

방사형 다층간분리된 보의 자유진동

Free Vibration of Radially Multi-Delaminated Beams

이 성 희* 마 석 오** 한 병 기*** 박 대 효****
Lee, Sunghye Ma, Seokoh Han, Byoungkee Park, Taehyo

ABSTRACT

Free vibration analysis of radially multi-delaminated beams with through-the-width multi-delamination is performed in the present study. The multiple delaminations are considered to be in a radial manner through the thickness from the top surface of the beam. The natural frequencies of the radially multi-delaminated beams are calculated from a new algorithm that is based on the single compound delaminated beam model. That is, beams with radial multi-delaminations are regarded as the sum of a single compound delaminated beam that is the single sub-delaminated beam from the top surface of global beam. Each result of frequency equation for the single delaminated beam with unknown boundary conditions obtained through continuity conditions is updated to the next one. With these sequential operations, the final frequency equation of radially multi-delaminated beams is obtained for both ends boundary conditions of global beam. The numerical results carried out for the beams are compared with those of some references to give the reliance on the proposed algorithm and to investigate the effects of the shape, number, size of multi-delaminations on the natural frequency. Compared with the other previously presented model, the proposed algorithm is more flexible in modeling and formulating as the total array size of frequency equation is always four by four. Therefore, the proposed algorithm will reduce the effort of user in formulating the physical model to the numerical model.

1. 서 론

층간분리 손상이 존재하는 구조물의 공정 조건에 있어 그 해석은 매우 중요하므로 최근 층간분리 손상에 관한 많은 연구결과가 발전되었다. 층간분리 손상의 주된 원인은 적층 복합재료의 평면 내 성질과 비교할 때 횡방향 인장과 층간 전단 강도가 매우 작기 때문이다. 이는 특히, 압축 하의 적층 구조물에서 전체적인 강성도(stiffness)와 강도(strength)의 감소를 일으킬 수 있다⁽¹⁾.

* 정회원 · 한국생산기술연구원 선임연구원
** 학생회원 · 한양대학교 토목공학과 석사과정
*** 정회원 · 홍익대학교 기계공학과 교수
**** 정회원 · 한양대학교 토목공학과 조교수

층간분리된 보의 진동에 관한 1차원 문제에 대해서는 지난 20여 년간 많은 연구가 수행되었다⁽²⁻⁶⁾. Wang et al.⁽²⁾은 단일 층간분리가 등방성 보의 자유 진동 성질에 미치는 영향을 연구하기 위하여 이론적 모델을 개발하였다. 각 보 요소(segment)는 서로 접촉하지 않으며 자유롭게 진동한다고 가정하였고 고유 진동수를 계산하기 위하여 Euler 보 이론을 사용하였다. 하지만 Mujumdar and Suryanarayan⁽³⁾는 층간분리된 보는 동일한 수직 변위를 갖는다고 가정하고 구속 모델의 해를 제안하였다. Tracy and Pardoan⁽⁴⁾은 Euler 보 이론을 사용하여 보의 중립면에 층간분리를 포함한 대칭 적층 보에서 층간분리가 고유 진동수에 미치는 영향을 제시하였다. 그 결과는 실험과 유한요소 방법에 의하여 얻어진 결과와 비교되었다. Shen and Grady⁽⁵⁾는 Galerkin 방법을 이용하여 층간분리가 적층 보의 고유 진동수와 모드 형상에 미치는 영향을 연구하였다. Shu⁽⁶⁾는 층간분리면에서의 국부 변형과 진동 모드 형상에 대한 다양한 가정 하에 단일과 이중 층간분리를 가진 샌드위치 보의 자유 진동에 대한 이론적 모델을 제안하였고 그 결과를 검증하기 위하여 실험 결과값과 비교하였다. 비록 Shu⁽⁶⁾가 샌드위치 보의 고유 진동수에 이중 층간분리가 미치는 영향을 연구하였지만 이중 층간분리의 크기는 두께방향으로 항상 일정하다고 가정하였다.

현재 다중 층간분리를 가진 1차원 모델에 관한 많은 연구가 보고되었다⁽⁷⁻¹¹⁾. Lin and Wang⁽⁷⁾는 다양한 경계 조건에서 단일과 다중 층간분리를 가진 보의 좌굴 하중을 결정하기 위한 해석 절차를 제안하고 자유, 구속 모드 모델을 고려하였다. 또한 Wang et al.⁽⁸⁾은 일반적인 보-기둥 모델에 근거한 자유 그리고 구속 모델을 제안하였다. 이 연구에서는 자유 모드 가정시 발생할 수 있는 상부보와 하부보 접점이 존재하는 부분에 구속 조건을 적용함으로써 좌굴된 층간분리보의 거동을 성공적으로 보정하였다. Huang and Kardomateas⁽⁹⁾는 다중 층간분리를 가진 적층 보-판의 임계하중을 예측할 수 있는 해를 개발하였는데, 이 연구는 특성방정식의 선형화와 운동학적 연속, 평형 조건에 기초한 비선형 보 이론을 사용하여 유도되었다. Shu⁽¹⁰⁾는 이중 층간분리를 가진 보에 대한 정확한 좌굴 해석을 수행하였다. Jane and Harn⁽¹¹⁾는 환원 휨 강성도 방법(reduced flexural stiffness method)을 이용하여 다중층간분리된 직교이방성 적층 보-판의 좌굴과 진동에 관한 연구를 수행하였다. 이 연구에서는 양단이 단순지지와 고정단을 갖는 보-판에 대한 운동 지배방정식의 급수 해법과 Ritz 방법이 이용되었으며 접점과 비접점 층간분리와 같은 전형적인 다중층간분리가 고려되었다. 또한, 유한요소 방법을 이용한 층간분리 좌굴에 대한 많은 연구가 현재 발표되고 있다⁽¹²⁻²⁰⁾. 그러나, 방사형으로 다중층간분리된 보의 진동 해석과 관련된 연구는 유한요소 해석을 제외하고는 현재까지 발표된 바가 없다.

본 연구에서는 보의 두께 방향에 대해 방사형으로 다중층간분리된 보의 자유 진동 특성을 해석적으로 수행한다. 방사형으로 다중층간분리된 보는 각 층간분리의 양 끝단을 기준으로 가상적으로 수직방향으로 분할되어 손상되지 않은 보의 합으로 이루어 지게 된다. 방사형으로 다중층간분리된 보의 고유 진동수는 단일 복합 층간분리 보(Single Compound Delaminated Beam : SCDB) 모델에 근거한 새로운 알고리즘을 통하여 계산된다. 즉, 방사형으로 다중층간분리된 보의 고유진동수를 구하기 위해서는 전체 보의 윗면으로부터 첫번째 존재하는 층간분리에 대하여 경계조건이 주어지지 않은 단일층간분리보에 대한 제차방정식을 구해야 한다. 이렇게 구해진 식으로부터 첫번째 단일층간분리보는 하나의 결합특성을 포함한 방정식으로 표현되고 이러한 결과는 다음 층간분리부에 적용 가능하게 된다. 이때 미지의 경계조건을 가진 단층간분리 보에 대한 진동수 방정식의 각 결과는 연속 조건을 이용하여 바로 다음의 보에 대하여 새롭게 주어진다. 이러한 순차적인 과정을 통하여 방사형으로 다중층간분리된 보의 최종 진동수 방정식은 전체 보의 양단 경계조건에 대하여 구하여진다. 실제 층간분리된 보의 진동에서 각 보는 서로 접촉하도록 구속되어지지만 본 연구에서는 자유 모드 가정을 적용하였다. 그러므로 각 보 요소는 서로 접촉하지 않으며 자유롭게 진동한다. 비록 두꺼운 보의 동적 거동에서는 수직 전단 변형(transverse shear deformation)의 효과가 매우 중요하지만, 이 효과는 정식화의 단순화를 위하여 본 연구에서 고려하지 않는다. 본 모델을 통한 결과는 유한요소 해석을 이용하여 구한 결과와 비교된다. 본 모델은 다중 층간분리를 모델링, 정식화할 때 이전에 제시된 모델들과 비교하여 더욱 유연함을 확인할 수 있다. 이는 진동수 방정식의 총 배열 크기가 항상 4×4 를 갖기 때문이다. 따라서, 본 모델은 물리적 모델의 수치적 모델 정식화에 있어 많은 노력을 감소시킬 수 있을 것으로 예상된다.

2. 보 요소의 지배 방정식과 일반해

그림 1은 제안된 모델의 기하구조, 부호규약, 좌표계, 그리고 순번을 나타내고 있다. 요소의 국부 좌표는 모든 보 요소에서 오른쪽을 양의 방향으로 정의한다. 전체보의 양쪽 최종 보 요소의 원점은 선단에 위치하는

데 반하여, 내부 보 요소의 원점은 중심에 위치한다. 제시된 모델에서, l_0 와 l_i 는 보의 총 길이와 두께이며, l_i 와 t_i 는 각 보 요소의 길이와 두께이다. χ_i , δ_i 는 각각 각 SCDB의 표준 거리와 층간분리의 길이이다. 하첨자 "i" 는 요소의 번호를 나타낸다. P_i , V_i , 그리고 M_i 는 각각 보 요소의 축방향력, 전단력, 그리고 모멘트를 나타낸다. 전단 변형 효과와 회전관성(rotary inertia)은 층간분리 자체와 비교할 때 다중간분리된 보의 고유 진동수에 미치는 영향이 상대적으로 작기 때문에 본 연구에서는 단순화를 위하여 고려하지 않는다.

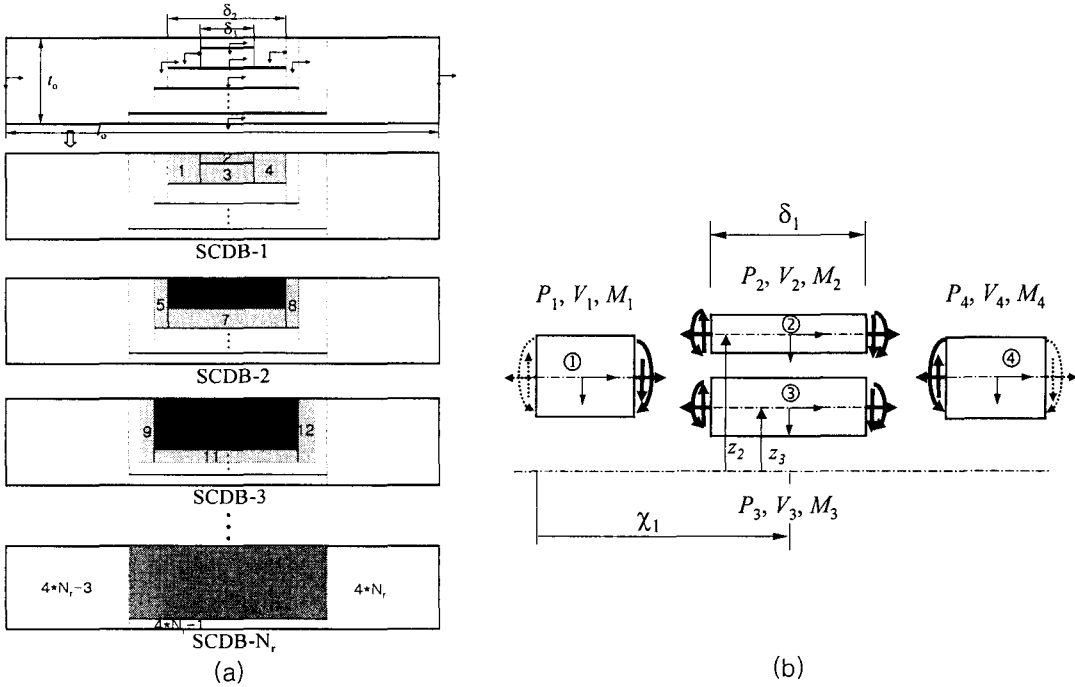


그림 1. 각 보 요소의 기하구조, 부호규약, 좌표계, 순번

보의 횡진동에 대한 지배 방정식은 보의 길이 l_i 에 대하여 무차원화(normalized)되며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d^4 w_i}{d\xi_i^4} - \frac{\rho A_i}{EI_i} l_i^4 \omega^2 w_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

여기서 ξ_i 와 w_i 는 각각 "i" 번째 보 요소의 무차원(dimensionless) 축방향 국부 좌표와 무차원 수직 변위이다. ρ , A_i , EI_i , l_i 그리고 ω 는 각각 그림 1에서 나타난 바와 같이 밀도, 면적, 휨 강성도, 길이 그리고 앵글러 진동수(angular frequency : rad/sec)이다. N 은 보 요소의 총 수이다. 식 (1)의 일반해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w_i(\xi) = \mathbf{F}_i^T \mathbf{C}_i \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_i = [f_{1i}(\xi) \quad f_{2i}(\xi) \quad f_{3i}(\xi) \quad f_{4i}(\xi)]^T, \quad \mathbf{C}_i = [c_{1i} \quad c_{2i} \quad c_{3i} \quad c_{4i}]^T$$

$$f_{1i}(\xi) = \sin \lambda_i \xi, \quad f_{2i}(\xi) = \cos \lambda_i \xi, \quad f_{3i}(\xi) = \sinh \lambda_i \xi, \quad f_{4i}(\xi) = \cosh \lambda_i \xi$$

여기서 \mathbf{F}_i 와 \mathbf{C}_i 는 문제의 연속 조건과 경계조건을 통하여 결정되어지는 미지 벡터이며, λ_i 는 진동수 매개 변수 $\lambda_i^4 = \rho A_i l_i^4 \omega^2 / EI_i$ 를 나타내고 c_{ji} ($j=1, 2, 3, 4$) 는 미지 상수이다. 층간분리가 있는 영역에서 고유 진동수에 미치는 종방향(longitudinal) 자유 진동에 대한 운동의 효과가 무시될 수 없다. 따라서 종방향 변위가 고려되어야 하며 진동수 방정식에 포함되어야 한다. 종방향 평형의 지배 방정식은 보의 길이 l_i 에 대하여 무차원

화되며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d^2 u_i}{d\xi_i^2} + \frac{\rho}{E} l_i^2 \omega^2 u_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

여기서 u_i 는 “ i ” 번째 요소의 무차원 종방향 변위이다. 식 (3)의 일반해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_i(\xi) = \mathbf{G}_i^T \mathbf{H}_i \quad (4)$$

$$\mathbf{G}_i = [g_{1i}(\xi) \quad g_{2i}(\xi)]^T, \quad \mathbf{H}_i = [h_{1i} \quad h_{2i}]^T, \quad g_{1i}(\xi) = \sin \eta_i \xi, \quad g_{2i}(\xi) = \cos \eta_i \xi$$

여기서 \mathbf{G} 와 \mathbf{H} 또한 문제의 연속 조건과 경계 조건을 통하여 결정되어지는 미지 벡터이며, η_i 는 진동수 매개변수 ($\eta_i = \sqrt{\rho/E} l_i \omega$) 이고 $h_j (j=1,2)$ 는 미지 상수이다.

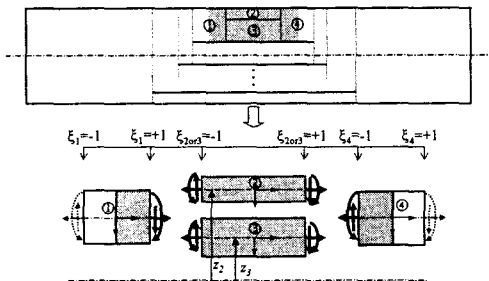


그림 2. 첫번째 단일 복합 적층분리 보 (SCDB-1)

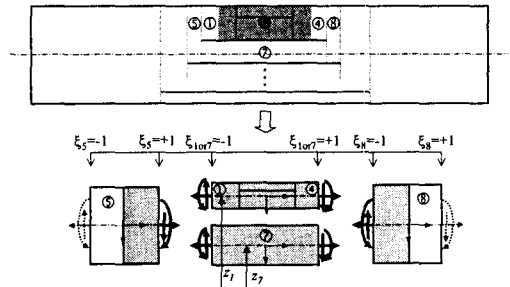


그림 3. 다음의 두번째 단일 복합 적층분리 보 (SCDB-2)

3. SCDB-1의 제차 방정식

방사형으로 층간분리된 보의 고유 진동수를 계산하기 위해서, 각 SCDB에 대한 종방향과 횡방향(lateral) 변위의 상수 관계를 구성하여야 한다. 이는 각 층간분리의 양끝단 경계(crack tip conjunctions)에서의 힘의 평형과 연속 조건을 고려함으로써 이루어질 수 있다. 그림 2에서와 같은 첫번째 단일 층간분리 영역에 대해서 다음 조건은 $\xi = \pm 1$ 에서 만족되어야만 한다.

3.1. 단일 층간분리 영역에서의 횡방향 연속 조건

내부 첫 번째 층간분리부 영역에 대하여 다음의 조건식들은 $\xi = \pm 1$ 에서 만족하여야 한다.

$$w_2(-1)l_2 = w_3(-1)l_3, \quad w_2(+1)l_2 = w_3(+1)l_3, \quad w_{2,\xi}(-1) = w_{3,\xi}(-1), \quad w_{2,\xi}(+1) = w_{3,\xi}(+1) \quad (5)$$

여기서 $(\cdot)_{,\xi}$ 는 ξ 에 대한 미분을 나타낸다. 식 (5)는 층간분리 양선단에서의 처짐과 기울기의 연속 조건을 나타낸다. 층간분리된 영역에서의 “2” 와 “3” 요소 사이의 횡방향 변위의 일반적인 상수 관계는 다음과 같이 행렬 형태로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{T}_{23} \mathbf{C}_3 \quad (6)$$

여기서 $\mathbf{T}_{23} = \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{E}_3$ 와 행렬 \mathbf{T} 의 크기는 항상 4×4 이며, \mathbf{E}_i 는 다음과 같다.

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} f_1(-) & f_2(-) & f_3(-) & f_4(-) \\ f_{1,\xi}(-) & f_{2,\xi}(-) & f_{3,\xi}(-) & f_{4,\xi}(-) \\ f_1(+1) & f_2(+1) & f_3(+1) & f_4(+1) \\ f_{1,\xi}(+) & f_{2,\xi}(+) & f_{3,\xi}(+) & f_{4,\xi}(+) \end{bmatrix}_i \quad (7)$$

3.2. 단일 층간분리 영역에서의 횡방향 그리고 종방향 연속 조건

방사형으로 다층간분리된 보의 고유 진동수를 계산하기 위하여 SCDB의 각 요소들 사이의 종방향 상수 관계가 또한 필요하다. 이는 다음과 같이 층간분리 영역에서 각 층간분리 선단에서의 힘의 평형과 일정한 곡률을 고려함으로써 구하여진다.

$$u_{2,\xi}(-) = (z_2 / z_3) u_{3,\xi}(-1), \quad u_{2,\xi}(+) = (z_2 / z_3) u_{3,\xi}(+1) \quad (8)$$

$$\mathbf{H}_3 = \mathbf{L}_{32} \mathbf{H}_2 \quad \text{or} \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{L}_{23} \mathbf{H}_3 \quad (9)$$

$$u_2(-) = u_3(-) - z_{23} w_{3,\xi}(-1), \quad u_2(+1) = u_3(+1) - z_{23} w_{3,\xi}(+1) \quad (10)$$

$$\mathbf{H}_2 = \hat{\mathbf{T}}_{23} \mathbf{C}_3 \quad (11)$$

여기서 z_i 는 층간분리 영역 내에서의 전체 보의 중립면으로부터 “ i ” 번째 보 요소의 수직 좌표를 나타낸다. 행렬 \mathbf{L}_{32} , \mathbf{L}_{23} , $\hat{\mathbf{T}}_{23}$ 의 상세한 표현은 본 논문에서 생략한다.

3.3. 횡진동에 대한 국부 연속 조건

SCDB-1의 층간분리 양선단에서, 다음과 같은 조건이 만족되어야 한다.

$$\left\{ w_l \quad w_{,\xi} \quad M \quad V \right\}_{\xi=+1,N_r}^T = \left\{ w_l \quad w_{,\xi} \quad M \quad V \right\}_{\xi=-1,N_r+1}^T \quad (12)$$

식 (2)를 식 (12)에 대입하고 식 (6)과 식 (11)을 식 (12)에 적용하면, SCDB-1의 횡방향 변위 상수의 관계는 다음과 같이 구하여진다.

$$\left\{ \mathbf{F}_1 l_1 \quad \mathbf{F}_{1,\xi} \quad D_1 \mathbf{F}_{1,\xi\xi} \quad S_1 \mathbf{F}_{1,\xi\xi\xi} \right\}_{\xi=+1}^T \mathbf{C}_1 \quad (13)$$

$$= \left\{ l_3 \mathbf{F}_3 \quad \mathbf{F}_{3,\xi} \quad D_2 \mathbf{F}_{2,\xi\xi} \mathbf{T}_{23} + D_3 \mathbf{F}_{3,\xi\xi} - \hat{D}_2 \mathbf{G}_{2,\xi} \hat{\mathbf{T}}_{23} \quad S_2 \mathbf{F}_{2,\xi\xi\xi} \mathbf{T}_{23} + S_3 \mathbf{F}_{3,\xi\xi\xi} \right\}_{\xi=-1}^T \mathbf{C}_3$$

$$\left\{ l_3 \mathbf{F}_3 \quad \mathbf{F}_{3,\xi} \quad D_2 \mathbf{F}_{2,\xi\xi} \mathbf{T}_{23} + D_3 \mathbf{F}_{3,\xi\xi} - \hat{D}_2 \mathbf{G}_{2,\xi} \hat{\mathbf{T}}_{23} \quad S_2 \mathbf{F}_{2,\xi\xi\xi} \mathbf{T}_{23} + S_3 \mathbf{F}_{3,\xi\xi\xi} \right\}_{\xi=+1}^T \mathbf{C}_3 \quad (14)$$

$$= \left\{ l_4 \mathbf{F}_4 \quad \mathbf{F}_{4,\xi} \quad D_4 \mathbf{F}_{4,\xi\xi} \quad S_4 \mathbf{F}_{4,\xi\xi\xi} \right\}_{\xi=-1}^T \mathbf{C}_4$$

여기서 $D_i = EI_i / l_i$, $\hat{D}_2 = z_{23} EA_2$, $S_i = EI_i / l_i^2$. 식 (13)을 \mathbf{C}_3 에 대하여 표현하고 이 결과를 식 (14)에 적용하면, 다음과 같은 행렬 관계가 성립한다.

$$\mathbf{C}_4 = \mathbf{T}_{41} \mathbf{C}_1 \quad (15)$$

3.4. 종진동에 대한 국부 연속 조건

다음 SCDB 모델에 대하여 종방향 변위 상수 사이의 관계가 또한 필요하다. 이 관계는 변위과 힘의 연속 조건을 고려함으로써 다음과 같이 구하여진다.

$$\{ul \mid P\}_{\xi=+1, N_r}^T = \{ul \mid P\}_{\xi=-1, N_r+1}^T \quad (16)$$

$$\left\{ l_1 \mathbf{G}_1 \mid EA_1 \mathbf{G}_{1,\xi} \right\}_{\xi=+1}^T \mathbf{H}_1 = \left\{ \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} l_2 \mathbf{G}_2 \mathbf{L}_{23} + \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} l_3 \mathbf{G}_3 \mid EA_2 \mathbf{G}_{2,\xi} \mathbf{L}_{23} + EA_3 \mathbf{G}_{3,\xi} \right\}_{\xi=-1}^T \mathbf{H}_3 \quad (17)$$

$$\left\{ \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} l_2 \mathbf{G}_2 \mathbf{L}_{23} + \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} l_3 \mathbf{G}_3 \mid EA_2 \mathbf{G}_{2,\xi} \mathbf{L}_{23} + EA_3 \mathbf{G}_{3,\xi} \right\}_{\xi=+1}^T \mathbf{H}_3 = \left\{ l_4 \mathbf{G}_4 \mid EA_4 \mathbf{G}_{4,\xi} \right\}_{\xi=-1}^T \mathbf{H}_4 \quad (18)$$

$$\mathbf{H}_4 = \mathbf{L}_{41} \mathbf{H}_1 \quad (19)$$

4. SCDB-2 모델에 대한 제차 방정식

그림 3과 같이 뒤따르는 단일 층간분리 영역에 대하여 SCDB-1에 대하여 사용된 절차가 동일한 방법으로 사용된다. 이러한 간결한 절차의 요약은 다음과 같다.

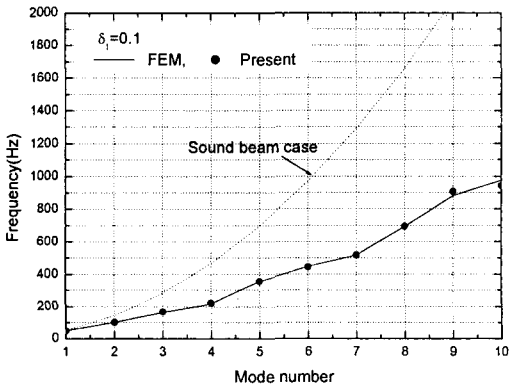
Lateral Continuity Conditions in The Next Subsequent Delaminated Region	$w_1(-1)l_1 = w_7(-1)l_7, w_4(+1)l_4 = w_7(+1)l_7, w_{1,\xi}(-1) = w_{7,\xi}(-1), w_{4,\xi}(+1) = w_{7,\xi}(+1)$ $\left\{ l_1 \mathbf{F}_1(-1) \mid l_4 \mathbf{F}_4(+1) \mathbf{T}_{41} \mid l_1 \mathbf{F}_{1,\xi}(-1) \mid l_4 \mathbf{F}_{4,\xi}(+1) \mathbf{T}_{41} \right\}_{\xi=1}^T \mathbf{C}_1$ $= \left\{ l_7 \mathbf{F}_7(-1) \mid l_7 \mathbf{F}_7(+1) \mid l_7 \mathbf{F}_{7,\xi}(-1) \mid l_7 \mathbf{F}_{7,\xi}(+1) \right\}_{\xi=1}^T \mathbf{C}_7$ $\mathbf{C}_1 = \mathbf{T}_{17} \mathbf{C}_7$
Lateral and Longitudinal Continuity Conditions	$u_{1,\xi}(-1) = \frac{z_1}{z_7} u_{7,\xi}(-1), u_{4,\xi}(+1) = \frac{z_4}{z_7} u_{7,\xi}(+1), \mathbf{H}_1 = \mathbf{L}_{17} \mathbf{H}_7, \mathbf{H}_1 = \hat{\mathbf{T}}_{17} \mathbf{C}_7$
Regional Continuity Conditions for Lateral Vibrations	$\left\{ l_5 \mathbf{F}_5 \mid \mathbf{F}_{5,\xi} \mid D_5 \mathbf{F}_{5,\xi\xi} \mid S_5 \mathbf{F}_{5,\xi\xi\xi} \right\}_{\xi=+1}^T \mathbf{C}_5$ $= \left\{ l_7 \mathbf{F}_7 \mid \mathbf{F}_{7,\xi} \mid D_1 \mathbf{F}_{1,\xi\xi} \mathbf{T}_{17} + D_7 \mathbf{F}_{7,\xi\xi} - \hat{D}_1 \mathbf{G}_{1,\xi} \hat{\mathbf{T}}_{17} \mid S_1 \mathbf{F}_{1,\xi\xi\xi} \mathbf{T}_{17} + S_7 \mathbf{F}_{7,\xi\xi\xi} \right\}_{\xi=-1}^T \mathbf{C}_7$ $\left\{ l_7 \mathbf{F}_7 \mid \mathbf{F}_{7,\xi} \mid D_4 \mathbf{F}_{4,\xi\xi} \mathbf{T}_{41} \mathbf{T}_{17} + D_7 \mathbf{F}_{7,\xi\xi} - \hat{D}_4 \mathbf{G}_{4,\xi} \hat{\mathbf{T}}_{47} \mid S_4 \mathbf{F}_{4,\xi\xi\xi} \mathbf{T}_{41} \mathbf{T}_{17} + S_7 \mathbf{F}_{7,\xi\xi\xi} \right\}_{\xi=+1}^T \mathbf{C}_7$ $= \left\{ l_8 \mathbf{F}_8 \mid \mathbf{F}_{8,\xi} \mid D_8 \mathbf{F}_{8,\xi\xi} \mid S_8 \mathbf{F}_{8,\xi\xi\xi} \right\}_{\xi=-1}^T \mathbf{C}_8$ $\mathbf{C}_5 = \mathbf{T}_{58} \mathbf{C}_8$
Regional Continuity Conditions for Longitudinal Vibrations	$\left\{ l_5 \mathbf{G}_5 \mid EA_5 \mathbf{G}_{5,\xi} \right\}_{\xi=+1}^T \mathbf{H}_5$ $= \left\{ \frac{z_5 - z_7}{z_1 - z_7} l_1 \mathbf{G}_1 \mathbf{L}_{17} + \frac{z_5 - z_1}{z_7 - z_1} l_7 \mathbf{G}_7 \mid EA_1 \mathbf{G}_{1,\xi} \mathbf{L}_{17} + EA_7 \mathbf{G}_{7,\xi} \right\}_{\xi=-1}^T \mathbf{H}_7$ $\left\{ \frac{z_8 - z_7}{z_4 - z_7} l_4 \mathbf{G}_4 \mathbf{L}_{47} + \frac{z_8 - z_4}{z_7 - z_4} l_7 \mathbf{G}_7 \mid EA_4 \mathbf{G}_{4,\xi} \mathbf{L}_{47} + EA_7 \mathbf{G}_{7,\xi} \right\}_{\xi=+1}^T \mathbf{H}_7$ $= \left\{ l_8 \mathbf{G}_8 \mid EA_8 \mathbf{G}_{8,\xi} \right\}_{\xi=-1}^T \mathbf{H}_8, \mathbf{H}_8 = \mathbf{L}_{85} \mathbf{H}_5$

각 경계조건에 대한 최종 제차 진동수 방정식은 이러한 규칙적인 절차를 통하여 구하여지며 세부적인 표현은 본 논문에서는 생략하였다.

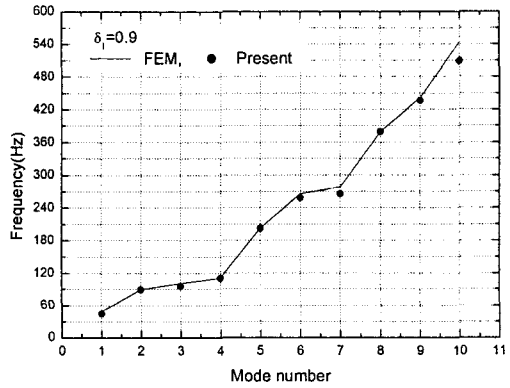
5. 수치 결과와 토의

방사형으로 다층간분리된 보의 진동해석을 수행한다. 해석모델의 기하학적 크기와 역학적 성질은 각각 $l_0=1.0\text{m}$, $t_0=0.01\text{m}$, $E=70\text{GPa}$, $\rho=2,710\text{Kg/m}^3$ 이며, 경계조건은 양단 고정이다. 본 연구에서 제시한 모델과 유한요

소 방법 결과의 진동수의 비교가 그림 4에 제시되어 있다. 층간분리는 보의 중앙에 존재하며 양쪽길이방향으로 확장된다. 본 연구에서 제시한 모델을 통하여 구하여진 고유 진동수는 유한요소 해석에 의한 결과와 잘 일치한다. 방사형으로 층간분리된 보의 고유 진동수의 변화는 특히 그림 5에서와 같이 층간분리의 길이에 따라 크게 영향 받음을 알 수 있다. δ_1 이 일정할 값을 가질 때 δ_2 가 증가할수록 고유진동수가 감소하는 경향을 나타내며 또한, δ_2 가 증가할수록 δ_1 이 고유 진동수에 미치는 영향이 크게 나타남을 확인할 수 있다.

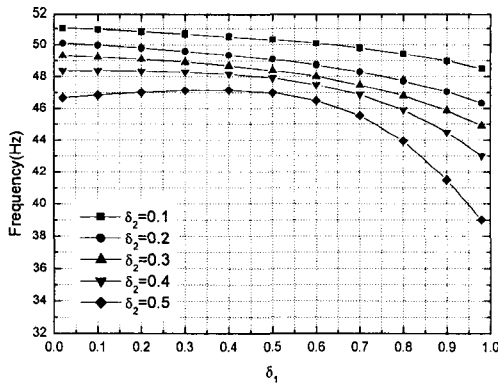


(a) $\delta_1=0.1$

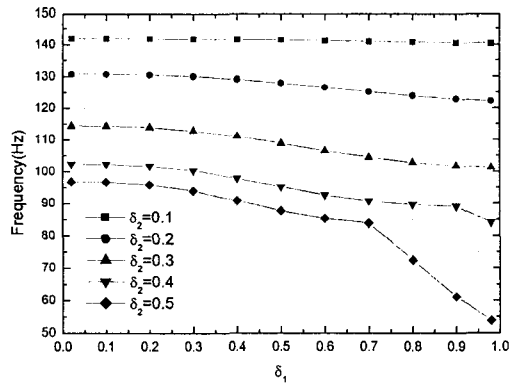


(b) $\delta_1=0.9$

그림 4. $\delta_2=0.4$ 에 대한 제안된 방법과 유한요소 방법 사이의 진동수와 mode number의 비교



(a) 1st Mode



(b) 2nd Mode

그림 5. 방사형으로 이중 층간분리된 보에 대하여 δ_1, δ_2 가 고유 진동수에 미치는 영향

6. 결 론

본 연구에서는 방사형으로 두께를 따라 다층간분리된 보의 진동 특성을 해석적으로 수행하였다. 임의의 방사형 다층간분리를 갖는 보의 진동 해석에 대한 해석적 정식화가 제안되었고, 해석결과는 방사형 다층간분리의 크기가 고유 진동수에 미치는 영향을 나타내었다. 비록 본 연구에서는 양단에서 고정단을 갖는 경계조건만을 고려하였지만, 자유단, 단순 지지 등과 같은 다른 경계조건은 보 요소의 양단에 이러한 경계조건을 적용함으로써 쉽게 구하여진다. 연구를 통하여 방사형으로 다층간분리된 보에 대한 고유 진동수의 변화는 층간분리 길이에 크게 영향 받음을 알 수 있다.

참고 문헌

1. Pavier J.M., Clarke M.P. (1995), "Experimental technique for the investigation of the effects of impact damage on carbon-fiber composites," *Composite Science and Technology*, Vol.55, pp.157~169.
2. WANG, J.T.S., Ltu, Y.Y. and GIBBY, J. A. (1982), "Vibrations of Split Beams," *Journal of Sound and Vibration*, 84(4), pp 491~502.
3. Mujumdar, P.M. and Suryanarayan, S. (1988), "Flexural Vibration of Beams with Delaminations," *Journal of Sound and Vibration* Vol. 125, No. 3, pp. 441~461.
4. Tracy, J. J. and Pardoen, G.C. (1989), "Effect of Delamination on the Natural Frequencies of Composite Beams," *Journal of Composite Materials*, Vol. 23, No. 12, pp. 1200~1215.
5. Shen M.H.H. and Grady J.E. (1992), "Free Vibrations of Delaminated Beams," *AIAA*, Vol. 30, No. 5, pp. 1361~1370.
6. Shu, D. (1995), "Vibration of sandwich beams with double delaminations," *Composite Science and Technology*, Vol. 54, Issue 1, pp. 101~109.
7. Wang, J.T.S., Lin, C.C. (1996), "Engineering analysis of buckling of delaminated beam plates," *Composite Structures*, Vol.34, No.4, pp.397~407.
8. Wang, J.T.S., Pu, H.N., Lin, C.C. (1997), "Buckling of beam-plates having multiple delamination," *Journal of Composite materials*, Vol.31, No.10, pp.1002~1025.
9. Huang, H., Kardomateas, G.A. (1998), "Buckling of orthotropic beam-plates with multiple central delamination," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.35, No.13, pp.1355~1362.
10. Shu, D. (1998), "Buckling of multiple delaminated beams," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.35, No.13, pp.1451~1465.
11. Jane, K.C., Harn, Y.C. (2000), "Vibration of delaminated beam-plate with multiple delaminations under axial forces," *Mechanics of Structures and Machines*, Vol.28, No.1, pp.49~64.
12. Wang, S.S., Zahlan, N.M., Suemasu, H. (1985), "Compressive Stability of Delaminated Random Short-Fiber Composites, Part I : Modeling and Methods of Analysis," *Journal of Composite Materials*, Vol.19, No.7, pp.296~316.
13. Wang, S.S., Zahlan, N.M., Suemasu, H. (1985), "Compressive Stability of Delaminated Random Short-Fiber Composites, Part II : Experimental and Analytical Result," *Journal of Composite Materials*, Vol.19, No.7, pp. 296~316.
14. Suemasu H. (1993), "Effects of Multiple Delaminations on Compressive Buckling Behaviors of Composite Panels," *Journal of Composite Materials*, Vol.27, No.12, pp.1172~1192.
15. Gaudenzi, P. (1997), "On delamination buckling of composite laminated under compressive loading," *Composite Structures*, Vol.39, No.1-2, pp.21~30.
16. Kim, H.J. (1997), "Postbuckling analysis of composite laminates with a delamination," *Computers & Structures*, Vol.62, No.6, pp.975~983.
17. Roche, C.H., Accorsi, M.L. (1998), "A new finite element for global modeling of delaminations in laminated beams," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.31, pp.165~177.
18. Kyoung, W.M., Kim, C.G., Hong, C.S. (1999), "Buckling and postbuckling behavior of composites cross-ply laminates with multiple delaminations," *Composite Structures*, Vol.43, pp.257~274.
19. Hu, N., Fukunaga, H., Sekine, H., Ali, K.M. (1999), "Compressive buckling of laminates with an embedded delamination," *Composites Science and Technology*, Vol.59, No.8, pp.1247~1260.
20. Hwang, S.F., Liu, G.H. (2001), "Buckling behavior of composite laminates with multiple delaminations under uniaxial compression," *Composite Structures*, Vol.53, pp.235~243.