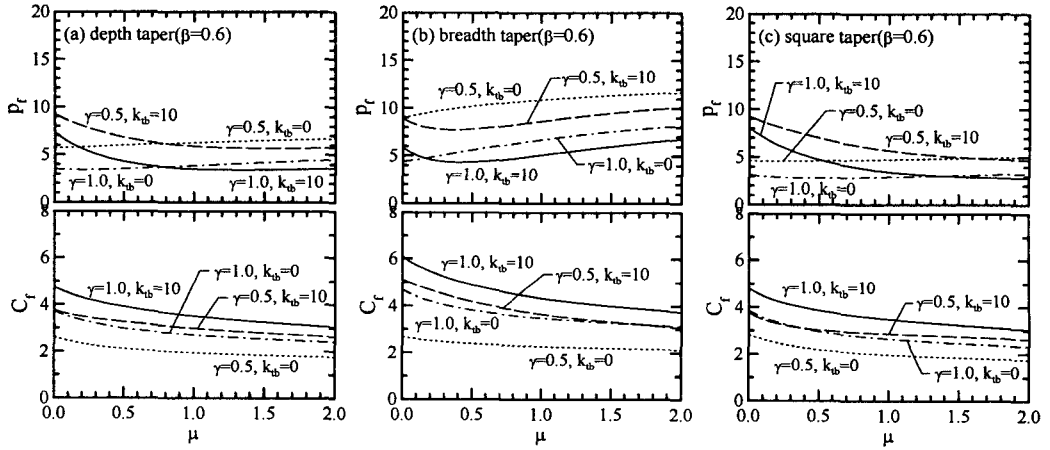


그림 6  $\mu$ 에 따른  $p_r$ 와  $C_r$ 의 변화( $j=0.1, \beta=0.6$ )

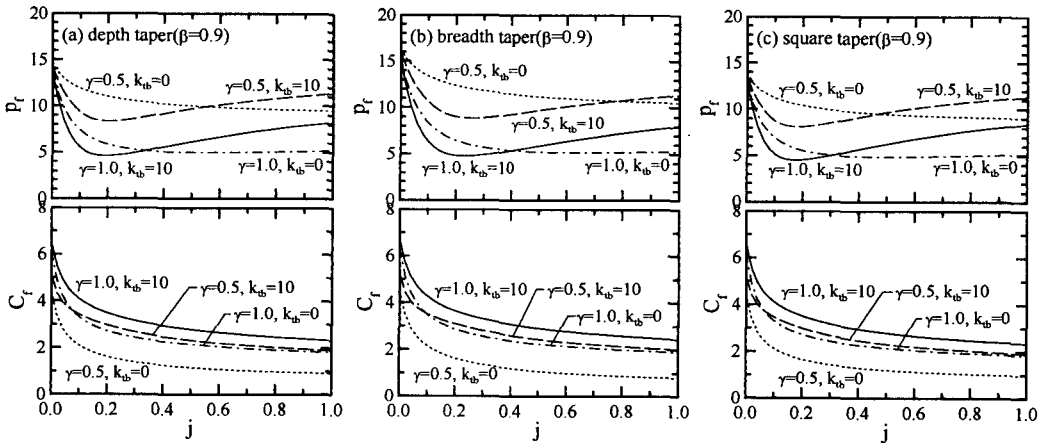


그림 7  $j$ 에 따른  $p_r$ 와  $C_r$ 의 변화( $\mu=1.0, \beta=0.9$ )

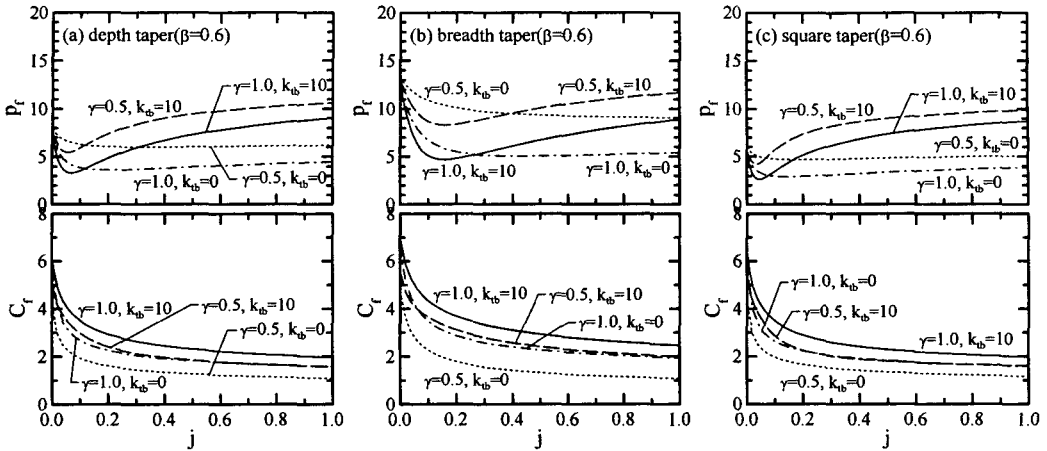


그림 8  $j$ 에 따른  $p_f$ 와  $C_f$ 의 변화( $\mu=1.0, \beta=0.6$ )

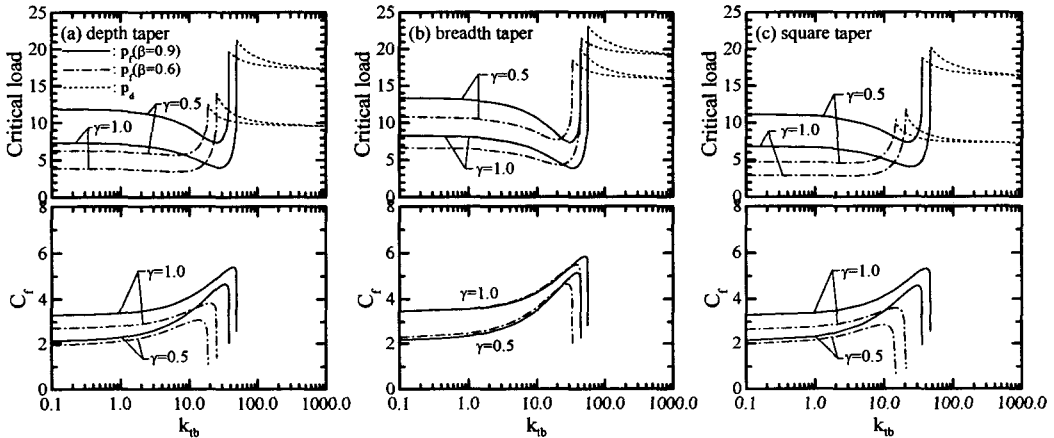


그림 9  $k_b$ 에 따른  $p_f$ 와  $C_f$ 의 변화( $\mu=1.0, j=0.1$ )

그림 7, 8은  $\mu=1.0$ 인 경우  $\beta=0.9$ 와  $0.6$ 인 기둥에서 무차원 질량관성모멘트  $j$ 에 따른 flutter형 임계하중  $p_f$ 와 고유진동수  $C_f$ 의 변화를 나타낸 것이다. 이 그림들에서  $\gamma=0.5, k_b=0.0$ 인 몇가지 경우를 제외하고,  $j$ 가 "0"으로부터 증가함에 따라 임계하중은 감소하다가 일정  $j$ 값에서 최소값을 보인 후  $j$ 가 증가함에 따라 임계하중이 증가함을 알 수 있다.

그림 5~8에서 다른 조건이 동일한 경우 질량비  $\mu$  및 무차원 질량관성모멘트  $j$ 가 증가하는 경우 flutter 고유진동수  $C_f$ 는 항상 감소함을 알 수 있다.

그림 9 (a)~(c)는  $\mu=1.0, j=0.1$ 인 경우  $\beta=0.9$ 와  $0.6$ 인 변화율이, 변화폭 및 정방향 변단면 기둥에서  $k_b$ 의 변화에 따른 임계하중과 flutter 고유진동수를 나타낸 것이다. 이 그림에서  $k_b$ 가 일정값에 도달하기 전까지 최저차 임계하중은 flutter형, 이후에는 divergence형임을 알 수 있다. 한편  $\beta$ 와  $\gamma$ 가 클수록 임계하중의 형태가 변화되는  $k_b$ 값이 큼을 알 수 있다.

#### 4. 요약 및 결론

이 논문에서는 일단은 회전 및 수직방향 스프링으로 지지되고, 타단은 집중질량과 수직방향 스프링을 갖는 선형 변단면 기둥의 임계하중(divergence형 및 flutter형)과 고유진동수를 산출하였으며, 타문헌의 결과와 비교하여 본 연구결과를 검증하였다. 해석결과로서 subtangential parameter, 단면비, 질량비, 무차원 질량관성모멘트 및 무차원 스프링상수에 따른 임계하중 및 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

#### 참 고 문 헌

1. V.V. Bolotin, *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Press, 1963.
2. H. Leipholz, *Stability of Elastic Systems*, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
3. M. Beck, "Die Knicklast des Einseitig Eingespannten Tangential Gedrückten Stabes," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 3, 1952, pp.225-228.
4. A. Pflüger, "Zur Stabilität des Tangential Gedrückten Stabes," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 35, 1955, p.191.
5. G.V. Sankaran and G.V. Rao, "Stability of Tapered Cantilever Columns subjected to Follower Forces," *Computers & Structures*, Vol. 6, 1976, pp.217-220.
6. P. Pedersen, "Influence of Boundary Conditions on the Stability of a Column under Non-conservative Load," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, 1977, pp.445-455.
7. B.N. Rao and G.V. Rao, "Applicability of the Static or Dynamic Criterion for the Stability of a Cantilever Column under a Tip-Concentrated Subtangential Follower Force," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 120, 1987, pp.197-200.
8. S.R. Kuo and Y.B. Yang, "Critical Load Analysis of Undamped Nonconservative Systems Using Bieigenvalue Curves," *AIAA Journal*, Vol. 32, 1994, pp.2462-2468.
9. H.P. Lee, "Divergence and Flutter of a Cantilever Rod with an Intermediate Spring Support," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 32, 1995, pp.1371-1382.
10. K. Sato, "Instability of a Clamped-Elastically Restrained Timoshenko Column Carrying a Tip Load, subjected to a Follower Force," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, 1996, pp.623-630.
11. B.J. Ryu, Y. Sugiyama and G.S. Lee, "The Influence of an Intermediate Support on the Dynamic Stability of Cantilevered Timoshenko Beams subjected to Subtangential Forces," *Proceedings of Asia-Pacific Vibration Conference*, Kyongju, Korea, 1997.
12. A.K. Gupta, "Vibration of Tapered Beams," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 111, 1985, pp.19-36.
13. S.J. Oh, B.K. Lee, I.W. Lee, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, 2000, pp.4871-4891.