

## 확장유한요소법을 통한 요소망제약조건이 없는 균열해석기법 개발

### Development of crack analysis technique by using extended finite element method free from mesh-dependency

이 상 호\*                      송 정 훈\*\*  
Lee, Sang-Ho                  Song, Jeong-Hoon

---

#### ABSTRACT

In this paper, an Extended Finite Element Method is proposed by adding discontinuity and singularity enrichment functions to the standard FEM approximation. In this method, the singularity and the discontinuity of the crack are efficiently modeled by using initial regular mesh without refining mesh near the crack tip, so that it enables express the asymptotic stress field near crack tip and crack surface successfully. The developed method was verified by evaluating crack tip stress profile and stress intensity factor of mode I/mode II fracture problems and the results showed the effectiveness and robustness for fracture problem.

---

#### 1. 서    론

기존의 유한요소법은 지난 수십년 동안 공학문제를 해석하는 수치해석기법으로 꾸준히 연구·개발되어 오늘에 이르고 있는 공학분야의 대표적인 수치해석 기법이다. 이 해석기법은 그동안의 지속적인 연구를 통하여 불연속면의 기하학적 특성이 변하지 않는 일반적인 공학문제에 대해서는 해석강건성(robustness)을 갖으면서도 손쉽게 정확한 해를 얻을 수 있음이 충분히 증명되었으나, 가장 일반적인 공학문제인 단일균열의 성장과정을 해석하기 위해서도 해석단계에 따라 변화하는 기하학적 형상의 요소망을 매번 재구성하여 다시 묘사해야 한다는 문제가 최대의 단점으로 지적되어 왔다. 물론 최근의 연구를 통하여 이동유한요소법<sup>(1)</sup>을 이용하여 균열이 성장함에 따라 요소망을 자동적으로 재구성하는 해석기법이나 경계요소를 추가함으로써 균열의 성장을 모형화 할 수 있는 방법<sup>(2)</sup> 등이 제안되기도 하였지만 이는 근본적으로 요소망 제약조건을 완전히 탈피하지 못하고 있는 것이며, 최근 들어 단위분할법<sup>(3)</sup>의 개념에 근거하여 기존의 근사변위함수를 확장하는 방법<sup>(4)-(6)</sup>이 제안됨으로써 유한요소법의 최대단점인 요소망 제약조건을 극복하기 위한 연구가 진행중이다.

또한 근본적으로 이러한 단점들을 극복하고자 요소를 사용하지 않고 절점만을 사용하는 무요소법(Meshfree Methods)이 개발되기 시작하였다.<sup>(7)-(9)</sup> 그러나, 무요소법은 실제 공학문제를 해석하는데 있어서 유한요소법에 비해 해석강건성(robustness)의 확보가 아직까지는 미흡하고 개념상의 확연한 차이로 인하여 기존의 유한요소법을 기반으로 개발된 상용 S/W에 직접적으로 접목(implement)하여 사용할 수 없으며 구현상의 복잡함이나 계산에 소요되는 비용(computational cost)이 높다는 단점을 지니고 있다. 이러한 이유로 무요

---

\* 정회원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 부교수

\*\* 정회원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 석사과정

소법은 학문적 연구분야에서는 활발한 연구가 진행되는 반면, 빠르고 정확한 해석을 요구하는 실질적인 공학 분야의 문제에 대해서는 극히 제한적으로 적용되고 있다.

따라서, 본 연구에서는 실제적인 공학문제의 적용성을 극대화시킬 수 있도록 해석강건성을 지니고 있는 유한요소법을 단위분할법을 근간으로 하여 형상함수 확장기법을 적용함으로써 요소망 제약조건 없이 공학적 불연속문제를 손쉽게 다룰 수 있는 확장유한요소해석기법을 개발하고 그 적용성을 검토하고자 한다.

## 2. 균열선단특이기지함수와 불연속함수를 이용한 FEM균열해석기법

### 2.1 2차원 선형탄성문제의 지배방정식 및 약형식

미소변위 가정하에서 선형탄성 구성방정식이 적용된 해석대상체의 영역  $\Omega$ 와 경계  $\Gamma (= \Gamma_u \cup \Gamma_t)$ 에 대한 지배방정식은 식 (1)과 같다. 또한, 이 방정식은 자연경계조건에 대해서는 식 (2)와 같은 조건을 만족시켜야 한다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (2)$$

여기서,  $\boldsymbol{\sigma}$ 와  $\mathbf{b}$ 는 각각 해석대상체 내의 임의의 점에서 작용하는 응력과 체적력을 나타내며,  $\mathbf{n}$ 은 영역에 대한 단위수직벡터,  $\bar{\mathbf{t}}$ 는 경계  $\Gamma$ 에서 작용하는 표면력을 뜻한다. 이때 지배방정식에 대한 약형식은 식 (3)과 같다.

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \delta U \quad (3)$$

여기서,  $\mathbf{u}$ 와  $\delta \mathbf{u}$ 는 모두  $H^1$  공간에서 정의된 함수이며 각각 trial 함수와 test 함수를 나타낸다.

### 2.2 균열면 불연속기지함수

기존 FEM에서 사용되었던 기저함수는 요소내(inter-element)에서의 불연속성을 표현할 수 없었기 때문에 해석대상체에 존재하는 균열을 해석하기 위해서는 요소망(mesh)을 불연속적으로 구성하는 방법을 통하여 이를 표현하였다. 그러나 본 연구에서는 단위분할법의 개념을 근간으로 하여 불연속성을 수학적으로 묘사할 수 있는 기저함수를 개발하고 활용함으로써 요소내에서의 불연속성의 표현이 가능하도록 하였다. 불연속 기저함수는 균열로 인해 발생하는 변위 및 응력의 불연속성을 수학적으로 묘사할 수 있도록 균열면을 경계로 양·음의 단위값을 갖는 계단함수(step function)  $H(x)$ 의 형태를 취한다. 이는 수학적으로 불연속성을 표현할 수 있는 가장 간단한 방법으로서 그림(1a)와 같은 형태를 갖으며 그 값의 정의는 그림 (1b)와 같은 국부좌표계에서 식 (4)와 같이 정의된다.

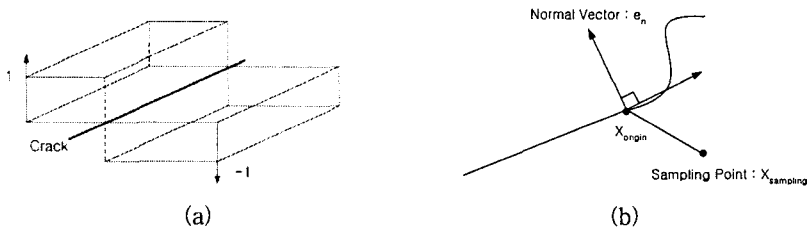


그림 1 (a) 계단함수의 형태 및 (b) 불연속함수 정의를 위한 균열의 모형화

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{for } (x-x^*) \cdot e_n > 0 \\ -1 & \text{for } (x-x^*) \cdot e_n < 0 \end{cases} \quad (4)$$

이와 같은 계단함수는 식 (5)와 같이 기존 FEM 근사변위함수에 추가적으로 사용되어, 이를 통하여 요소망의 불연속한 구성에 의존하지 않고 요소 내에서도 변위 및 응력의 불연속성을 묘사할 수 있게 된다. 특히 추가확장에 사용되는 절점은 기존의 요소망에 새로운 절점을 추가하여 사용하지 않고, 균열의 불연속성을 묘사할 필요가 있는 요소의 절점, 즉 균열에 의하여 관통된 요소의 기존 절점을 그대로 사용함으로써 추가적인 계산량은 매우 작은 효율성을 보인다.

$$u^h(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) d_i + \sum_{j \in J} N_j(x) H(x) a_j = Nd + \tilde{N}Ha \quad (5)$$

위의 식에서,  $I$ 는 해석대상체내의 모든 절점이며,  $J$ 는 균열이 관통하는 요소의 절점을 나타낸다. 또한  $N_i(x)$ 은 기존의 일반적인 FEM 형상함수이고  $N_j(x)H(x)$ 는 계단함수를 적용하여 불연속성을 표현한 추가적인 형상함수를 나타낸다. 이때, 추가적인 형상함수 ( $N_j(x)H(x)$ )는 실제 수치해석프로그램 구현시 새로운 형상함수를 정의하여 사용하지 않고 다만 기존의 형상함수를 이용하여 적분점에서 사용하는 가중함수의 부호를 균열면의 상하부의 위치에 따라 결정해 줌으로써 손쉽게 구성할 수 있다.

### 2.3 균열선단 특이기저함수

균열의 선단에서는 응력집중 현상이 발생하며, 이를 표현하기 위하여 기존 FEM에서는 균열선단주변에 특이요소(singular element)를 사용하였다. 그러나 특이요소 사용 역시 균열선단이 요소내에 위치하였을 경우에는 특이성의 반영이 불가능하여 특이요소의 절점에 균열 선단이 위치하도록 요소망을 재구성 해야하는 제약조건이 있었다.

따라서 본 연구에서는 2.2절에서 제시한 방법과 유사하게 균열선단의 특이성을 반영할 수 있는 특이기저함수를 제안하고 필요한 부분에 국부적으로 사용함으로써 응력특이성을 요소망 제약조건 없이 표현할 수 있도록 하였다. 균열선단 주변에서 발생하는 특이성을 반영하기 위하여 식 (6)과 같은 4개의 특이기저함수를 사용하였다. 이 함수들은 국부적으로 기존의 FEM 근사변위함수에 더해져서 사용되며, 그 형태에서 확인할 수 있듯이 변위의 근사에 대해서는  $\sqrt{r}$ 성분을 표현하며 그 미분값인 응력 성분에 대해서는  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 을 표현할 수 있도록 제안된 것이다. 이는 기존의 개선된 EFGM(Element Free Galerkin Method)에서 사용되었던 특이기저함수와 동일한 형태를 취하고 있다<sup>(10)</sup>.

$$g(x) = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (6)$$

이 4개의 특이기저함수는 균열선단을 원점으로 하여 정의되는 국부좌표계상의  $r, \theta$ 에 대한 함수로써, 균열이 요소의 좌측중앙부로부터 시작하여 그 선단이 중앙에 위치하였을 경우 요소 내에서 그림 (2)와 같은 형태를 가지고 있으며 선형조합을 통하여 균열선단의 변위를 나타내는 이론해를 완전히 표현할 수 있도록 선택되었다.

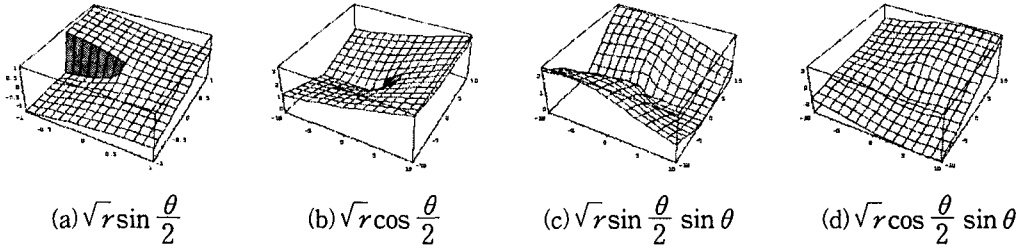


그림 2 균열선단의 특이기지함수 형태

이를 이용하여 단위분할법의 개념에 따라 식 (7)과 같이 기존 FEM 근사변위함수를 확장하면 요소망 제약조건 없이 균열선단의 특이성을 요소 내에서도 표현할 수 있다. 또한, 확장에 관련된 식들이 모두 균열선단이 위치한 요소의 절점 위에서만 추가적으로 고려되므로 국부적으로 자유롭게 확장할 수 있다.

$$u^h(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) d_i + \sum_{k \in K} \sum_{l=1}^4 N_k(x) g_l(x) b_{kl} = \mathbf{N}d + \overline{\mathbf{N}}\mathbf{g}b \quad (7)$$

여기서,  $I$ 는 전체절점을 뜻하며,  $K$ 는 전체절점중 균열선단이 위치한 요소의 절점을 뜻한다. 또한,  $N_i(x)$ 은 기존의 FEM 형상함수이며  $N_k(x)g_l(x)$ 는 균열선단의 특이성을 표현할 수 있도록 제안된 추가적인 특이형상함수이다.

#### 2.4 불연속기지함수와 특이기지함수를 사용하여 확장된 근사변위함수 및 계방정식

본 절에서는 앞에서 제안된 균열면 불연속기지함수와 균열선단 특이기지함수를 동시에 고려하여 해석대상체 내에 분포하는 불연속면을 요소망 제약조건 없이 모형화할 수 있는 확장된 근사변위함수를 제안하고자 한다. 이는 식 (8)과 같이 기존의 근사변위함수를 해석대상체 내에 분포하는 국부적 특이성에 따라 필요한 부분에 적용할 수 있도록 확장함으로 가능하다.

$$u^h(x) = \sum_{i \in I} N_i(x) d_i + \sum_{j \in J} N_j(x) H(x) a_j + \sum_{k \in K} \sum_{l=1}^4 N_k(x) g_l(x) b_{kl} = \mathbf{N}d + \widehat{\mathbf{N}}\mathbf{H}a + \overline{\mathbf{N}}\mathbf{g}b \quad (8)$$

여기서,  $I$ 는 해석대상체 내의 전체 절점이며,  $J$ 와  $K$ 는 각각 균열에 의해서 관통된 요소의 절점과 균열선단이 위치한 요소의 절점을 뜻한다. 또한,  $N_i(x)$ 은 기존의 FEM 형상함수이고,  $N_j(x)H(x)$ 와  $N_k(x)g_l(x)$ 는 앞에서 제안된 특이기지함수들이다. 식 (9)는 근사변위함수의 이산화된 미분을 나타내며 계방정식의 최종해를 찾은 후 해석대상체 내의 응력을 산정할 때 사용하게 된다.

$$\begin{aligned} u_{,i}^h(x) &= \sum_{i \in I} N_{i,i}(x) d_i + \sum_{j \in J} N_{j,i}(x) H(x) a_j + \sum_{k \in K} \sum_{l=1}^4 [N_{k,i}(x) g_l(x) + N_k(x) g_{l,i}(x)] b_{kl} \\ &= \mathbf{B}d + \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{H}a + (\overline{\mathbf{B}}\mathbf{g} + \overline{\mathbf{N}}h) b \end{aligned} \quad (9)$$

식 (8)과 식 (9)를 앞에서 제시한 2차원 선형탄성문제의 지배방정식으로부터 유도한 약형식 식 (3)에 대입하여 Galerkin 방법에 따라 이산화하여 얻은 최종적인 계방정식의 형태는 식 (10)과 같으며, 각각을 구성하는 성분들은 식 (11)-식 (19)와 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IJ} & \mathbf{K}_{IKl} \\ \mathbf{K}_{IJ}^T & \mathbf{K}_{JJ} & \mathbf{K}_{JKl} \\ \mathbf{K}_{IKl}^T & \mathbf{K}_{JKl}^T & \mathbf{K}_{KKkl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_I \\ \mathbf{a}_J \\ \mathbf{b}_{Kk} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_I \\ \mathbf{f}_J \\ \mathbf{f}_{Kk} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$K_{II} = \int_{\Omega} B_I^T D B_I d\Omega \quad (11)$$

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T D \bar{B}_J H d\Omega \quad (12)$$

$$K_{IKl} = \int_{\Omega} B_I^T D (\bar{B}_{Kl} g_l + \bar{N}_{Kl,i}) d\Omega, \quad l=1, \dots, 4 \quad (13)$$

$$K_{JJ} = \int_{\Omega} (\bar{B}_J H)^T D \bar{B}_J H d\Omega \quad (14)$$

$$K_{JKl} = \int_{\Omega} \bar{B}_J^T H D (\bar{B}_{Kl} g_l + \bar{N}_{Kl,i}) d\Omega, \quad l=1, \dots, 4 \quad (15)$$

$$K_{KKkl} = \int_{\Omega} (\bar{B}_{Kl} g_k + \bar{N}_{Kl,i})^T D (\bar{B}_{Kl} g_l + \bar{N}_{Kl,i}) d\Omega, \quad k, l=1, \dots, 4 \quad (16)$$

$$f_I = \int_{\Gamma_i} N_I^T t d\Gamma + \int_{\Omega} N_I^T b d\Omega \quad (17)$$

$$f_J = \int_{\Gamma_i} (\bar{N}_J H)^T t d\Gamma + \int_{\Omega} (\bar{N}_J H)^T b d\Omega \quad (18)$$

$$f_{Kk} = \int_{\Gamma_i} (\bar{N}_{Kl} g_k)^T t d\Gamma + \int_{\Omega} (\bar{N}_{Kl} g_k)^T b d\Omega, \quad k=1, \dots, 4 \quad (19)$$

본 연구에서 제안된 근사변위함수는 불연속성을 표현하기 위한 불연속기저함수와 균열선단의 특이성을 반영하기 위한 특이기저함수를 사용하였지만, 단위분할법의 개념에 따라 근사변위함수에 추가적으로 적용하였으므로 절점의 재배치나 추가·삭제의 과정이 필요없다. 이는 균열이 성장하는 과정에 대한 해석을 수행하더라도 요소망 제약조건이 없이 일반적인 요소망을 사용할 수 있음을 뜻한다.

### 3. 수치해석예제

#### 3.1 균열선단의 응력분포(patch 시험)

본 연구에서 제안된 것 같이 일반적인 해석대상체가 아닌 균열과 같은 국부적 특성을 갖고 있는 해석대상체에 대한 수치해석프로그램의 정확성 검증은 일반적인 patch 시험방법을 그대로 적용할 수 없다. 이는 일반적인 patch 시험방법을 통하여서는 국부적 특성의 정확한 반영여부를 파악할 수 없기 때문이다. 따라서 본 절에서는 측면균열을 갖는 평판에 이론해로 알려져 있는 모드 I에 대한 변위식인 식 (20)과 식 (21)을 이용하여 patch 시험을 수행하였다. Patch 시험방법은 우선, 이론해에 따라 모드 I의 파괴형상을 가져올 수 있는 하중을 해석모형에 재하하였을 경우의 변위값을 식 (20), 식 (21)을 이용하여 미리 계산한 후, 이를 다시 그림 (3a)와 같이 해석모형의 경계에 적용하고 해석을 수행하여 얻어진 해석모형 내부의 응력값과 이론해에 따른 응력값을 비교함으로써 수행할 수 있다.

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} [x-1 + 2\sin^2 \frac{\theta}{2}] \quad (20)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} [x-1 + 2\cos^2 \frac{\theta}{2}] \quad (21)$$

이는 본 연구에서 제안한 균열이 고려된 확장근사변위함수가 정확하다면 이를 적용하여 수행된 해석대상체 내의 응력분포가 이론해를 통하여 계산된 응력분포와 동일할 것이므로 이 두 값의 비교를 통하여 그 정확성을 검증할 수 있기 때문이다. 본 수치예제에서 균열길이는 a이고, 균열선단은 좌표 (1.0a, 1.0a)에 위치하

며, 해석모형의 가로, 세로의 길이가 각각  $2a$ 이다. 응력확대계수는 1로 미리 규정하였다. 해석결과 그림(3b)와 같이 균열선단의 특이성을 요소망 제약조건 없이 요소 내에서도 잘 묘사해 주고있음을 확인할 수 있다.

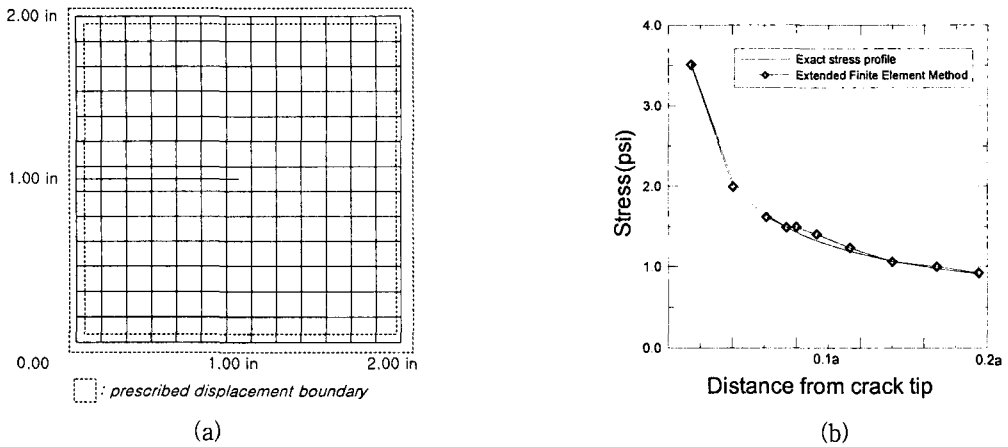


그림 3 (a) patch시험 모형 및 (b) 균열선단의 응력분포도 ( $\theta = 0, r > 0$ )

### 3.2 전단응력을 받는 측면균열 문제

본 절에서는 혼합모드상태의 균열문제를 다루었으며 그림 (4a)와 같이 하단의 수직변위가 구속된 평판에 1psi의 전단응력이 작용한 경우에 대한 해석을 수행하였다. 이와 같은 경우 전단응력은 평판에 분포하는 균열에서 혼합모드의 파괴를 유발하므로 이에 따른 모드 I, 모드 II의 응력확대계수를 구하고 이를 정해와 비교하여 표 (1)과 같은 결과를 도출하였다. 본 수치예제에서는 해석대상체의 탄성계수  $E$ 는  $3 \times 10^6$  psi이고 포아송비  $\nu$ 는 0.3을 사용하였으며 312개의 절점과 275개의 요소를 사용하였다. 또한, 확장변위함수를 사용한 요소에 대해서는 8개의 적분점을 이용하여 수치적분을 수행하였으며 이 이외의 부분에 대해서는 4점의 적분점을 사용하였다.

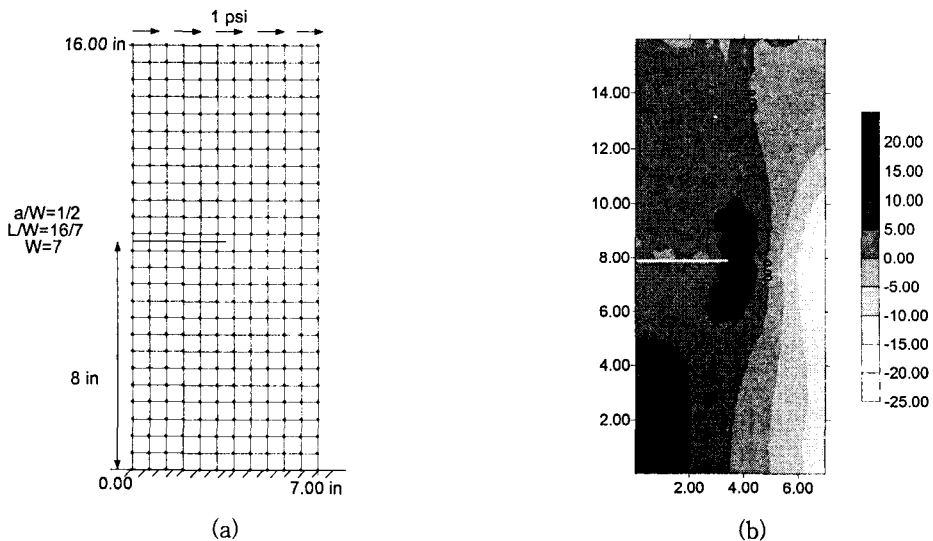


그림 4 (a) 전단응력을 받는 측면균열문제 모형 및 (b)  $\sigma_y$  응력 contour

표 1은 모드 I과 모드 II에 대한 응력확대계수의 이론해와 본 연구를 통하여 제안된 방법을 적용하여 해석한 결과의 상대오차를 구한 것이다. 각각의 모드에 따라 오차가 4.70%와 0.87%로 계산되었으며 혼합모드 상태에서 해석결과에 좋은 정확도를 보임을 확인할 수 있었다.

표 1 전단응력을 받는 편축균열의 응력확대계수 오차 (단위 :  $\text{psi}\sqrt{\text{in}}$ )

	이론해	수치해	에러(%)
$K_I$	34.00	32.40	4.70
$K_{II}$	4.55	4.51	0.87

### 3.3 인장력을 받는 중앙균열 문제

본 수치예제는 그림 (5a)와 같이 인장응력을 받는 평판에 두 개의 균열선단이 존재하는 중앙균열 문제에 대한 해석을 수행한 결과이다. 해석에 적용된 물성치는 앞의 예제와 동일하며 그림 (5b)는 해석을 수행한 결과로서 y방향 응력 분포도이다. 이에서 볼 수 있듯이 균열선단에서의 응력집중 현상과 균열면에서의 불연속성의 표현이 효과적으로 나타나고 있음을 확인할 수 있다.

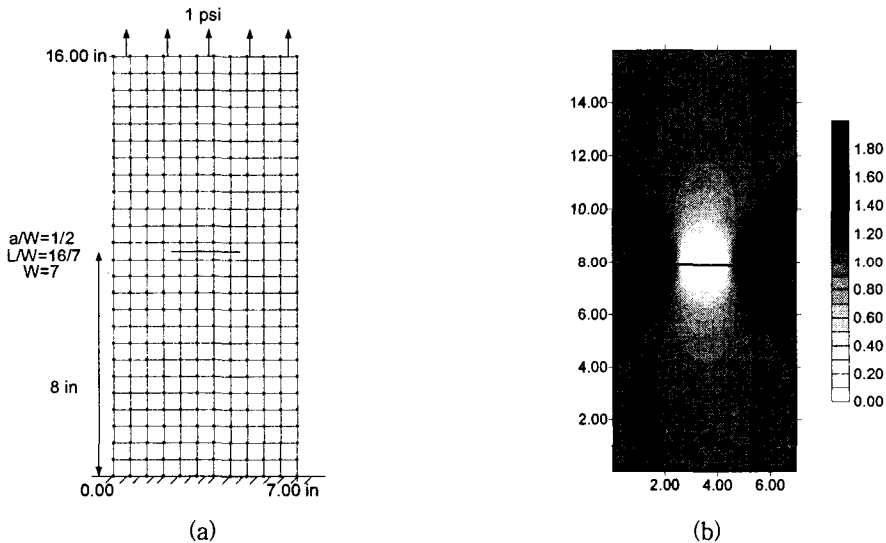


그림 5 (a) 인장응력을 받는 중앙균열문제 모형 및 (b)  $\sigma_y$  응력 contour

표 (2)는 모드 I에 대한 응력확대계수를 이론해와 비교하여 그 상대오차를 구한 것으로 2.27%의 오차를 보이고 있으며 이 역시 좋은 정확도를 보이고 있음을 확인할 수 있다.

표 2 인장응력을 받는 중앙균열의 응력확대계수 오차 (단위 :  $\text{psi}\sqrt{\text{in}}$ )

	이론해	수치해	에러(%)
$K_I$	2.20	2.15	2.27

#### 4. 토의 및 결론

본 연구에서는 기존의 FEM 근사변위함수에 균열이 갖는 불연속성과 균열선단의 응력 특이성을 반영할 수 있는 불연속기저함수 및 특이기저함수를 단위분할법의 개념에 입각하여 확장적용함으로써 요소망에 대한 제약조건 없이 불연속문제를 해석할 수 있는 기법을 제안하였다. 본 연구를 통한 구체적인 결론은 다음과 같다.

- (1) 균열면에서 발생하는 응력 및 변위의 불연속성은 불연속기저함수를 국부적으로 추가시킴으로써 요소망에 제약받지 않고 효과적으로 묘사되었으며, 이를 통하여 기존의 유한요소법에서 불연속면을 표현하기 위하여 요소망을 불연속적으로 구성해야 했던 제약조건을 극복할 수 있었다.
- (2) 균열선단의 응력특이성은 기존의 이론해를 완전히 재생할 수 있는 4개의 특이기저함수를 선형조합하여 선단주변에서만 국부적으로 사용함으로써 기존에 특이요소를 도입하거나 세밀한 요소망을 구성하지 않고도 균열선단의 특이성을 정확히 표현할 수 있었다.
- (3) 수치예제에서 볼 수 있듯이, 단일모드 및 혼합모드 상태의 파괴현상에 대한 응력확대계수에 대한 수치해 역시 매우 정확하게 산정되었다.
- (4) 본 연구를 통하여 제안된 방법은 요소망의 제약조건 없이 균열문제에 대한 효율적인 해석이 가능하므로 추가적인 연구를 통하여 불연속면이 연속적으로 변화하는 문제에 대한 활발한 적용성이 가능할 것으로 기대된다.

#### 참고문헌

1. Koh, H. M., Lee, H. S. and Jeong U. Y., "An Incremental Formulation of the Moving-grid Finite Element Method of the Prediction of Dynamic Crack Propagation", *Nuclear Engineering and Design*, Vol.158, 1995, pp.295-309.
2. Saleh, A. L. and Aliabadi, M. H., "Crack Growth Analysis in Reinforced Concrete using BEM", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.124, 1998, pp.949-958.
3. Babuska, I. and Melenk, J. M., "The Partition of Unity Finite Elements Methods", *Technical Report BN-1185*, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, 1995.
4. Belytschko, T. and Black, T., "Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing", *International Journal of Numerical Mechanics in Engineering*, Vol.45, 1999, pp.601-620.
5. Belytschko, T., Moes, N., Usui, S. and Parimi, C., "Arbitrary Discontinuities in Finite Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.50, 2001, pp.993-1013.
6. Dolbow, J., Mos, N. and Belytschko, T., "Discontinuous Enrichment in Finite Elements with a Partition of Unity Method", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.36, 2000, pp.235-160.
7. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., "Element-free Galerkin Methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, 1994, pp.229-256.
8. Liu, W. K., Jun, S. and Zhang, Y., "Reproducing Kernel Particle Methods", *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol.20, 1995, pp.1081-1106.
9. Randles, P. W. and Libersky, L. D., "Smoothed Particle Hydrodynamics: Some Recent Improvements and applications", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.139, 1996, pp.375-408.
10. 이상호, 윤영철, "특이기저함수를 이용하여 개선한 Mesh-free 균열해석기법", 한국전산구조공학회 논문집, Vol.14, 2001, pp.381-390.