

비선형 고유치 해석에 의한 정현형 아치의 좌굴 특성에 관한 연구

Buckling Characteristics of Shallow Sinusoidal Arches by Nonlinear Eigenvalue Analysis

윤 태 영* 김 승 덕**
Yun, Tae-Young Kim, Seung-Deog

ABSTRACT

In this study, we choose the sinusoidal shaped arch with pin-ends subjected to sinusoidal distributed excitation to investigate the fundamental mechanism of the dynamic instability. We derive the nonlinear equations of motion to investigate the instability phenomenon of arch structures and identify the buckling characteristics of sinusoidal shaped arch structures through the nonlinear eigenvalue analysis with discreted equations of motion by Galerkin's method.

We examine that phenomenons which direct snapping and indirect snapping with backbone curves to understand occurrence paths of the dynamic buckling.

1. 서 론

아치는 곡률을 가진 곡선구조 형태로서 외부하중에 대하여 효과 높게 저항할 수 있는 형태저항형 구조물이며, 구조물의 곡률을 이용하여 주로 압축력으로 힘을 전달할 수 있게 한 구조시스템이다. 아치가 가늘고 길어질수록 그 강도는 좌굴강도에 의해 결정되고, 또한 좌굴강도는 좌굴형상에 의해 지배된다. 따라서 좌굴형상 및 좌굴강도의 해석, 즉 구조불안정 문제의 해결은 아치의 설계강도 결정에 중요한 인자이고, 이는 기하학적 비선형 문제가 된다.

이러한 이유로 아치의 구조설계에서는 대변형 또는 유한변형이론에 의해 구조기동의 비선형적 특성을 파악해야 할 경우가 많다. 특히 외력 자체가 동적 특성이 강할 경우에는 동적 비선형 문제를 다루어야 한다.

셀형 구조물의 동적불안정은 외력과 구조물 형상에 따라 직접좌굴(direct snapping) 및 간접좌굴(indirect snapping)등, 매우 복잡한 거동을 하는 것이 일반적이다. 그 중에서도 대칭변형모드와 비대칭변형모드와의 연성(coupling) 작용에 의한 간접좌굴 문제는 초기조건에 민감하게 반응하며, 비선형성이 강하게 나타나는 것이 특징이다.

본 연구에서는 대공간 구조물의 가장 기초적인 내용을 포함하는 아치 구조물을 대상으로 동적 불안정의 기본 메커니즘을 파악하기 위하여 양단 핀으로 고정된 정현형 아치(sinusoidal shaped arch)가 정현형 분포하중(sinusoidal distributed excitation)을 받았을 때의 얇은 아치를 대상으로 한다. 우선 정적 비선형 해석을 실행하여 뚫좌굴(snap-through) 및 분기좌굴(bifurcation)의 경계를 파악한다. 정적 해석결과를 기준 자료로 하

* 정회원 · 세명대학교 건축공학과 석사과정

** 정회원 · 세명대학교 건축공학과 부교수

여 비선형 고유치 해석을 실행하고, 직접좌굴 및 간접좌굴에 대한 경계를 파악한다. 즉 얇은 아치 구조물의 좌굴특성을 고유치 해석을 통하여 좌굴이 일어나는 현상을 알아본다.

2. 비선형 운동방정식

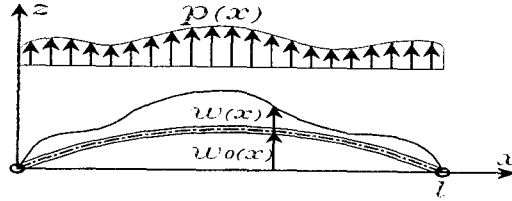


그림 1 아치의 기하학적 현상

그림 1에서와 같이 직교좌표계를 사용하여 아치의 초기형상을 $w_0(x)$, x 방향 및 z 방향의 변위를 $u(x)$, $w(x)$ 로 나타내면, 아치의 비선형 운동방정식은 식(1)과 같이 얻어진다.

$$EI w_{,xxxx} - \frac{EA}{2l} \int_0^l [(w_{,x})^2 + 2w_{0,x} w_{,x}] dx \cdot (w_{0,xx} + w_{,xx}) + c w_{,t} + \rho A w_{,tt} - p = 0 \quad (1)$$

여기서, E : 탄성계수, A : 단면적, I = 단면2차모멘트, c = 감쇠정수, ρ = 밀도이다.

얇은 아치의 일반화된 좌굴해석을 위하여 식(2)와 같은 무차원 파라미터를 도입한다.

$$k = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad \eta = \frac{w}{k}, \quad \eta_0 = \frac{w_0}{k}, \quad \xi = \frac{\pi}{l} x, \quad q = \frac{p}{EI k} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \quad (2)$$

$$\tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = \frac{C}{\rho A \omega_0}$$

윗 식의 파라미터를 식(1)에 대입하여 정리하면 식(3)과 같은 무차원화된 비선형 운동방정식이 얻어진다.

$$\eta_{,tttt} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [(\eta_{,\xi})^2 + 2\eta_{0,\xi} \eta_{,\xi}] d\xi \cdot (\eta_{0,\xi\xi} + \eta_{,\xi\xi}) + \gamma \eta_{,t} + \eta_{,tt} - q = 0 \quad (3)$$

3. Galerkin법에 의한 이산화 운동방정식

무차원화 비선형 방정식인 식(3)의 해를 얻기 위하여 Galerkin법을 적용하여 이산화한다. Galerkin법의 적용을 정리하면 다음과 같다.

$$1) \text{ 변수를 시간 및 공간에 관하여 분리 : } \eta = \sum D_n(\tau) f_n(\xi) \quad (4)$$

$$2) \text{ 기초 방정식에 대입 : } g(\eta) = 0 \quad (5)$$

$$3) \text{ 이산화 : } \int_0^\pi g(\eta) f_r(\xi) d\xi = 0 \quad (6)$$

본 연구에서는 초기형상과 작용하는 분포하중이 모두 정현형(正弦型)일 때를 대상으로 한다. 초기형상, 변위, 하중을 Fourier급수를 이용하여 정의하면 식(7)과 같다.

$$\eta_0 = H \sin \xi, \quad \eta = \sum_{n=1}^N (-D_n) \sin n\xi, \quad q = -\Lambda \sin \xi \quad (7)$$

여기에서 변위 및 하중의 방향을 역방향으로 하기 위하여 '-'를 추가하였다. 이산화 과정에서 각 함수의 직교성(orthogonality)과 Galerkin법을 이용하면 일반화 좌표 $D_n(\tau)$ 를 변수로 하는 비선형 운동방정식이 식(8)과 같이 구해진다.

$$F_r(D_1, \dots, D_N, \Lambda) = \sum_{n=1}^N n^4 D_n \delta_{nr} + \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^N n^2 D_n^2 - 2HD_1 \right) \left(-H\delta_{1r} + \sum_{n=1}^N n^2 D_n \delta_{nr} \right) \\ + \gamma \sum_{n=1}^N \dot{D}_n \delta_{nr} + \sum_{n=1}^N \ddot{D}_n \delta_{nr} - \Lambda \delta_{1r} = 0 \quad (8)$$

여기서, δ_{nr} 는 Kronecker symbol, N 은 자유도 수이다.

4. 정적 비선형 해석

얇은 아치의 뿔좌굴과 분기좌굴의 경계를 파악하기 위해 식(8)에 $n=1, 2$ 를 대입하고, 관성항 및 감쇠항을 제거하여 2자유도계의 정적 비선형 방정식을 구하면 다음과 같이 된다.

$$F_1(D_1, D_2, \Lambda) = \left(1 + \frac{1}{2} H^2 \right) D_1 - \frac{3}{4} HD_1^2 - HD_2^2 + D_1 D_2^2 + \frac{1}{4} D_1^3 - \Lambda = 0 \quad (9)$$

$$F_2(D_1, D_2, \Lambda) = 16D_2 - 2HD_1 D_2 + D_1^2 D_2 + 4D_2^3 = 0 \quad (10)$$

수치해석적 방법을 이용하여 형상파라미터 H 의 변화에 의한 정적 불안정 현상을 조사한다. 먼저 완전형상(perfect shape)인 경우에 형상파라미터 H 의 변화에 따른 하중-변위 곡선을 그림 2에 나타낸다. 일반화 좌표 D_1 을 기준으로 하여 구하였고, 그림 중 점선은 선형해석의 결과이고, 실선이 $H=1, 3, 5, 7$ 인 경우를 대상으로 비선형 해석한 결과이다. 즉 증분형 접선강성방정식을 이용하여 변위 증분법에 의한 수치해석을 하였고, 이때 변위증분 간격은 극한점 변위를 100등분한 값을 채택하였다. 해석모델이 정현형 아치이고, 가력하중이 정현형 분포하중이므로 일반화 좌표 D_2 는 여기서는 나타나지 않는다. $H=1$ 인 경우에는 상승하는 평형경로를 보이며 뿔좌굴이 나타나지 않는다. 그러나 $H=3, 5, 7$ 인 경우에 하중이 임계값에 도달하면 갑자기 점프하여 아래로 처지는 불안정한 거동을 보인 후 새로운 평형위치로 옮겨 안정된 상태로 다시 상승하는 뿔좌굴(snap-through) 현상이 나타나는 것을 알 수 있다.

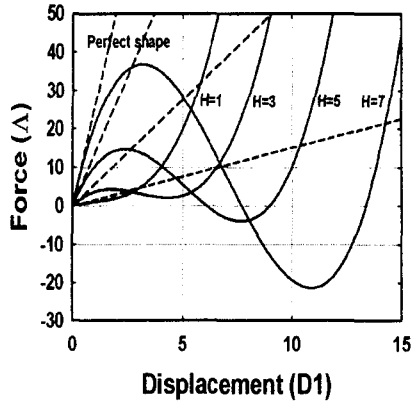
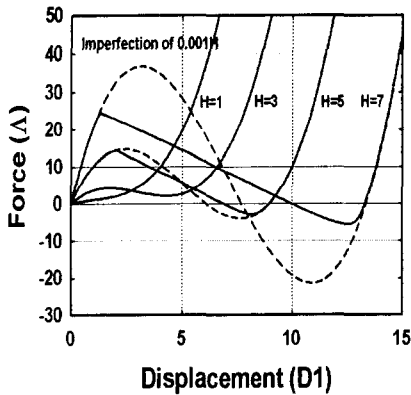
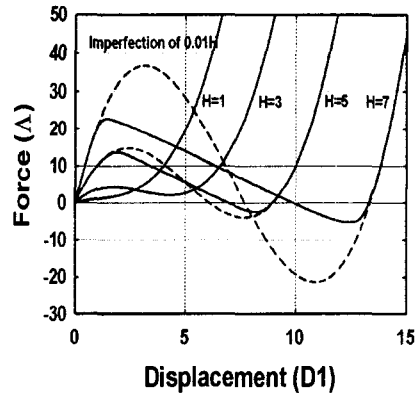


그림 2 완전형상의 평형경로

그러나 그림 3에서와 같이 형상초기불완전을 고려한 경우, $H=5,7$ 에서는 분기점의 발생과 함께 완전형상의 평형경로와는 다른 경로로 움직이면서 분기좌굴(bifurcation)을 나타낸다. 여기서 형상초기불완전으로는 D_2^0 값을 조정하여 대입하였고, 그림 3.a는 $D_2^0 = 0.001H$ 인 경우이고, 그림 3.b는 $D_2^0 = 0.01H$ 인 경우이다. 형상초기불완전이 증가할수록 분기점에서 보다 완만한 곡선을 나타내고 있다.



(a) $D_2^0 = 0.001H$



(b) $D_2^0 = 0.01H$

그림 3 초기불완전이 있는 경우의 평형경로

일반화 좌표 D_2 의 발생양상을 알기 위해 형상초기불완전을 고려한 경우에 대해서 D_1 과 D_2 를 하중변화에 따라 나타내면 그림 4, 5와 같다. $H=1,3$ 인 경우에는 D_2 가 하중변화와 관계없이 나타나지 않으나, $H=5,7$ 에서는 분기점 근방에서 비대칭 변위모드인 D_2 가 발생하고, 이에 따라 D_1 의 대칭변위모드가 기존의 평형경로에서 분기함을 알 수 있다. 형상초기불완전량 D_2^0 가 증가할수록 분기점 근방에서 D_2 모드가 보다 완만하게 증가함을 알 수 있다.

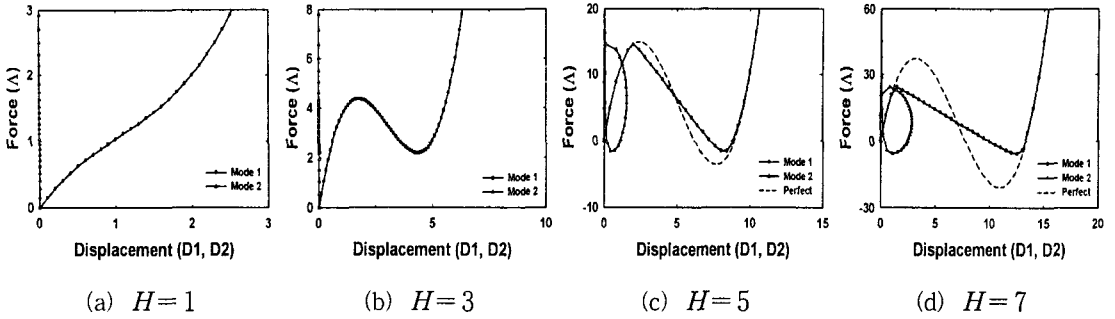


그림 4 $D_2^0 = 0.001H$ 인 경우의 D_1 및 D_2

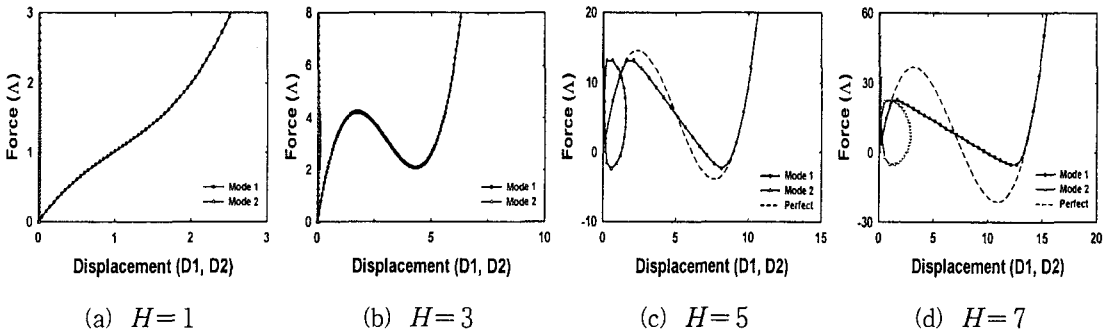


그림 5 $D_2^0 = 0.01H$ 인 경우의 D_1 및 D_2

다음은 뿔좌굴(snap-through) 현상의 이행과정을 알아본다. 완전형상일 경우, 대칭모드인 D_1 을 이용해 각 증분 하중별로 아치의 형상 변화과정을 나타내면 그림 6과 같다. 여기서 실선은 아치의 초기형상이고, 점선은 안정평형 궤도에서의 거동을 나타낸다. 일점쇄선은 첫 번째 극한점에서 두 번째 극한점까지의 불안정 궤도상의 경로이며, 이점쇄선은 두 번째 극한점 이후부터 뿔좌굴에 의한 새로운 평형점까지의 궤도상의 거동이다. 이 그림은 일점쇄선에서 점선까지 점프하면서 새로운 안정 평형상태로 이동하는 뿔좌굴을 나타내고 있다.

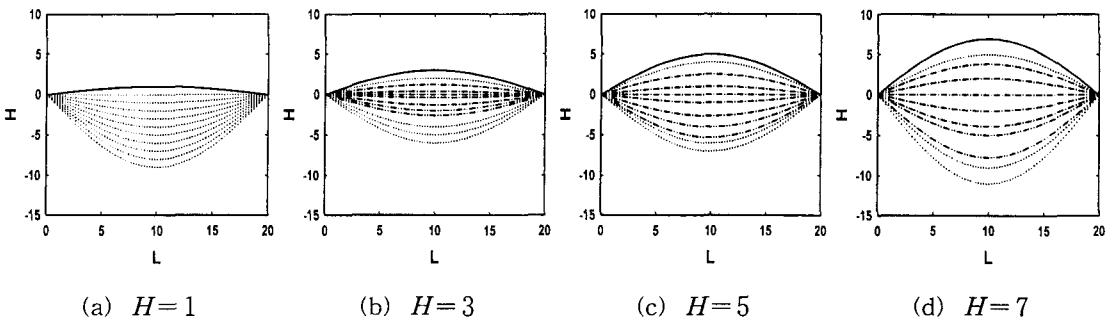
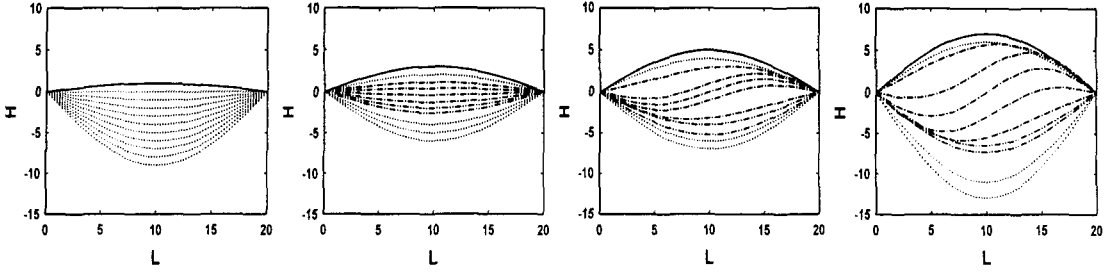


그림 6 완전형상일때의 좌굴현상



(a) $H=1$

(b) $H=3$

(c) $H=5$

(d) $H=7$

그림 7 초기불완전이 있는 경우의 좌굴현상 ($D_2^0 = 0.001H$)

그림 7에서는 초기불완전이 있는 경우, 대칭모드 D_1 과 비대칭모드 D_2 를 이용해 불안정 상태로의 이행과정을 알아본다. $H=1, 3$ 인 경우는 완전형상일때와 비슷한 거동을 나타내고 있으나, $H=5, 7$ 인 경우는 D_2 모드의 간섭으로 인하여 일점좌선의 형상이 완전형상일때의 형상과는 다른 형태로 거동하는 것을 볼 수 있다. 즉 snapping이 일어나는 과정이 일점좌선 부분에서 대칭 하중모드와 직교하는 비대칭 모드가 출현하여 평형계도에서 분기(bifurcation)되는 현상을 나타내고 있다.

5. 비선형 고유치 해석

앞은 정현형 아치에 대해서 형상파라미터 H 의 변화에 따른 고유진동수의 비선형 특성을 조사해본다. 하중변화에 따른 고유치의 변화를 알아보기 위해서는 각 증분구간에서 다음의 고유치 문제를 풀면 된다.

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 0 \quad (11)$$

여기서 \mathbf{K} 는 제1섭동식에 의한 접선강성행렬, \mathbf{M} 은 질량행렬이다.

하중레벨에 따라 고유값의 변화를 나타내는 완전형상의 Backbone curve는 그림 8에, 불완전형상의 Backbone curve($D_2^0 = 0.001H$)는 그림 9에 각각 나타낸다. 고유진동수가 0에 접근하는 하중 레벨이 정적 비선형 해석에서의 $P - \delta$ 곡선의 극한점이 된다. $H=1$ 일 때 가력초기에는 비선형의 효과로 인하여 softening 현상을 나타내고, 하중레벨이 하중-변위 곡선의 변곡점을 넘어서면서 hardening 현상을 나타낼 수 있다. $H=3$ 일 때는 대칭모드인 Mode-1의 진동수가 softening 현상과 함께 먼저 0에 도달하면서 대칭 변형모드에 의한 직접좌굴(direct snapping) 현상을 나타낸다. 이는 정적해석에서 뒤편좌굴 하중과 일치함을 알 수 있다(그림 2). $H=4$ 일 때는 Mode-1과 Mode-2가 교차하면서 진행된다. 이때 Mode-2는 하중이 증가하다가 Mode-1이 0에 도달했을 때 감소하기 시작한다. $H=5$ 일 때는 Mode-1보다 Mode-2의 진동수가 먼저 0에 도달하며 비대칭 변형모드에 의한 간접좌굴(indirect snapping) 현상을 일으킨다. 이는 정적해석에서의 분기좌굴 하중과 일치한다. $H=6$ 일 때는 비대칭모드가 대칭모드와 교차하지 않고 먼저 0에 도달함을 나타낸다. $H=4$ 이하인 경우에는 하중이 0보다 크게 나타나는 반면, 간접좌굴(indirect snapping)이 일어나는 $H=5$ 이상인 경우에는 하중이 0보다 작은 '-'값으로 떨어지는 것을 볼 수 있다.

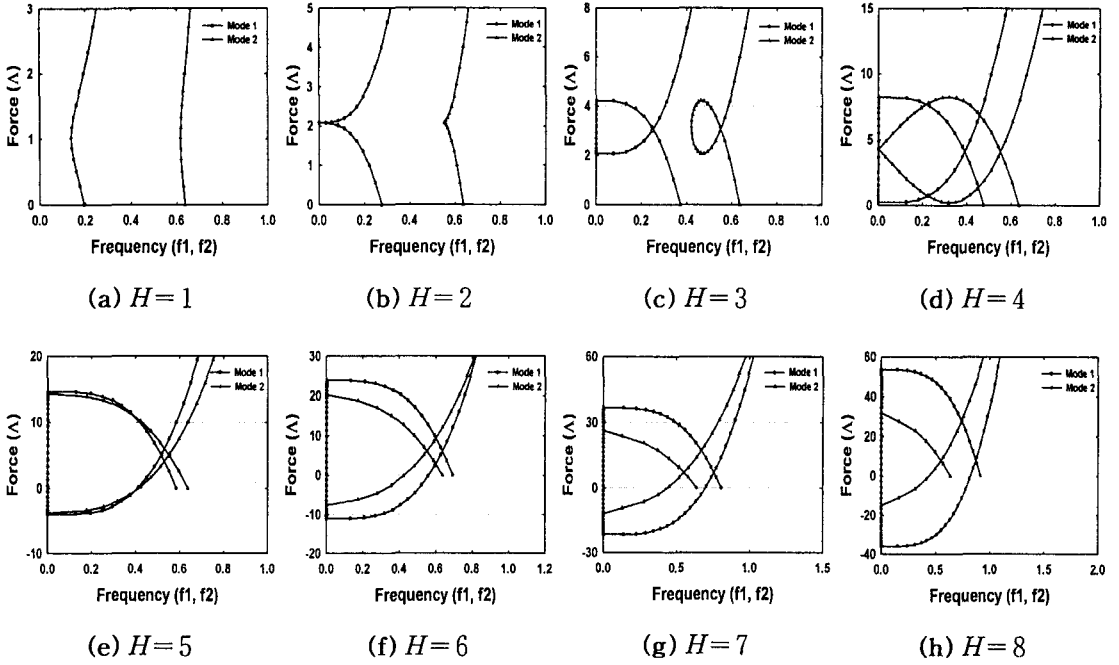


그림 8 완전형상의 Backbone curve

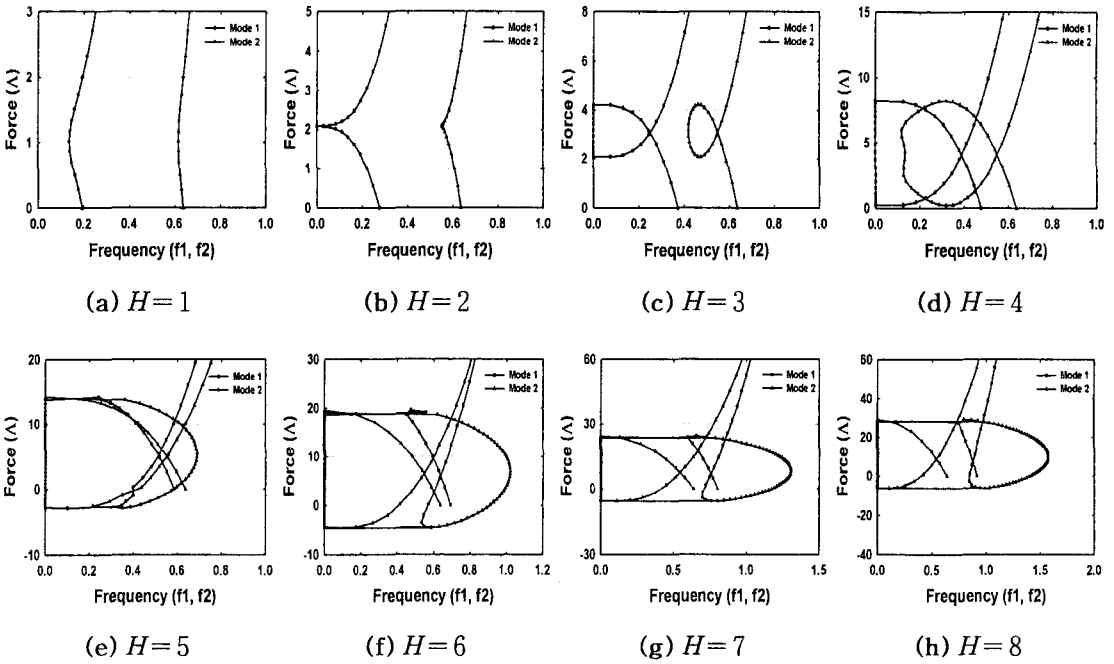


그림 9 불완전형상의 Backbone curve ($D_2^0 = 0.001H$)

형상초기불완전의 도입에 의한 변화를 살펴보면, $H=1\sim 3$ 일 때는 완전형상일 때와 거의 일치하는 현상을 나타낸다. $H=5$ 일 때부터는 완전형상일때의 해석결과와는 다른 분기점 근방에서 많은 변화를 나타내며 진동하는 것을 볼 수 있다. 특히, $H=5$ 인 경우에는 비대칭모드가 0에 가까워지면 대칭모드의 궤도가 갑자기 바뀌며 진동수가 0이 되면서 역할을 못하는 반면, 비대칭 모드는 대칭모드가 0에 가까워진 시점에서 그 역할을 대신하면서 나타나기 시작하여, 비대칭 모드로 진동을 하면서 증폭이 커지는 것을 볼 수 있다(그림 9.e). $H=6$ 일 때는 비대칭 모드가 대칭모드와 교차하지 않고 먼저 0에 도달하며 진동수가 0이 되는 시점에서 머무르다가 대칭모드가 0에 도달하면 갑자기 진동수가 커지면서 대칭모드의 궤적을 대신하면서 비대칭 모드로 진동을 증폭시키며 불안정 현상이 일어난다.

6. 결 론

본 연구에서는 아치 구조물의 불안정 현상을 파악하기 위하여 비선형 운동방정식을 유도하고, 이를 Galerkin법에 의해 이산화시킨후, 비선형 고유치 해석을 통하여 정현형 아치의 좌굴 특성에 관하여 고찰하였다. 즉 동적좌굴의 발생경로를 파악하기 위하여 Backbone curve를 이용하였고, 대상 모델은 정현형 분포하중(sinusoidal distributed excitation)을 받는 핀지지 정현형 아치(sinusoidal shaped arch)로 하였다. 비선형 고유치 해석에 대한 결과는 다음과 같다.

- 1) 정적 비선형 해석을 통하여, $H\geq 3$ 인 경우는 뽕좌굴(snap-through) 현상을 $H\geq 5$ 인 경우에는 분기좌굴(bifurcation) 현상이 나타난다.
- 2) 비선형 고유치 해석에서, $H=2$ 를 초과한 경우 대칭모드인 Mode-1의 진동수가 softening현상과 함께 먼저 0에 도달하면서 대칭 변형모드에 의한 직접좌굴(direct snapping)현상을 나타내고, $H=4$ 를 초과할 경우에는 Mode-1보다 Mode-2의 진동수가 먼저 0에 도달하며 비대칭 변형모드에 의해 간접좌굴(indirect snapping)현상을 일으킨다.
- 3) 형상초기불완전을 도입하면 분기점 근방에서 안정화 이행 경로가 달라진다. 특히, $H=5$ 이상인 경우 대칭 모드가 0이 되는 시점에서 비대칭 모드가 출현하여 진동을 증폭시키며 불안정 현상이 일어난다.

참고 문헌

1. Fulton, R. E. and Barton, F. W., "Dynamic buckling of shallow arches," *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol.97, No.EM3, June, 1971, pp.865-877
2. 金勝德, 扁平構造物の動的安定に関する研究, 東京大學博士學位論文, 1990.
3. Kim, S. D., Kang, M. M., Kwun, T. J. and Hangai, Y., "Dynamic Instability of Shell-Like Shallow Trusses Considering Damping," *Computers & Structures*, Vol. 64, No. 1-4, 1997, pp.481-489.
4. 김승덕, 박지윤, 권택진, "얇은 정현형 아치의 불안정 거동에 관한 연구(1)-형상특성에 따른 정적좌굴의 분류," 한국전산구조공학회 논문집, 제 12권 3호, 1999, pp.407-415.
5. 김승덕, 박지윤, 권택진, "얇은 정현형 아치의 불안정 거동에 관한 연구(2)-스텝하중에서의 동적좌굴 특성," 한국전산구조공학회 논문집, 제 12권 3호, 1999, pp.417-426.