

절점 병합에 의한 삼각형 평판휨 요소

Triangular Plate-Bending Element by Combined node

최창근* 강윤숙** 이태열***

Choi, Chang Koon Kang, Yun Sook Lee, Tae Yeol

ABSTRACT

A new triangular element for the finite element analysis of plate-bending problems is presented. For the purpose of sharing the program code of 4 node plate-bending element, two nodes of the 4-node element are combined to form a triangular element. Thus, the presented element would bring about great deal of efficiency of the computer program. The proposed variable-node elements pass the patch tests, do not show spurious zero-energy modes, and do not produce shear locking phenomena. It is also shown that the elements produce reliable solutions through numerical tests for standard benchmark problems.

1. 서 론

본 연구에서는 사각형 평판 휨 요소를 기반으로 프로그램의 효율성을 증대할 수 있는 삼각형 평판 휨요소를 개발하고자 절점 병합 삼각형의 개념을 도입하였다. 또한 전단잠김(shear locking)현상을 제거하기 위하여 새로운 대체전단 변형률장을 적용하였다. 기존의 4 절점요소의 회전 변위장에 보다 다양한 비적합 변위형을 추가함으로써 요소의 거동을 더욱 향상시킨 NPB4 요소(Choi and Lee, 2002)를 기반으로 절점 병합 기법을 통해 3 절점 평판휨요소를 개발하였다. 본 요소는 조각시험(patch test)를 통과하고 제로에너지모드(zero energy mode)와 전단잠김(shear locking) 현상도 없으며, 수치해석으로부터 우수한 거동을 보였다.

2. 절점 병합에 의한 3 절점 평판휨 요소의 구성

2.1.4 절점 평판휨 요소(NPB4)의 정식화

전단 변형을 고려하는 Mindlin 평판요소에서 전단 변형률은 평판 처짐량의 미분치와 회전 변위량의 차이로 정의되며, 그림 1에서와 같이 연직 변위 w 와 두개의 회전변위 성분 θ_x, θ_y 는 동일한 차수의 형상함수(shape function)으로 다음과 같이 가정할 수 있다 (Choi 와 Lee, 2002).

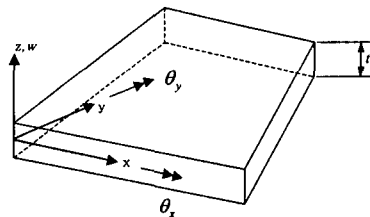


그림 1. 4절점 평판휨 요소

* 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수
** 한국과학기술원 토목공학과 석사과정
*** 한국과학기술원 토목공학과 박사후연구원

$$\mathbf{u} = \langle w \quad \theta_x \quad \theta_y \rangle^T \quad (2.1)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \langle \bar{\theta}_x \quad \bar{\theta}_y \rangle^T \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} w &= \sum N_i w_i \\ \theta_x &= \sum N_i \theta_{xi} + \sum \bar{N}_j^4 \bar{\theta}_{xj} = \langle N \rangle \{ \theta_x \} + \langle \bar{N}^4 \rangle \{ \bar{\theta}_x \} \\ \theta_y &= \sum N_i \theta_{yi} + \sum \bar{N}_j^4 \bar{\theta}_{yj} = \langle N \rangle \{ \theta_y \} + \langle \bar{N}^4 \rangle \{ \bar{\theta}_y \} \end{aligned} \quad (2.3)$$

여기서 N_i 는 4 절점요소에 대한 선형 형상함수이며, \bar{N}_j^4 는 i 절점용 비적합 변위의 j 번째 모드이다. $\bar{\theta}_x$ 와 $\bar{\theta}_y$ 는 각각 θ_x 와 θ_y 에 관련된 비적합 변위형이며 오른손법칙(right-hand-rule)의 기호규약을 적용한다면 휨곡률, 변형률 및 전단 변형률은 다음 식과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_{y,x} \\ \theta_{x,y} \\ -\theta_{y,y} + \theta_{x,x} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\theta_{y,x} \\ -z\theta_{x,y} \\ z(\theta_{y,y} - \theta_{x,x}) \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{B}_b \mathbf{u} + \bar{\mathbf{B}}_b \bar{\mathbf{u}} \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,y} - \theta_x \\ w_{,x} + \theta_y \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{B}_s \mathbf{u} + \bar{\mathbf{B}}_s \bar{\mathbf{u}} \quad (2.6)$$

사용된 비적합 변위형(그림 2)은 다음과 같다.

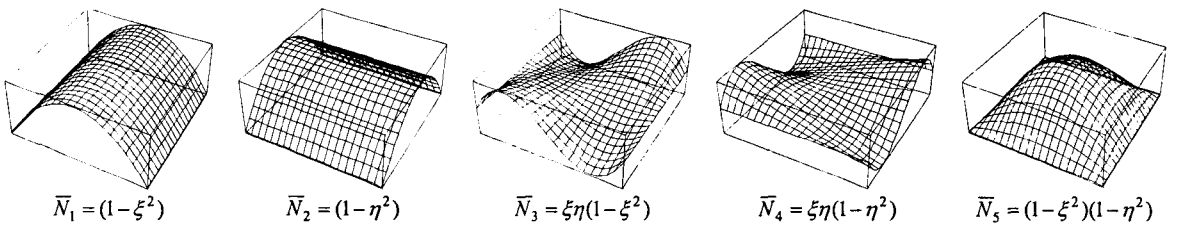


그림 2. 기존의 사절점 평판휨 요소의 비적합변위형

식 (2.5)에서 (2.8)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b & \bar{\mathbf{B}}_b \\ \mathbf{B}_s & \bar{\mathbf{B}}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

조각시험을 통과시키기 위하여 $\bar{\mathbf{B}}_s$ 는 직접수정법(Choi et al. 2001)에 의한 $\bar{\mathbf{B}}_s^*$ 로 대체된다. 또한, 전단잠김(shear locking)현상을 제거하기 위하여 \mathbf{B}_s 를 $\tilde{\mathbf{B}}_s$ 로 교체(Choi 와 Lee, 2002)하여, 식(2.10)과 같은 변형률-변위관계 행렬을 구할 수 있다. 즉,

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b & \bar{\mathbf{B}}_b \\ \mathbf{B}_s & \bar{\mathbf{B}}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b & \bar{\mathbf{B}}_b \\ \tilde{\mathbf{B}}_s & \bar{\mathbf{B}}_s^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

최종적으로, 요소의 강성행렬은 식(2.11)에서와 같이 요소별로 독립적인 비적합변위를 정적응축(static condensation) 기법을 통하여 소거함으로써 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{cn} \\ \mathbf{K}_{cn}^T & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_{cc} - \mathbf{K}_{cn} \mathbf{K}_{nn}^{-1} \mathbf{K}_{cn}^T \quad (2.11)$$

여기서 \mathbf{K}_{cc} , \mathbf{K}_{cn} , \mathbf{K}_{nn} 은 식(2.12)과 같다.

$$\mathbf{K}_{cc} = \int_V \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dV + \int_V \tilde{\mathbf{B}}_s^T \mathbf{D}_s \tilde{\mathbf{B}}_s dV \quad (2.12a)$$

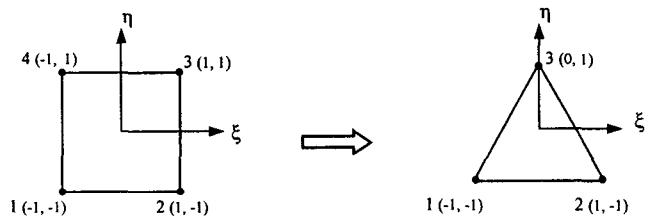
$$\mathbf{K}_{cn} = \int_V \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \bar{\mathbf{B}}_b^* dV + \int_V \tilde{\mathbf{B}}_s^T \mathbf{D}_s \bar{\mathbf{B}}_s^* dV \quad (2.12b)$$

$$\mathbf{K}_{nn} = \int_V \bar{\mathbf{B}}_b^{*T} \mathbf{D}_b \bar{\mathbf{B}}_b^* dV + \int_V \bar{\mathbf{B}}_s^{*T} \mathbf{D}_s \bar{\mathbf{B}}_s^* dV \quad (2.12c)$$

한편, 강성행렬은 크게 앞부분의 bending part 와 뒷부분의 shear part 로 나뉘며, \mathbf{D}_b 와 \mathbf{D}_s 는 각각 휨변형과 전단변형에 관련된 재료행렬이다.

2.2 절점 병합의 개념 도입

절점 병합에 의한 삼각형 요소의 형상함수는 기존의 일반적인 사변형 요소의 두 절점을 일치하여 구성하게 된다. 사변형 요소의 절점 중에서 절점 3 과 4 를 병합하면 다음과 같은 형상함수를 얻어낼 수 있다.



(a) 자연좌표에서의 4절점 요소의 형상 (b) 절점 3과 4가 병합된 3절점 요소의 형상

그림 3. 절점 병합에 의한 3점점 요소의 형상함수

4 절점 사변형 요소의 기하학적 형상 및 변위는

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 N_i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 N_i \mathbf{u}_i \quad (2.13)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
 N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

이고 3 절점 요소의 기하학적 형상에서 $x_3 = x_4$ 이므로 위 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 x &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \\
 &= N_1x_1 + N_2x_2 + N'_3x_3
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

따라서 절점 병합 3 각형의 형상함수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
 N'_3 &= N_3 + N_4 = \frac{1}{2}(1+\eta)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.3 절점 병합시 야기되는 문제점

2.2 절에서 논한 바와 같은 단순한 절점 병합만으로는 2.1 절에서 제시한 NPB4 요소로부터 삼각형 요소를 구현하지 못하는데 그 이유는 다음과 같다. 위의 그림 3 과 같이 3 번 절점과 4 번 절점을 병합하면 식 (2.10)에서 shear part 에 제안된 \tilde{B}_s (Oate,1992)는 적분점(sampling point)를 요소의 변 가운데에 잡아 적분하고 그 값을 외삽보간(extrapolation)하는 개념인데, 위와 같이 절점을 병합하고 나면 새로 생성된 3 번 절점이 sampling point 와 겹쳐지면서 Jacobian 의 절댓값 $|J|$ 가 0 이 되어 특이성(singularity)이 발생한다.

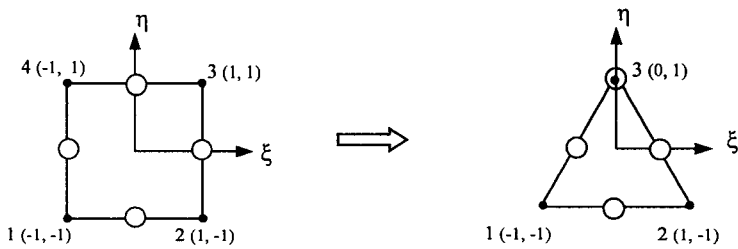


그림 4. 절점 병합에 의한 3점 요소의 sampling point

또 다른 문제점은 비적합 변위형에 관한 것이다. 즉, 그림 2 의 비적합 변위형 \bar{N}_i^4 는 4 절점 요소의 거동을 개선시키기 위한 것이므로 이것을 그대로 절점병합에 적용하게 되면 거동이 개선되지 못하고 엉뚱한 결과를 초래한다. \bar{N}_i^4 를 예로 들면, 3 번 절점과 4 번 절점이 병합될 때 그 사이의 값이 0 이 아닐 경우는 새로 생성된 3 번 절점에서의 값이 singular 가 됨을 관찰할 수 있었다.

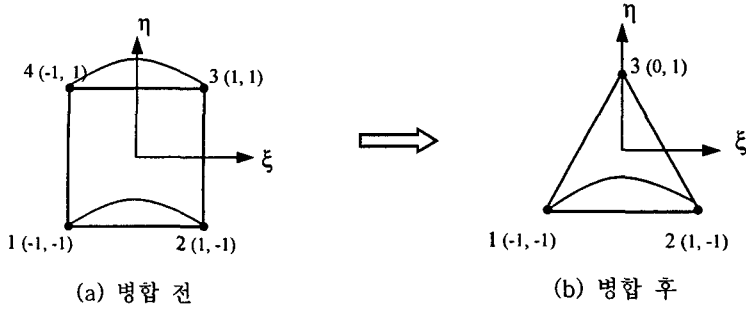


그림 5. 3점점 요소 형상함수 \bar{N}_1^4 의 singularity problem

2.4 절점 병합 3점점 평판힘 요소의 정식화

전단잠김 현상을 제거하기 위해서는 대체 전단 변형률장을 도입할 필요가 있다(최창근, 2002). 2.3 절에서 논한 바와 같이 $\bar{\mathbf{B}}_s$ 에 의한 절점병합은 특이성 문제를 야기하므로, 본 연구에서는 절점병합시 식 (2.10)의 bending part는 그대로 병합하고, shear part는 $\tilde{\mathbf{B}}_s$ 를 Donea 와 Lamain(1987)이 제안한 대체전단 변형률장 $\hat{\mathbf{B}}_s$ 로 교체하고 다음과 같이 변위-변형률 관계 행렬을 구성하였다. 또한, 4 절점 요소용으로 사용된 비적합 변위형의 직접적인 적용이 불가능하므로, 비적합 변위형을 고려하지 않았다.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b & \bar{\mathbf{B}}_b \\ \tilde{\mathbf{B}}_s & \bar{\mathbf{B}}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b \\ \hat{\mathbf{B}}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

여기서,

$$\hat{\mathbf{B}}_s = \sum [\hat{\mathbf{B}}_{si}] \quad (2.18)$$

$$[\hat{\mathbf{B}}_{si}] = \begin{bmatrix} N_{i,y} & L_i^\alpha & L_i^\beta \\ N_{i,x} & M_i^\alpha & M_i^\beta \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\langle L^{\theta_x} \rangle = [L]\{V_y\}, \quad \langle L^{\theta_y} \rangle = [L]\{V_x\} \quad (2.20)$$

$$\langle M^{\theta_x} \rangle = [M]\{V_y\}, \quad \langle M^{\theta_y} \rangle = [M]\{V_x\} \quad (2.21)$$

$$[L] = \frac{1}{8J} \begin{bmatrix} -x_{3\eta} & 0 & x_{2\xi} & 0 \\ -x_{3\eta} & 0 & 0 & x_{2\xi} \\ 0 & -x_{3\eta} & 0 & x_{2\xi} \\ 0 & -x_{3\eta} & x_{2\xi} & 0 \end{bmatrix}, \quad [M] = \frac{1}{8J} \begin{bmatrix} y_{3\eta} & 0 & -y_{2\xi} & 0 \\ y_{3\eta} & 0 & 0 & -y_{2\xi} \\ 0 & y_{3\eta} & 0 & -y_{2\xi} \\ 0 & y_{3\eta} & -y_{2\xi} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

여기서 $\{V_x\}$ 와 $\{V_y\}$ 는 식(2.23)과 같다.

$$\{V_x\} = \begin{Bmatrix} (1-\eta)(x_2 - x_1) \\ (1+\eta)(x_3 - x_4) \\ (1-\xi)(x_4 - x_1) \\ (1+\xi)(x_3 - x_2) \end{Bmatrix}, \quad \{V_y\} = - \begin{Bmatrix} (1-\eta)(y_2 - y_1) \\ (1+\eta)(y_3 - y_4) \\ (1-\xi)(y_4 - y_1) \\ (1+\xi)(y_3 - y_2) \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

3 번과 4 번 절점을 병합할 경우 $x_3 = x_4$, $y_3 = y_4$ 를 위 식에 대입하여 간단히 절점 병합된 3 절점 요소의 대체전단 변형률장을 표현할 수 있다. 병합된 3 절점 요소의 전단잠김현상을 제거하기 위해 다음과 같은 새로운 대체전단 변형률장 \hat{B}_s 이 적용된 강성행렬은 다음과 같다.

$$K = \int_V B_s^T D_s B_s dV + \int_V \hat{B}_s^T D_s \hat{B}_s dV \quad (2.24)$$

3. 수치시험

3.1 고유치 시험 (Eigenvalue Test)

본 연구에서 개발된 요소에서의 가상적인 제로에너지모드 발생 여부를 검증하기 위하여 개별 요소 강성행렬을 이용한 고유치해석을 수행하였다. 절점 병합 삼각형 평판요소 는 구속조건이 없는 하나의 요소에 대하여 3 개의 강체운동모드(rigid body mode)가 존재하여야 한다. 변의 길이 1.0 이고 탄성계수 $1.0E+04$, 포아손비 0.25, 두께 1.0 인 정삼각형 단일 체는 모델에 대한 수치실험결과 개발된 요소는 강체운동을 표현하기 위한 3 개의 제로에너지모드(zero energy mode)를 가지며, 거짓제로에너지모드(spurious zero energy mode)는 발생하지 않음을 알 수 있다.

3.2 조각 시험 (Patch Test)

본 연구에서 개발한 요소가 일정변형률상태(constant strain state)를 표현할 수 있는가를 검증하기 위해 조각시험을 수행하였다. 조각시험은 그림 6 -a 와 같이 10 개의 찌그러진 요소로 구성된 조각에 대하여 수행하였다. 개발된 요소는 그림 6 -b,c,d 에 나타난 바와 같은 순수 휨(pure bending), 순수 전단(pure shearing), 순수 뒤틀림(pure twisting) 등 3 종류의 조각시험에 대해 일정한 응력상태를 보여 조각시험을 통과하였다.

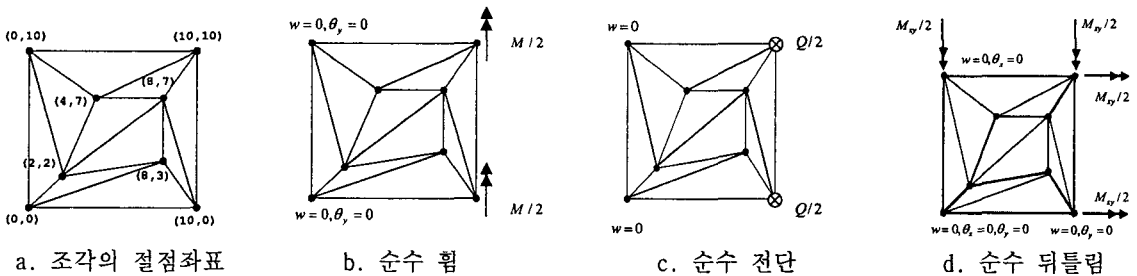


그림 6. 조각시험

3.3 전단 잠김 시험 (Shear Locking Test)

그림 7 에서의 2 번과 3 번 절점에 집중하중을 받는 단변고정 평판의 두께를 변화시키면서 전단잠김 현상의 발생 유무를 시험하였다. 시험결과를 그림 8 에 표시하였으며, 요소변의 길이대 두께의 비가 10,000 이 될 때까지도 전단잠김 현상은 발생하지 않는 것으로 나타났다.

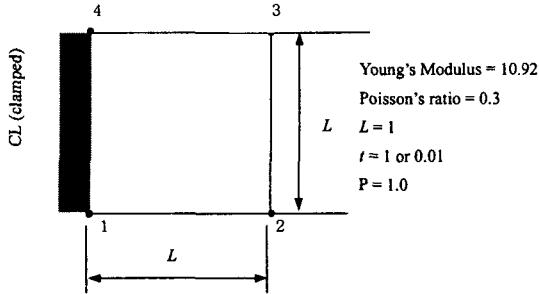


그림 7. 단변 고정 평판

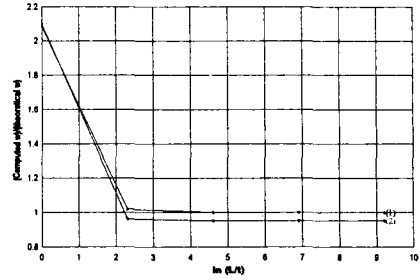


그림 8. 전단잠김 시험

(1)은 NPB4요소, (2)는 본 연구의 절점병합요소

3.4 원형 평판 (Circular Plate Test)

지름이 10.0 인 원형 평판을 1/4 모델링하여 수치해석을 수행하였다. 두께 h, 탄성계수 10.92, 포아송비 0.3 이며 하중은 $q=1.0$ 의 분포하중을 작용시켰고, 고정지지와 단순지지의 경계조건에 대하여 모두 수행하였다. 그림 9 와 같이 사용된 요소 수에 따라 3 가지 경우로 나누어서 해석을 수행하였고 (표 1), 타 연구자의 결과와 비교하여 다음의 표 2 에 나타내었다.

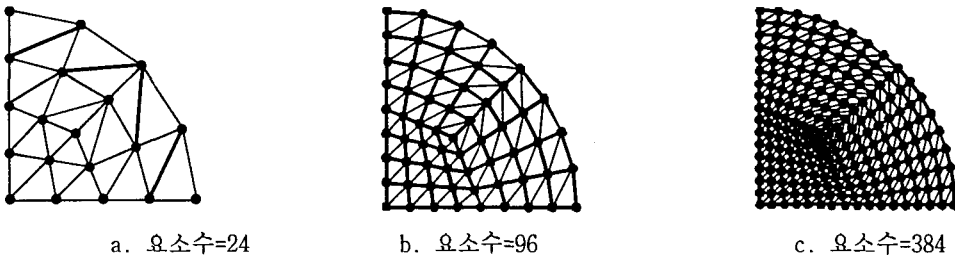


그림 9. 원형 평판의 해석 (1/4 모델)

표 1. 원형 평판 수치해석 결과

Element		24	96	382	Analytic solution
SS (simply supported)	Thick plate R/h = 2	3.203	3.252	3.261	3.262
	Thin plate R/h = 50	36611	39150	39718	39831
Element		24	96	382	Analytic solution
CL (Clamped)	Thick plate R/h = 2	1.280	1.326	1.336	1.339
	Thin plate R/h = 50	5471	9165	9704	9783.5

표 2. 고정지지된 원형 평판 수치해석 결과 비교

		i-node element		
		4-node	3-node	
Clamped thick plate (R/h = 2)	체눈(Mesh)	Choi and Lee NPB4	Batoz and Katili(1992)	본 연구
Element	12(24)	1.325	1.335	1.280
	48(96)	1.336	1.339	1.326
	192(384)	1.338	N/A	1.336
	이론해	1.339		

(): 절점 병합으로 사절점 요소보다 늘어난 요소의 개수

4. 결론

본 연구에서는 4 절점 Mindlin 평판휨요소의 절점을 병합한 3 각형 평판휨요소를 제안하였다. 또한, 기 개발된 NPB4 요소를 절점 병합하여 3 절점 요소를 개발할 때 야기되는 문제점들을 고찰하였다. 절점을 병합하면서 발생하는 문제를 해결하기 위하여 새로운 대체전단 변형률장이 도입되었고, 이로 인하여 전단잠김 현상을 제거하였다. 절점 병합을 통하여 4 절점 평판 휨요소(NPB4)의 코드를 공유할 수 있으므로, 프로그램의 효율화가 가능함을 확인하였다. 다양한 수치해석 결과, 제안된 요소는 조각시험을 통과하며 어떠한 가상적인 제로에너지모드도 지니지 않으므로 요소 거동을 신뢰할 수 있음을 입증하였다. 그러나 조악한(rough) 체눈의 거동이 떨어지는 현상을 볼 수 있는데, 향후 연구에서는 절점 병합 삼각형의 개념에 적합한 비적합 변위형(non-conforming)을 적용하면 초기 수렴도가 향상될 것으로 판단된다. 본 연구에서 개발된 평판휨요소는 회전자유도를 갖는 평면응력요소와 함께 평면셸(flat shell)요소의 구성에 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

1. 최창근(2002), 유한요소법, 테크노 프레스.
2. 최창근, 이태열, 정근영(2001) “개선된 비적합 변위형과 대체전단 변형률장을 이용한 4 절점 평판 휨 요소”, 토목학회 논문집, 제 21 권, 제 2 호, pp. 279-286.
3. 최창근, 이태열, 정근영(2001) “개선된 비적합 변위형과 대체전단 변형률장을 이용한 4 절점 평판 휨 요소”, 토목학회 논문집, 제 21 권, 제 2 호, pp. 279-286.
4. Ahmand, S., Iron, B.M. and Zienkiewicz, O.C. (1970) Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2, pp. 419-451.
5. Batoz, J. and Katili, I. (1992) On a simple triangular Reissner/Mindlin plate element based in incompatible modes and discrete constraints, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 35, pp. 1603-1632.
6. Choi, C.K. and Lee, T.Y., (2002) Directly modified non-conforming Modes for 4-node Mindlin plate-bending element, *Engineering Mechanics*, ASCE, Submitted.
7. Donea, J. and Lamain, G. (1987) A Modified representation of transverse shear in C^0 quadrilateral plate elements, *Comp. Methods in Appl. Mech. Eng.*, 63, pp. 183-207.
8. Hinton, E. and Huang, H.C. (1986), A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields. *Computers and Structures* 23, pp. 409-431
9. Kim, S.H. and Choi, C.K. (1992) Improvement of Quadratic Finite Element for Mindlin Plate Bending, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 34, pp. 197-208.
10. Wilson, E.L. and Ibrahimbegovic, A. (1990) Use of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffnesses or stresses, *Finite Elements in Analysis and Design*, 7, pp. 229-241.