

회전자유도를 갖는 혼합 4절점 쉘요소의 특성

Characteristics of a Hybrid 4-Node Shell Element with Drilling Degrees of Freedom

임 장 근 *
(Lim, Jang-keun)

김 정 룡 **
(Kim, Jung-ryung)

ABSTRACT

In order to analyze shell structures more accurately and effectively, a hybrid 4-node quadrilateral shell element is formulated. The element includes the drilling degrees of freedom and the independent parameter terms of the stress resultants are appropriately selected to overcome some of the shortcomings of the standard 4-node quadrilateral elements. In order to show the accuracy and convergent characteristics of the proposed shell element, three numerical examples are analyzed and the results are compared with the existed. As a result of this study, following conclusions are obtained.

- (1) Analysis results by the proposed element are less sensitive to the element geometric distortion.
- (2) The proposed element does not produce any spurious zero-energy modes

1. 서 론

일반 쉘구조물을 쉘요소로 모델링할때에는 찌그러진(distorted)요소의 사용이 불가피하다. 더욱이 적응해석(adaptive analysis)과정에서 요소의 세분화가 자동적으로 이루어 질 때에는 많은 찌그러진 요소가 생성된다. 그러나 기존 4절점 쉘요소들은 이와 같이 찌그러진 요소망에 대하여 믿을수 있는 해석결과를 주지 못한다. 즉 간단한 3절점이나 4절점 쉘요소는 일반적으로 잉여모드(spurious mode)또는 제로에너지모드, 잠김현상(locking phenomena), 요소의 찌그러짐과 불변특성(invariance properties)등에 민감하기 때문에 해석결과의 신뢰성과 정확도가 크게 저해된다. 또한, 표준 3절점이나 4절점 등매개변수(isoparametric)요소들도 대부분의 실제적인 문제에서 강성과잉현상을 보이기 때문에 정확하고 믿음직한 해석결과를 얻기가 어렵다.

따라서 이들 요소의 결함을 극복하기 위한 연구가 계속 진행되어 왔으며 지금까지의 연구결과를 종합하면 다음과 같다. 즉 첫번째는 응력을 가정한 혼합요소(hybrid element)⁽¹⁾를 사용하는 방법이고 두번째는 감차적분법^(2,3), 세번째는 비적합요소^(4,5) (incompatible element)를 사용하는 방법이다.

평면막요소(membrane element)의 단점을 없애는 또하나의 다른 방법은 절점의 회전자유도(rotational or drilling degrees of freedom)을 고려하여 요소를 구성하는 방법이다. 이와 같이 회전자유도를 고려하는 방법은 초기에 변위함수를 3차로 가정하여 사용하여 왔으나 이 구성법이 심각한 결함을 갖게되어⁽⁶⁾ 최근에는 2차 변위 함수로써 회전자유도를 고려하는 구성법을 사용하여 많은 성과를 얻고 있다.^(7, 11)

이 방법은 각절점에서 2개의 변위자유도만을 가지는 8절점 등매개 변수요소의 강성행렬을 구한다음 요소의 변 중앙절점 변위자유도를 구성절점(corner node)에서의 변위와 회전자유도로 표현하여 이를 소거함으로써 12개의 자유도를 가지는 4절점 요소를 얻는다. MacNeal 과 Harder⁽⁹⁾ 는 이와 같은 방법과 선택 및 감차

* 정회원, 한양대학교 기계공학부 교수

** 한양대학교 기계설계학과 석사과정

적분(selective and reduced integration)으로 4절점 평면 막요소를 개발하였다. Yunus등⁽¹⁰⁾은 이 방법을 쓰고 응력을 가정한 혼합 막요소를 개발하였고 Aminpour^(11,12)는 이 방법을 쓰고 응력을 가정한 혼합 쉘요소를 개발하였다.

본 논문에서는 회전자유도를 가지고 응력을 가정한 4절점의 혼합사변형 쉘요소를 제안한다. 이 요소는 8절점을 기준하여 구성되는 종전의 방법에 비하여 4절점을 기준하여 강성행렬이 유도되기 때문에 구성방법이 직접적이고 계산시간이 크게 절약된다.

2. 혼합형 유한요소법

응력을 가정하는 혼합형 유한요소법(hybrid finite element method)은 Hellinger Reissner의 변분원리로부터 유도된다.^(11,12)

$$\pi = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T D \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \sigma^T \mathcal{L}[u] d\Omega - \int_{\Gamma} u^T t_0 d\Gamma \quad (1)$$

식 (1)에서 D는 재료의 컴플라이언스 행렬(compliance Matrix)이고 σ 는 응력, u 는 변위 그리고 t_0 는 주어진 트래션 벡터이다. 그리고 행렬 \mathcal{L} 는 미분연산행렬로서 변위와 변형을 관계를 의미한다. Ω 는 요소의 영역이고 Γ 는 t_0 가 지정된 요소의 경계를 의미한다.

식 (1)에서 응력장 σ 와 변위 u 는

$$\sigma = P\beta \quad (2)$$

$$u = Nq \quad (3)$$

로 가정된다. 이들식에서 행렬 P 와 N 은 각각 응력과 변위의 보간함수로 구성되고 벡터 β, q 는 응력의 미정계수와 절점 변위벡터가 된다.

식 (2), (3)을 식 (1)에 대입하고 미정계수 β 에 관해 $\delta\pi = 0$ 의 조건을 구하면 다음식이 성립한다.

$$\beta = H^{-1}Tq \quad (4)$$

$$H = \int_{\Omega} P^T DP d\Omega \quad (5)$$

$$T = \int_{\Omega} P^T \mathcal{L}[N] d\Omega \quad (6)$$

식 (4)를 식 (1)에 대입하고 다시 절점 변위 벡터 q 에 관해 $\delta\pi = 0$ 의 조건을 구하면

$$Kq = F \quad (7)$$

$$K = T^T H^{-1}T \quad (8)$$

$$F = \int_{\Gamma} N^T t_0 d\Gamma \quad (9)$$

가 되어 요소의 강성행렬 K 와 절점력 벡터 F 를 구할 수 있다.

3. 4절점 사변형 쉘 요소

3.1 회전 자유도의 도입

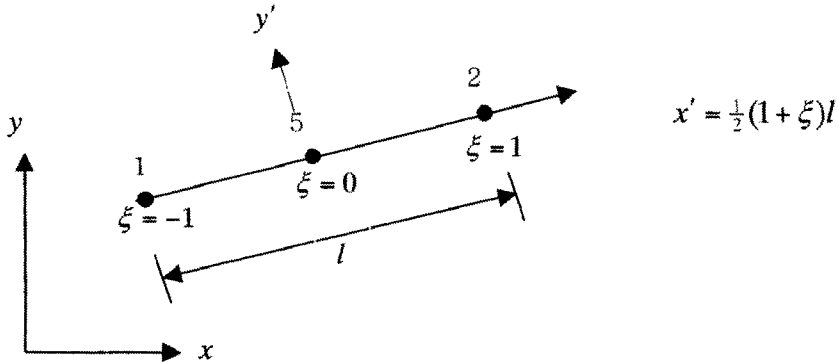


Fig. 1 Beam element with two nodes

사변형요소의 한 변을 Fig.1과 같이 2절점 보로 생각할 때 횡방향 처짐 v' 는 다음과 같이 2차식으로 가정할 수 있다.

$$v' = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 \quad (10)$$

단, ξ 는 보의 축방향 무차원 좌표계이다.

한편 Z축에 관한 회전 θ_z 는 γ' 을 보의 전단 변형률이라고 할 때

$$\theta_z = \frac{\partial v'}{\partial x'} - \gamma' \quad (11)$$

로 표현된다. 식 (10),(11)의 미지수 a_0, a_1, a_2, γ' 는 두 개의 절점변위 v'_1, v'_2 와 두 개의 절점회전각 θ_{z1}, θ_{z2} 에 의해서 결정된다.

$$v' = \frac{1}{2}(1-\xi)v'_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)v'_2 - \frac{l}{8}(1-\xi^2)(\theta_{z2} - \theta_{z1}) \quad (12)$$

$$\theta_z = \frac{1}{2}(1-\xi)\theta_{z1} + \frac{1}{2}(1+\xi)\theta_{z2} \quad (13)$$

$$\gamma' = \frac{1}{l}(v'_2 - v'_1) - \frac{1}{2}(\theta_{z2} + \theta_{z1}) \quad (14)$$

그리고 보의 축방향 변위 u' 는

$$u' = \frac{1}{2}(1-\xi)u'_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)u'_2 \quad (15)$$

로 가정한다.

따라서 Fig.1을 Fig.2의 8절점 사변형 요소의 한변이라고 생각하면

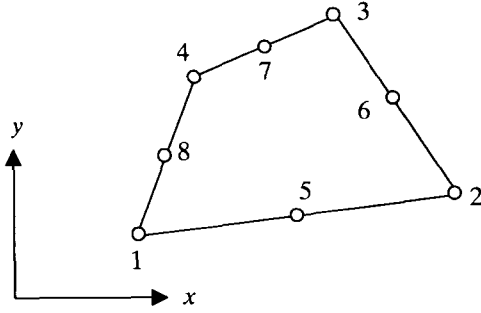


Fig.2 Isoparametric 8-node quadrilateral element

변위 \$u, v\$ 과 회전각 \$\theta_z\$ 는 \$x, y\$ 좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(1-\xi)u_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)u_2 + \frac{\Delta y_1}{8}(1-\xi^2)(\theta_{z2} - \theta_{z1}) \\ v &= \frac{1}{2}(1-\xi)v_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)v_2 - \frac{\Delta x_1}{8}(1-\xi^2)(\theta_{z2} - \theta_{z1}) \\ \theta_z &= \frac{1}{2}(1-\xi)\theta_{z1} + \frac{1}{2}(1+\xi)\theta_{z2} \end{aligned} \quad (16)$$

단, \$\Delta x_1 = x_2 - x_1\$, \$\Delta y_1 = y_2 - y_1\$ 이다.

식 (16)의 변위 함수는 막요소구성에 사용된다. 그러나 굽힘에 대해서도 동일한 과정을 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}(1-\xi)w_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)w_2 - \frac{\Delta y_1}{8}(1-\xi^2)(\theta_{x2} - \theta_{x1}) + \frac{\Delta x_1}{8}(1-\xi^2)(\theta_{y2} - \theta_{y1}) \\ \theta_x &= \frac{1}{2}(1-\xi)\theta_{x1} + \frac{1}{2}(1+\xi)\theta_{x2} \\ \theta_y &= \frac{1}{2}(1-\xi)\theta_{y1} + \frac{1}{2}(1+\xi)\theta_{y2} \end{aligned} \quad (17)$$

식 (16), (17)에서 변위성분 \$u, v, w\$ 는 2차식으로 표현되고 회전각 \$\theta_x, \theta_y, \theta_z\$ 는 1차식으로 표현된다. 이제 4절점 사변형 요소를 구성하기 위하여 Fig. 2 의 8절점 사변형 요소에서 변 1의 중앙절점 5의 자유도들 식(16), (17)에서 \$\xi = 0\$ 을 대입하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} u_5 &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{\Delta y_1}{8}(\theta_{z2} - \theta_{z1}) \\ v_5 &= \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{\Delta x_1}{8}(\theta_{z2} - \theta_{z1}) \\ w_5 &= \frac{1}{2}(w_1 + w_2) - \frac{\Delta y_1}{8}(\theta_{x2} - \theta_{x1}) + \frac{\Delta x_1}{8}(\theta_{y2} - \theta_{y1}) + \frac{\Delta x_1}{8}(\theta_{y2} - \theta_{y1}) \\ \theta_{x5} &= \frac{1}{2}(\theta_{x1} + \theta_{x2}) \\ \theta_{y5} &= \frac{1}{2}(\theta_{y1} + \theta_{y2}) \end{aligned} \quad (18)$$

같은 방법으로 Fig. 2에 보인 8절점 사변형요소에서 변 2, 3, 4의 중앙절점 6, 7, 8의 자유도를 식 (18)과 유사한 형태로 얻을 수 있다.

이제 8절점 사변형요소의 형상함수가

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta) \end{aligned}$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) \quad (19)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

로 표현될 때 변위 성분은 다음과 같이 보간 함수와 절점치로 표현 된다.

$$q = \sum_{i=1}^8 N_i q_i \quad (20)$$

이 식에서 q 는 $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ 의 변위성분을 그리고 q_i 는 이들의 절점치를 의미한다.

식 (20)에 식 (18)의 형태로 표현되는 8절점 사변형 요소의 각변 중앙절점 변위를 대입하면 식 (20)의 변위 성분은 구석절점의 변위 성분만으로 다음과 같이 표현된다.

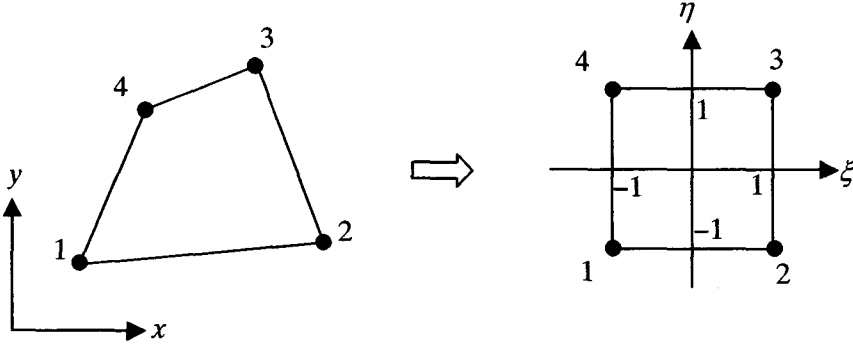


Fig. 3 Isoparametric 4-node shell element

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i + \frac{1}{8}(N_8 \Delta y_4 - N_5 \Delta y_1) \theta_{z1} + \frac{1}{8}(N_5 \Delta y_1 - N_6 \Delta y_2) \theta_{z2} \\ + \frac{1}{8}(N_6 \Delta y_2 - N_7 \Delta y_3) \theta_{z3} + \frac{1}{8}(N_7 \Delta y_3 - N_8 \Delta y_4) \theta_{z4}$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i + \frac{1}{8}(N_5 \Delta x_1 - N_8 \Delta x_4) \theta_{z1} + \frac{1}{8}(N_6 \Delta x_2 - N_5 \Delta x_1) \theta_{z2} \\ + \frac{1}{8}(N_7 \Delta x_3 - N_6 \Delta x_2) \theta_{z3} + \frac{1}{8}(N_8 \Delta x_4 - N_7 \Delta x_3) \theta_{z4}$$

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i + \frac{1}{8}(N_5 \Delta y_1 - N_8 \Delta y_4) \theta_{x1} + \frac{1}{8}(N_6 \Delta y_2 - N_5 \Delta y_1) \theta_{x2} \\ + \frac{1}{8}(N_7 \Delta y_3 - N_6 \Delta y_2) \theta_{x3} + \frac{1}{8}(N_8 \Delta y_4 - N_7 \Delta y_3) \theta_{x4} \\ + \frac{1}{8}(N_8 \Delta x_4 - N_5 \Delta x_1) \theta_{y1} + \frac{1}{8}(N_5 \Delta x_1 - N_6 \Delta x_2) \theta_{y2} \\ + \frac{1}{8}(N_6 \Delta x_2 - N_7 \Delta x_3) \theta_{y3} + \frac{1}{8}(N_7 \Delta x_3 - N_8 \Delta x_4) \theta_{y4}$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi}$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi}$$

(21)

식 (21)의 N_i 는 식(19)로 표현된 8절점 사변형 요소의 형상함수이다.

3.2 응력장

혼합법(hybrid method)에서 응력장은 어떠한 잉여모드(spurious mode) 즉 제로 에너지 모드(zero-energy mode)도 나타나지 않도록 설정되어야 한다. 제로 에너지 모드는 선정된 응력항과 변위함수로부터 유도되는 변형률이 급해질 때 변형률 에너지가 0이 되는 경우가 생긴다. 일반적으로 제로에너지 모드분제는 직사각형과 같이 요소의 형상이 규칙적일 때 생기며 불규칙적인 형상에서는 사라진다. 쉘 해석에서는 응력이라기 보다는 합응력(stress resultants)이 되며 이는 쉘 두께에 대해 응력성분을 적분하여 얻어진다. 요소의 평면변형은 12개의 자유도를 가지며 이 중에서 3개는 면내 강체운동 성분이 된다.

따라서 막응력장은 최소 9개의 독립변수로써 설명되어야 한다.

$$\begin{aligned} N_\xi &= \beta_1 + \beta_4\eta + \beta_6\xi + \beta_8\xi\eta \\ N_\eta &= \beta_2 + \beta_5\xi + \beta_7\eta + \beta_9\xi\eta \\ N_{\xi\eta} &= \beta_3 - \beta_6\eta - \beta_7\xi - \frac{1}{2}\beta_8\eta^2 - \frac{1}{2}\beta_9\xi^2 \end{aligned} \quad (22)$$

이 응력장은 Robinson (13)에 의하여 8절점과 4절점의 막요소에서 직각 좌표계로 가정된 응력장이다. 그러나 이 응력장은 한 개의 잉여 제로 에너지 모드를 생성시킨다고 알려져(12) 있다.

따라서 본 논문에서는 막응력장을 9개의 독립변수로 표현한 다음식을 제한한다

$$\begin{aligned} N_\xi &= \beta_1 + \beta_4\eta + \beta_6\xi + \beta_8\eta^2 \\ N_\eta &= \beta_2 + \beta_5\xi + \beta_7\eta + \beta_9\xi^2 \\ N_{\xi\eta} &= \beta_3 - \beta_6\eta - \beta_7\xi \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)으로 표현한 응력장에서 처음 5개항은 Pian (1)이 제한한 회전자유도가 없는 4절점 혼합형 막요소에 사용되었다. 나머지 항은 본 논문에서 고려한 회전자유도를 구속하기 위하여 도입되었다.

이 응력장은 식 (21)로 정의된 변위장에 대하여 아무런 잉여 제로에너지 모드를 유발하지 않는다. 그러나 Fig. 4 와 같은 한 개의 제로 변위 모드가 존재하나 이것은 수직회전각 θ_z 에 의하여 생기기 때문에 유한요소모델의 어느 한 절점에서 θ_z 를 지정해 주면 사라진다.

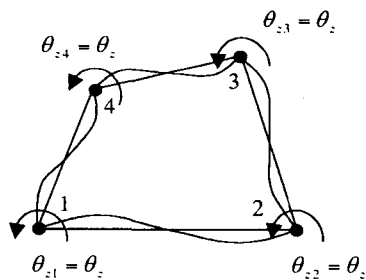


Fig. 4 The zero displacement mode

요소의 굽힘 변형에 대해서도 12개의 자유도를 가지며 그 중의 3개는 면외 강체운동과 관계된다. 따라서 응력장은 최소9개의 독립변수로 기술되어야 한다.

$$\begin{aligned}
 M_{\xi} &= \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_4\eta + \bar{\beta}_6\xi + \bar{\beta}_8\xi\eta \\
 M_{\eta} &= \bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_5\xi + \bar{\beta}_7\eta + \bar{\beta}_9\xi\eta \\
 M_{\xi\eta} &= \bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_{10}\xi + \bar{\beta}_{11}\eta + \frac{1}{2}\bar{\beta}_{12}\xi^2 + \frac{1}{2}\bar{\beta}_{13}\eta^2
 \end{aligned} \tag{24}$$

횡전단력은 식 (24)의 모멘트가 평형방정식을 만족하도록 다음과 같이 유도 된다.

$$\begin{aligned}
 Q_{\xi} &= M_{\xi,\xi} + M_{\xi\eta,\eta} \\
 &= (\bar{\beta}_6 + \bar{\beta}_{11}) + (\bar{\beta}_8 + \bar{\beta}_{13})\eta \\
 Q_{\eta} &= M_{\xi\eta,\xi} + M_{\eta,\eta} \\
 &= (\bar{\beta}_7 + \bar{\beta}_{10}) + (\bar{\beta}_9 + \bar{\beta}_{12})\xi
 \end{aligned} \tag{25}$$

이들 굽힘 응력장은 13개의 독립변수로 표현되기 때문에 9개로 기술된 종전의 모델에 비하여 기하학적인 찌그러짐에 덜 민감하다. 또한 이 응력장은 어떠한 재료 에너지 모드도 발생하지 않는다.

본 논문에서는 Reissner-Mindlin의 판이론을 사용하기 때문에 C^0 연속성(C^0 -continuity)이 필요하고 판 두께에 걸쳐서 횡전단 변형률이 일정하다고 가정함으로써 횡전단 변형의 효과를 고려한다. 이것을 판두께에 걸쳐서 횡전단 응력이 일정하다는 것을 의미한다. 그러나 일반적으로 횡전단 응력은 판의 표면에서 0 이 되기 때문에 횡전단 응력과 변형률은 판 두께에 걸쳐서 포물선 분포를 한다고 가정하는 것이 합리적이다. 이러한 차이를 극복하기 위하여 전단수정계수 5/6가 횡전단 변형률에너지에 도입된다.

4. 수치계산 및 검토

본 논문에서 제한한 응력가정의 혼합형 4절점 사변형 쉘 요소의 수렴특성과 정확도를 보이기 위하여 여러 가지 수치예제를 해석하고 그 결과를 검토하고자 한다.

4.1 Cook의 테이퍼진 판넬

테이퍼진 판넬이 Fig. 5과 같이 한쪽은 고정되고 다른 한쪽에서 분포된 전단력을 받고 있다. 이 판넬은 Cook을 비롯한 많은 연구자들이 요소의 찌그러짐에 의한 해의 민감도를 시험하기 위하여 채택하여온 모델이다. 이 판넬은 2×2 요소망과 4×4 요소망의 두가지로 해석하였다.

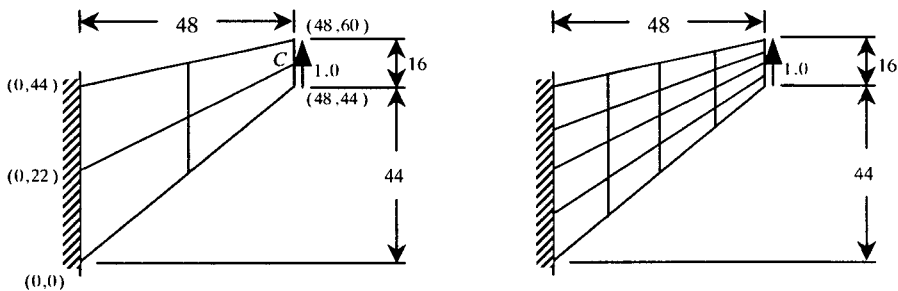


Fig. 5 The tapered and swept panel problem. Thickness = 1.0, $E = 1.0$, $\nu = 1/3$. Mesh = $N \times N$. Loading : unit in plane shear force distributed on the edge.

해석결과는 이론해⁽¹²⁾ 23.90으로 무차원화시켜 Table 1에 보이고 있으며 요소의 형상이 비교적 적게 찌그러져 있기 때문에 두 가지 모델 모두 합리적인 결과를 준다.

Table 1. Normalized vertical deflection at point C for tapered and swept panel

Mesh	Theoretical	Present
2×2	23.90	24.1(1.008)
4×4		27.5(1.150)

4.2 반구형 쉘

방향이 서로 다른 집중하중 4개를 받는 반구형 쉘은 대칭을 고려할 때 Fig.6과 같다. 요소망은 N 을 한 모서리의 요소갯수 라고 할 때 $N \times N$ 이 되고 $N=4,6,8,10$ 와 같이 변화 시켜 제안한 4절점 사변형 쉘 요소의 수렴특성을 보이고자 한다

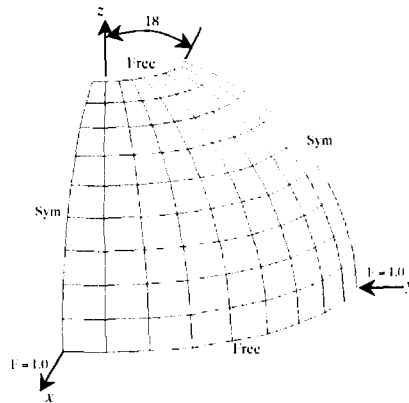


Fig. 6 The spherical shell problem. Radius = 10.0, thickness = 0.04, $E = 6.825 \times 10^7$, $\nu = 0.3$
Mesh = $N \times N$. Loading: concentrated forces as shown.

이론해⁽¹²⁾ 0.0940으로 무차원화 시킨 하중점의 변위가 요소갯수에 따라서 Table2에 제시되어 있다. 제안한 4절점 사변형 쉘 요소는 요소갯수에 따라서 매우 완만하게 수렴되는 특성을 보인다.

Table 2. Normalized displacements at load points for hemispherical shell

Mesh	Theoretical	Present
4×4	0.0940	0.0294(0.313)
6×6		0.0440(0.468)
8×8		0.0650(0.691)
10×10		0.0779(0.829)

5. 결 론

셸 구조물을 보다 정확하고 효과적으로 해석하기 위하여 혼합형 4절점 사변형 셸요소를 구성하였다. 이 요소는 표준 4절점 사변형 요소가 가지는 여러 가지 결함을 극복하기 위하여 회전자유도를 포함하고 합용력장의 독립변수항이 적절히 선정 되었다.

제안한 요소의 수렴특성과 정확도를 규명하기 위하여 세가지 수치예제를 해석하였으며 그 결과를 검토하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 해석결과는 요소의 기하학적 찌그러짐에 덜 민감하다.
- (2) 제안한 요소는 어떠한 잉여제로 에너지 모드도 발생시키지 않는다.

참고 문헌

1. Pian, T.H.H, "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions" , *Journal of AIAA*, Vol.2 , 1964, pp.1333~1336
2. Zienkiewicz O.C , Taylor R.L and Too J.M . "Reduced Integration Techniques in General Analysis of Plates and Shells", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.3, 1971, pp.275~290
3. Pawsey, S.F and Clough, R.W., "Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.3, 1971, pp.575~586
4. Wilson E.L., Taylor R.L., Doherty W.P. and Ghaboussi. T., "Incompatible Displacement Models", in S.T. Feives et al.(eds.), *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Academic Press, New York, 1973, pp.43~57
5. Taylor R.L., Beresford P.J. and Wilson E.L., "A Non-conforming Element for Stress Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.10, 1976, pp.1211~1220
6. Irons B.M. and Ahmad S., *Techniques of Finite Elements*, Wiley, New York, 1980
7. Allman D.J., "A compatible Triangular Element Including Vertex Rotational for Plane Elasticity Analysis", *Computers & Structures*, Vol.19, 1984, pp.1~8
8. Cook R.D., "On the Allman Triangle and a related Quadrilateral Element", *Computers & Structures*, Vol.22, 1986, pp.1065~1067
9. MacNeal R.H. and Harder R.L., " A Refined Four-Noded Membrane Element with Rotational Degrees of Freedom ", *Computers & Structures*, vol.28, 1988, pp.75~84
10. Yunus S.H., Saigal S. and Cook R.D., "On Improved Hybrid Finite Elements with Rotational Degrees of Freedom," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.28, 1989, pp.785~800
11. Aminpour M.A., "A 4-node Assumed Stress Hybrid Shell Element with Rotational Degrees of Freedom," *NASA CR-4279*, 1990
12. Aminpour M.A., "Direct Formulation of A Hybrid 4-Node Shell Element with Drilling Degrees of Freedom ," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.35, 1992, pp.997~1013