

## B-spline volume 변형체의 실시간 시뮬레이션 II Real-time simulation on B-spline deformable volume-part II

전 성 기\*                      조 맹 효\*\*  
Jun, Seong Ki                Maenghyo Cho

---

### ABSTRACT

Since our physical world cannot be modeled as rigid body, deformable object models are important. For real-time simulation of elastic object, it must be guaranteed by its exact solution and low-latency computational cost. In this paper, we describe the boundary integral equation formulation of linear elastic body and related boundary element method(BEM). The deformation of elastic body can be effectively solved with low run-time computational costs, using precomputed Green Function and fast low-rank updates based on Capacitance Matrix Algorithm.

---

### 1. 서      론

오늘날 컴퓨터 성능의 급속한 발달에 힘입어 컴퓨터 그래픽 관련 산업(영화, 게임, 의료, 기계 등)에 대한 관심이 높아지고 있으며 응용 분야 연구가 활발히 진행되고 있다. 이러한 컴퓨터 그래픽의 응용 분야가 궁극적으로 추구하는 바 중에 하나는 가상 현실 환경의 구축이다. 현재의 가상 현실 환경에서는 실제 세계에서 사람의 오감을 사실적으로 만족시키기에는 아직 해결해야 할 문제점이 많이 남아있다. 컴퓨터 그래픽 기술이 시각적 가상 현실 환경을 구축하는데 차지하는 비중은 절대적이다. 하지만 현재까지의 컴퓨터 그래픽 분야에서 주로 사용되고 있는 시각적 가상 현실은 주로 강체 운동에 국한되어 있었으며 변형체의 변형 시뮬레이션은 주로 제작자의 추측에 의존하고 있기 때문에 변형체의 실시간 시뮬레이션에 대한 연구는 컴퓨터 그래픽 응용 분야에서 중요한 관심사 중에 하나였다.

또한 최근의 햅틱 관련 연구가 활발해지면서 변형체의 실시간 시뮬레이션에 대한 관심이 높아지고 있다. 햅틱 장비를 이용한 변형체의 실시간 시뮬레이션에서는 변형체를 사실적으로 표현하기 위한 정확한 변위와 사용자에게 정확한 반력을 제공해 주어야 한다. 이와 함께 변형체의 변위와 반력의 실시간 해석이 선행되어야 하기 때문에 두 가지 조건을 모두 만족시키려는 연구가 활발히 진행되고 있다. 이러한 연구는 의료, 예술, 오락, 군사 등에서 많은 연구가 진행되고 있다. 그 예로 Morten Bro-Nielsens<sup>1)</sup> 등은 유한요소법을 이용한 간수술 시뮬레이션에 관한 연구를 수행하였으며 미리 계산된 탄성체의 유한요소법을 이용한 수술 시뮬레이션에 대한 연구도 있었다. Marcy<sup>2)</sup> 등은 햅틱 장비를 이용한 조각 시뮬레이션을 개발하였으며 Wright-Patterson Air Force<sup>3)</sup>에서는 승무원의 훈련장비를 개발하였다.

본 논문의 part I에서는 일반적으로 캐드 시스템에서 사용되는 Non-Uniform B-Spline(NUBS)을 이용한 surface 생성과 surface 생성에 사용된 조정점의 변화에 의해 변형체의 geometry를 변경시켜 경계요소법과의 연동에 관한 내용을 다루고 있다.

---

\* 서울대학교 기계항공공학부 석사과정  
\*\* 서울대학교 기계항공공학부 부교수

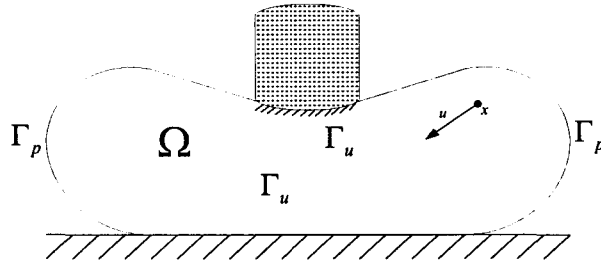


그림 1 탄성 변형체의 영역과 경계 기호

본 연구에서는 Pai<sup>45)</sup>가 제안한 경계치 문제의 경계요소법과 미리 계산된 Green Function을 이용한 Capacitance Matrix Algorithm을 적용하여 경계치만 변경되는 경우와 경계조건과 경계치가 함께 변화하는 탄성 변형체의 해를 실시간으로 구하는 방법을 설명하였으며 이를 실시간 시뮬레이션으로 구현하였다.

본 연구에서 산출된 탄성 변형체의 변위와 반력의 실시간 계산을 이용하면 햅틱 장비와의 연동이 가능하리라 사료된다.

## 2. 탄성 변형체의 경계요소 모델링

본 연구에서는 물체의 물리적 특성이 정적 선형 탄성체라는 가정을 바탕으로 한다. 선형 탄성 변형체는 작은 변형에 대하여 정확한 해를 구할 수 있기 때문에 공학적 해석에 흔히 사용하는 가정이다. 이번 장에서는 경계요소법을 이용한 탄성 변형체의 일반적인 해를 구하는 방법과 경계치가 변화하는 경우에 대한 경계치 문제의 해를 실시간으로 구할 수 있는 방법에 대하여 다루도록 한다.

### 2.1 경계치 문제

본 논문에서는 그림 1과 같은 기호로 변형체의 영역과 경계를 표시하였다. 변형체는 경계  $\Gamma$ 로 둘러싸인 영역  $\Omega \subset R^3$ 으로 표시할 수 있으며 변형에 의한 변형체 내의 한 점  $x \in \Omega$ 의 변위는  $u$ 로 표시한다. 등방성 매체의 선형 탄성 문제의 지배방정식은 평형방정식, 구성방정식 그리고 변형률-변위관계식을 이용하면 변위로만 표현된 나비에(Navier) 방정식 식 (1)을 나타낼 수 있다.

$$G \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} \right) + b_i = 0 \quad (1)$$

식 (1)의 나비에 방정식을 벡터 연산자로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{N}u + \mathbf{b} = 0 \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{N}$ 은 탄성체의 물리적 특성을 포함하고 있는 선형 이차 미분 연산자이며  $\mathbf{b}$ 는 체적력을 의미한다. 나비에 방정식은 탄성체의 모든 점에서 만족해야 하고  $\mathbf{N}, u$  그리고  $\mathbf{b}$ 은 위치에 대한 함수이다. 본 연구에서는 체적력을 무시하기로 한다.

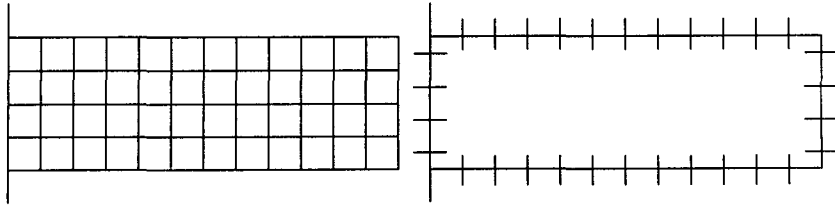


그림 5 유한요소법과 경계요소법의 이산화 비교

변형체의 경계조건은 지지대와 변형체가 접촉되어 있는 부분과 접촉체와 변형체가 접촉되어 있는 부분에는 변위경계조건  $\Gamma_u$ 이 기술되어야 하며 그 외의 자유롭게 움직일 수 있는(접촉력=0) 접촉력 경계조건  $\Gamma_p$ 이 기술되어야 한다. 나비에 방정식과 이 두 가지 경계 조건으로 경계치 문제를 구성할 수 있다.

이러한 변형체의 경계치 문제를 풀기 위해 주로 사용하는 해석 방법으로 유한요소법과 경계요소법이 있다. 유한요소법은 변형체 해석에 널리 사용되는 방법으로 변형체의 경계뿐만 아니라 영역 전체를 이산화 하기 때문에 경계와 영역 전체 절점의 변위를 구할 수 있다. 하지만 변형체의 변형을 컴퓨터 그래픽으로 표현하기 위해서 필요한 절점은 경계의 절점이므로 유한요소법에 의한 변형체의 해는 효율적이지 못하다. 또한 접촉이 일어난 경계 절점의 반력을 계산하기 위해서 후처리 과정을 수반해야 하기 때문에 실시간 시뮬레이션 측면에서는 큰 단점으로 작용한다.

이와 달리 경계요소법은 경계만 이산화 하는 과정을 통한 방법이므로 변형체의 변형을 그래픽으로 나타내는데 필요한 경계의 변위만을 제공한다. 또한 경계요소법의 해는 경계 절점의 반력도 함께 제공하기 때문에 후처리 과정을 통한 반력을 계산하는 유한요소법에 비하여 효율적이다.

또한 유한요소법과 경계요소법에 의한 변형체 해석에 있어서 변형체의 이산화 과정을 통하여 변형체의 해를 구하기 때문에 해의 정확성을 높이기 위해서는 절점수를 증가해야 한다. 따라서 같은 절점수를 갖는 변형체의 해석에 있어서 경계만 이산화한 경계요소법이 유한요소법에 비하여 더 효율적이라 할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 탄성 변형체의 실시간 시뮬레이션을 위해 경계요소법을 이용하였다.

## 2.2 경계 요소 모델

변형체의 실시간 시뮬레이션을 구현하기 위해서는 경계 절점에서 기술된 변위  $\bar{u}$ 와 접촉력  $\bar{p}$  뿐만 아니라 경계치 문제를 통해 계산된 경계 절점의 변위  $u$ 와 접촉력  $p$ 가 필요하다. 각 경계 절점마다 변위나 접촉력 중에 하나는 반드시 기술되어야 한다. 따라서 변위가 기술된 경계 절점을  $\Lambda_u$ 로 접촉력이 기술된 경계 절점을  $\Lambda_p$ 로 나타낸다면  $\Lambda_u \cap \Lambda_p = 0$ 과  $\Lambda_u \cup \Lambda_p = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 을 만족해야 한다.

식 (2)의 나비에 방정식을 경계 적분 식으로 표현하면 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$cu + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma + \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma = 0 \quad (3)$$

여기서  $c$ 는 경계 geometry만의 함수이고  $u^*$ 와  $p^*$ 는 탄성체의 물리적 성질에 따른 fundamental solution이다. 식 (3)을 경계요소법으로 이산화 과정을 거쳐 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$0 = \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{p} = \sum_{j=1}^n h_{ij} u_j + \sum_{j=1}^n g_{ij} p_j \quad (4)$$

여기서  $\mathbf{H}$ 와  $\mathbf{G}$ 는  $n \times n$ 의 크기를 갖는 블록 행렬이다. 2.1절에서 설명한 탄성 변형체의 경계조건에 따라  $\mathbf{H}$ 와  $\mathbf{G}$  행렬을 경계조건이 기술된 절점에 해당하는 블록 열(column)은 좌항으로 그리고 경계조건이 기술되지 않은 절점에 해당하는 블록 열은 우항으로 이동시킨다. 이와 유사하게  $\mathbf{u}$ 와  $\mathbf{p}$  벡터도 경계조건에 따라서 이동시킨다. 이를 식으로 표현하면 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{.j} &= \begin{cases} -\mathbf{G}_{.j} : j \in \Lambda_u \\ \mathbf{H}_{.j} : j \in \Lambda_p \end{cases} & \mathbf{v}_{.j} &= \begin{cases} -\mathbf{p}_{.j} : j \in \Lambda_u \\ \mathbf{u}_{.j} : j \in \Lambda_p \end{cases} \\ \bar{\mathbf{A}}_{.j} &= \begin{cases} -\mathbf{H}_{.j} : j \in \Lambda_u \\ \mathbf{G}_{.j} : j \in \Lambda_p \end{cases} & \bar{\mathbf{v}}_{.j} &= \begin{cases} -\bar{\mathbf{u}}_{.j} : j \in \Lambda_u \\ \bar{\mathbf{p}}_{.j} : j \in \Lambda_p \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

최종적으로 변형체의 해는 식 (6)을 이용해서 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (6)$$

### 2.3 Green Function을 이용한 경계치 문제

변형체의 실시간 해석의 한 예로 경계조건은 변화 없이 경계치만 변화하는 경우 식 (6)을 이용하여 미리 Green Function( $\mathcal{E}$ )를 계산하여 해를 실시간으로 구할 수 있다. 경계조건이 변화하지 않기 때문에 초기에  $\mathbf{H}$ 와  $\mathbf{G}$ 의 블록 열의 이동하면 더 이상의 이동이 필요하지 않기 때문에 식 (7)로 표현한 Green Function을 미리 계산하여 놓는다.

$$\mathcal{E} = -\mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{A}} \quad (7)$$

따라서 경계조건이 변화하지 않고 경계치만 변화하는 변형체의 해는 식 (8)을 이용하여 실시간으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{v} = -\mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{A}} = \mathcal{E}\bar{\mathbf{v}} \quad (8)$$

### 3. Capacitance Matrix Algorithm

변형체의 경계치만 변화하는 경우의 시뮬레이션은 미리 계산된 Green Function을 이용하면 그 해를 실시간으로 구할 수 있었다. 그러나 변형체의 실시간 시뮬레이션에서는 변형체의 경계치만 변화하는 경우는 극히 드물다. 따라서 보다 일반적인 경우로서 변형체의 경계치 뿐만 아니라 경계 조건도 함께 변화하는 경우에 대하여 알아보려고 한다. 변형체의 경계치와 경계 조건이 함께 변화하는 경계치 문제는 기준 경계치 문제(Reference Boundary Value Problem)에서 미리 계산된 Green Function을 이용한 Capacitance Matrix Algorithm으로 실시간 시뮬레이션이 가능하게 된다.<sup>45)</sup>

### 3.1 기준 경계치 문제(Reference Boundary Value Problem)

변형체의 경계치와 경계 조건이 함께 변화하는 경우에 대한 실시간 시뮬레이션을 구현하기 위해서는 Green Function을 미리 계산해야 한다. 일반적으로 Green Function을 정의하기 위한 변형체의 경계치 문제는 다음 그림과 같은 경계 조건을 갖는다. 즉 평평한 지지대에 변형체가 고정되어 있는 경계에서는 변위가 기술되어 있으며 그 외의 경계에서는 어떠한 표면력도 가해지지 않는 경계 조건을 갖는다. RBVP의 경계 조건과 시뮬레이션에 사용될 BVP과 구별하기 위해서 RBVP의 경계조건을  $\Lambda_p^0$ 과  $\Lambda_u^0$ 로 나타낸다.

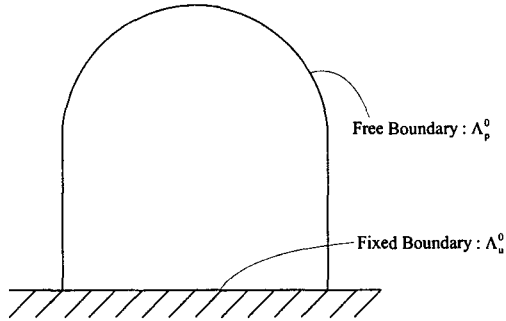


그림 3 기준경계치 문제의 일차적인 경계 조건

### 3.2 Capacitance Matrix Algorithm

변형체의 시뮬레이션 과정에서 풀어야 하는 새로운 경계치 문제(BVP)의 경계 조건은 RBVP에서 변위가 기술된  $\Lambda_u^0$ 에서의 경계 조건과 경계치는 아무런 변화가 없으나 접촉력이 기술된  $\Lambda_p^0$ 에 접촉체가 접촉하기 때문에 새로운 경계 조건 즉 변위가 새롭게 기술되어야 한다. 이러한 경계치 문제(BVP)의 해는 RBVP에서 미리 계산된 Green Function을 이용한 Capacitance Matrix Algorithm을 적용하면 실시간으로 그 해를 구할 수 있다. Capacitance Matrix Algorithm은 다음과 같다.

먼저 RBVP 경계 조건이 변화하는 절점의 색인  $S = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_s\}$ 을 만든다. 이 절점 색인과 RBVP에서 계산된  $A_0$ 와  $\bar{A}_0$ 를 이용하여 2.2절에서 언급했듯이 새로운 경계치 문제를 풀기 위한 행렬  $A$ 와  $\bar{A}$ 를 다음과 같이 구성한다.

$$\begin{aligned} A &= A_0 + (\bar{A}_0 - A_0)E E^T \\ \bar{A} &= \bar{A}_0 + (A_0 - \bar{A}_0)E E^T \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $E$ 는  $n \times n$ 의 크기를 갖는 단위 블록 행렬  $I$ 에서 경계 조건이 변경된 절점 색인  $S$ 를 이용하여 블록 열을 선택하여 만든  $n \times s$ 의 행렬이다.

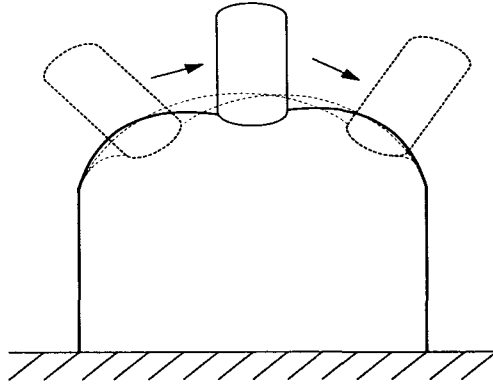


그림 4 경계 조건과 경계치가 변화하는 변형체

$$\mathbf{E} = [\mathbf{I}_{s_1}, \mathbf{I}_{s_2}, \dots, \mathbf{I}_{s_s}] \quad (10)$$

따라서 새로운 BVP의 해는

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{z} = -\mathbf{A}^{-1} \overline{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{v}} \quad (11)$$

로 나타낼 수 있다.

그러나 식 (11)에서 볼 수 있듯이 행렬  $\mathbf{A}$ 의 크기는  $n \times n$ 이기 때문에 이 행렬의 역행렬을 구하는데 시간이 많이 소요된다. 즉 경계 조건이 변화할 때마다  $\mathbf{A}^{-1}$ 를 구하는 과정으로 인해 실시간 시뮬레이션이 불가능해진다. 따라서  $\mathbf{A}^{-1}$ 를 구하는 과정 대신에 식 (9)에서 구한 행렬  $\mathbf{A}$ 를 Sherman-Morrison-Woodbury 식<sup>7)</sup>에 적용하면 다음과 같이  $\mathbf{A}^{-1}$ 을 Green Function을 이용하여 표현할 수 있다.

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_0^{-1} + (\mathbf{I} + \mathbf{E}) \mathbf{E} (-\mathbf{E}^T \mathbf{E} \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{A}_0^{-1} \quad (12)$$

(3.4)

식 (12)를 식 (11)에 대입하게 되면 새로운 BVP의 해는 최종적으로 RBVP에서 미리 계산된 Green Function만으로 표현 될 수 있다.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + (\mathbf{E} + (\mathbf{E} \mathbf{E}) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{E}^T) \mathbf{v}^{(0)} \quad (13)$$

여기서 capacitance matrix  $\mathbf{C}$ 는 Green Function의 부분 행렬로 구성된다.

$$\mathbf{C} = -\mathbf{E}^T \mathbf{E} \mathbf{E} \quad (14)$$

또한 capacitance matrix  $\mathbf{C}$ 의 크기는  $s \times s$ 이기 때문에 capacitance matrix의 역행렬  $\mathbf{C}^{-1}$ 를 구하는데 소요되는 시간은 극히 짧게 된다.

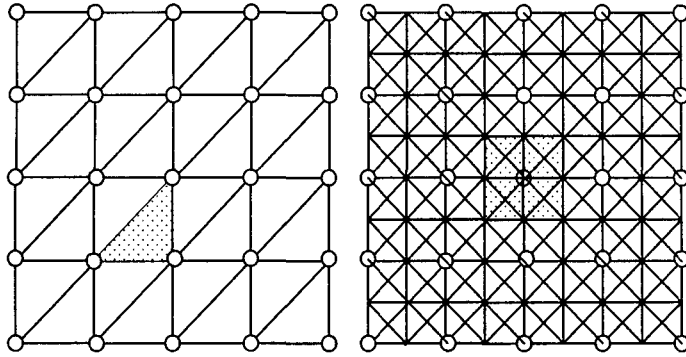


그림 5(a) 경계요소법에 사용된 격자 (b) 시물레이션에 사용된 격자  
식 (13)의  $\mathbf{v}^{(0)}$ 는 식 (15)로 표현된다.

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{z} = [\mathcal{E}(\mathbf{I} - \mathbf{E}\mathbf{E}^T) - \mathbf{E}\mathbf{E}^T] \bar{\mathbf{v}} \quad (15)$$

따라서 새로운 BVP의 해는 미리 계산된 Green Function  $\mathcal{E}$ 과  $s \times s$ 의 크기를 갖는 capacitance matrix  $\mathbf{C}$ 를 이용하여 구할 수 있다.

#### 4. 예제

경계요소법에 사용되는 요소의 종류로는 constant element, linear element, discontinuous element, higher element<sup>6)</sup> 등이 있으나 본 연구에서는 해의 정확성과 효율성을 고려하여 linear element를 사용하여 경계요소법을 적용하였다.

그림 5-1은 경계요소법 계산에 사용된 linear element의 격자와 절점을 2차원으로 표시한 그림이고 그림 5-2는 컴퓨터 그래픽으로 변형체를 묘사하기 위한 격자와 절점을 나타낸 그림이다. 변형체에 접촉체를 이용하여 경계 절점에 변위를 부과하기 위해서는 절점을 접촉해야 한다. 그러나 절점을 접촉할 경우 접촉체가 절점과 절점 사이를 움직이는 동안 시물레이션은 연속적이지 못하기 때문에 element를 접촉하면 그에 해당하는 절점이 접촉하는 방식을 취해야 한다. 그림 5-1은 하나의 element가 접촉되면 3개의 절점이 접촉되는 결과가 얻어지므로 capacitance matrix의 크기가 9-by-9의 크기를 갖게 된다. 또한 격자가 삼각형 모양을 띠게 되므로 변형체를 사실적으로 묘사하지 못하는 단점이 있다. 따라서 변형체 실시간 시물레이션을 좀 더 사실적으로 표현하고 연속적인 변화를 보이기 위해 그림 5-2에서 보듯이 경계요소법을 적용하기 위한 격자를 이용하여 좀 더 세분화하여 시물레이션을 위한 격자를 다시 구성하였다. 따라서 시물레이션을 위한 격자는 오직 하나의 절점만이 접촉하게 되므로 capacitance matrix의 크기가 3-by-3의 크기를 갖게 되므로 계산 시간이 더욱 효율적이고 더 부드러운 접촉체 이동을 보장하게 된다.

그림 6과 7은 탄성 변형체인 실린더와 구의 실시간 시물레이션을 구현한 프로그램이다. 본 연구에 의해 제작된 프로그램에서 변형체를 표현하기 위해 OpenGL 함수를 사용하였으며 Visual C++ MFC를 기반으로 제작하였다. 프로그램의 작동은 마우스의 끝점이 요소에 위치함에 따라 해당하는 절점의 변위가 프로그램 내로 입력되고 capacitance matrix algorithm에 의하여 변형체의 모든 절점에서의 변위와 접촉력이 실시간으로 계산되어 그 결과를 시물레이션 할 수 있다.

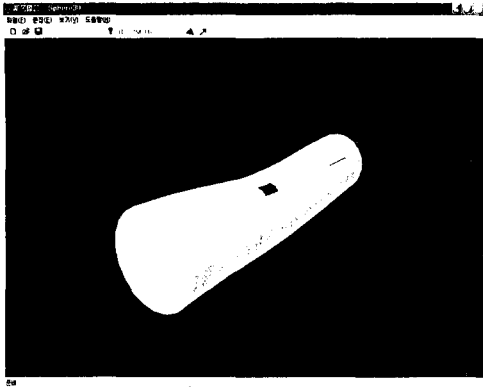


그림 6 실린더의 실시간 시뮬레이션 프로그램

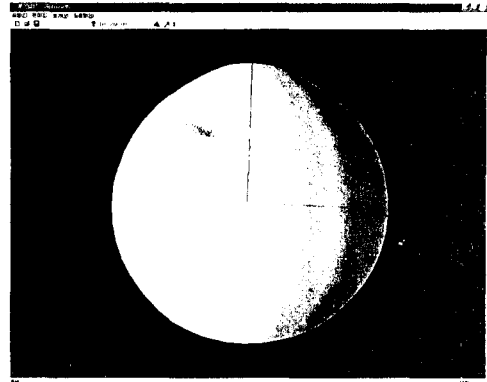


그림 7 구의 실시간 시뮬레이션 프로그램

## 5. 결론

본 연구에서는 탄성 변형체의 실시간 해석 및 시뮬레이션 구현 방법에 대하여 소개하였다. 변형체의 실시간 해석을 위하여 경계요소법을 적용한 기준 경계치 문제에서 미리 계산된 Green Function 행렬과 capacitance matrix algorithm을 이용하였으며 그 결과를 이용하여 변형체의 실시간 시뮬레이션을 컴퓨터 그래픽을 이용하여 구현하였다.

본 연구는 앞으로 유한요소법을 이용한 탄성체 실시간 시뮬레이션에 대하여 연구를 진행할 예정이며 이를 바탕으로 비선형 거동에 대한 실시간 시뮬레이션 그리고 파괴 문제에 대한 실시간 시뮬레이션으로 확장할 계획이다.

## 참고 문헌

1. Morten Bro-Nielsen and Stephane Cotin. "Real-time volumetric deformable models for surgery simulation using finite elements and condensation," *Computer Graphics Forum*, Vol.15, No.3, 1996 pp57-66.
2. Marcy, G., Temkin, B., Goreman, P.J., and Krummel, T.M.(2000). "Tatile Max:A haptic interface for 3D Studio Max". In *Proceedings of the Third PHANTOM User's Group. PUG98*. AI Technical Report no. 1643 and RLE Technical Report no.624. Cambridge, MA: MIT
3. Wright-Patterson Air Force Base(1997). (PAM #97-091) "Synthesized Immersion Research Environment(SIRE)." Retrieved from [www.wpafb.mil/factshts/scitech/sire97.htm](http://www.wpafb.mil/factshts/scitech/sire97.htm)
4. Doug L. James and Dinesh K. Pai, "A unified treatment of elastostatic contact simulation for real time haptics." *Haptic-e*, Vol.2. 2001
5. Doug L. James and Dinesh K. Pai, "ArtDefo:Accurate real time deformable objects." *Computer Graphics*, Vol. 33, 1999, p65~72
6. Prem K. Kytbe. "Introduction to boundary element methods", 1995, CRC Press Inc.
7. W.W.Hager. Updating the inverse of a Matrix. In *SIAM Review*, Vol. 31, No.2, 1989, pp211-239
8. Margaret L. McLaughlin, Joao P. Hespanha, Gaurav S. Sukhatme, "Touch in virtual environments", 2002, Prentice Hall PTR.