

등분포 모멘트를 받는 아치의 횡 자유진동

Effect of Initial Uniform Moment on Lateral Free Vibration of Arches

염웅준* 한택희** 임남형*** 강영중****
Youm, Eung-Jun Han, Taek-Hee Im, Nam-Hyoung Kang, Young-Jong

ABSTRACT

Recently, arches are used structurally because of their high in-plane stiffness and strength, which result from their ability to transmit most of the applied loading by axial forces actions, so that the bending actions are reduced. On the other hand, the resistances of arches to (out-of-plane,) flexural-torsional behavior depend on the rigidities EI_y for lateral bending, GJ for Uniform torsion, and EI_w for warping torsion which are related to axial stress for flexural-torsional behavior. The resistance of an arch to out-of-plane behavior may be reduced by its in-plane curvature, and so it may require significant lateral bracing. Thus, it is supposed that In-plane preloading which cause an axial stress, have an effect on out-of-plane free vibration behavior of arches. Because axial stresses caused increase or decrease out-of-plane stiffness. But study about this substance is insufficient. In this thesis, We will study an effect of preloading on lateral free vibration of arches, using finite element method based on Kang and Yoo's curved beam theory (about curved beam element have 7 degree of freedom including warping) with FORTRAN programming.

1. 서 론

아치, 곡선보 등의 초기 곡률을 고려한 구조 형식은 부드러운 곡선의 미적인 아름다움과 직선 구조 형식과는 다른 거동으로 인한 구조적 특성 때문에, 많은 구조물에서 이를 응용, 실용화 시키려는 노력은 계속 진행되고 있다. 그러나 동적 거동에 대한 연구는 아직 부족한 상태이다. 특히, 아치 구조물이 곡률면내 방향의 강성이 큰 이유로, 하중의 대부분을 휨거동의 감소로 인하여 축력 방향 거동에 의해 전달하는 구조적 특성 때문에 많이 이용되고 있는 구조 형태이다. 이런 이유로

* 고려대학교 강구조공학협동과정 토목환경공학과 박사과정
** 고려대학교 토목환경공학과 박사과정
*** 고려대학교 토목환경공학과 연구조교수
**** 고려대학교 토목환경공학과 부교수

아치에 대해서는 축력이 중요한 힘 분배 경로 중 하나이며, 이것은 곡률면의 방향의 휨강성 (the rigidities EI for lateral bending), 비틀강성 (GJ for torsion), 뒹 강성(EIw for warping torsion)에 영향을 받는 곡률면의 방향의 휨-비틀거동(out-of-plane flexural-torsional action)에 중요한 역할을 한다. 이러한 이유로, 아치의 자유진동 해석시 곡률면내 방향의 초기하중이 적용되었을 때, 곡률면의 방향의 휨 비틀 거동에 많은 영향이 있을 것으로 예상되며, 이러한 아치 구조물에 대하여 기존의 해석 방법과는 달리, 곡률면내 초기하중을 고려하고, 이미 비선형 이론에 근거하여 곡선보의 기하학적 아치 좌굴 문제를 해결하고 뒹 현상을 고려한 “Kang과 Yoo”의 곡선보 요소를 이용하여, 2축 대칭 단면에 대하여 기하 강성을 고려한 아치의 횡방향 동적 거동 특성을 연구하고자 한다.

2. 아치의 유한요소 정식화

아치 요소의 단면에 작용하는 절점력 및 각 절점력에 해당하는 절점변위는 그림 1과 같다. 그리고, 단력에서의 절점력 벡터와 단위벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{d} = [w_{oi} \ u_{oi} \ \gamma_i \ w_{oj} \ u_{oj} \ \gamma_j \ v_{oi} \ -v'_{oi} \ \beta_i \ -\tau_i \ v_{oj} \ -v'_{oj} \ \beta_j \ -\tau_j]^T = d_k, k=1,2,\dots,14 \quad (\text{식 1})$$

$$\mathbf{f} = [F_{zi} \ V_{xi} \ M_{yi} \ F_{zj} \ V_{xj} \ M_{yj} \ V_{yi} \ M_{xi} \ T_{Ti} \ B_{\beta i} \ V_{yj} \ M_{xj} \ T_{Tj} \ B_{\beta j}]^T = f_k, k=1,2,\dots,14 \quad (\text{식 2})$$

여기서, i, j 는 절점번호이고 윗첨자 T는 전치행렬을 의미한다.

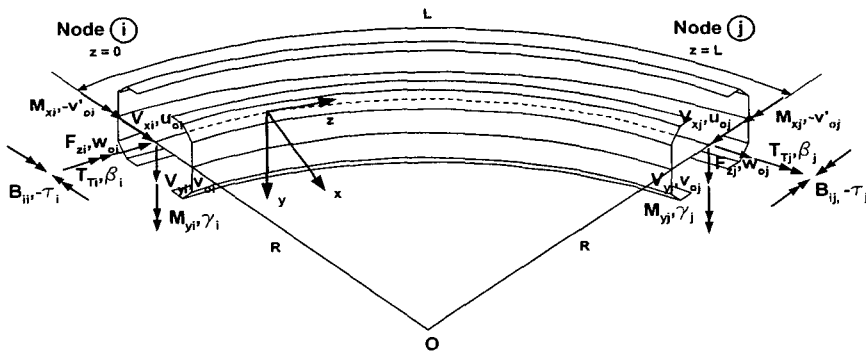


그림 1. 아치의 변위장

아치 요소의 형상함수 N 은 정적거동을 나타내는 곡선보 지배미분 방정식의 제차해로부터 구해지며 이 형상함수를 사용하여 임의점에서의 변위벡터 u 는 다음과 같이 표현한다.

$$u = N \cdot d \quad (\text{식 3})$$

아치 요소의 강성행렬 K 는 변형에너지 1차 변분으로부터, 기하강성행렬 K_G 는 정적해석으로 얻은 단면력을 이용하여 변형에너지 2차변분으로부터 식 4와 같이 구할 수 있다. 한편, 질량행렬 M 또한 강성행렬의 유도에서와 같이 운동에너지 1차변분으로 식 5와 같이 구할 수 있다. 여기서 L 은 1차변분, Q 는 2차 변분을 의미한다.

$$\delta U^L = \int_V \sigma \cdot \delta \epsilon dV = \delta d_i K_{ij} \delta d_j, \quad \delta U^Q = \int_V \sigma \cdot \delta \eta dV = \delta d_i K_{Gij} \delta d_j \quad (\text{식 4})$$

$$\delta T = \rho \int_V (u'' \delta u + v'' \delta v + w'' \delta w)_L dV = \delta d_i M_{ij} \delta d_j \quad (\text{식 5})$$

구조물 전체의 강성행렬 K 및 질량행렬 M 은 각 요소의 강성행렬 및 질량행렬의 합으로 구해지고, 기하강성을 고려한 전체 강성행렬을 $K_{\text{eff}} = K + K_G$ 로 정의하면, 각 구조물의 기하강성을 고려한 전체행렬 및 질량행렬로부터 구조물의 고유진동수 ω , 및 모드형상 벡터 ϕ 를 산정할 수 있다.

$$\det |K_{\text{eff}} - \omega^2 M| = 0, \quad (K_{\text{eff}} - \omega^2 M) \cdot \phi = 0 \quad (\text{식 6})$$

3. 수치 해석 방법

본 연구는, 매개 변수를 부재의 축방향 길이 (L , 그림 1참조)와 내부 중심각(혹은 초기 곡률)으로 정하였다. 축방향 길이는 1000, 800, 600, 400, 200, 100 mm에 대하여, 그리고 내부 중심각은 30, 60, 90, 120, 150 도(degree)에 대하여 각각 해석 하였다.

한편, 본 수치 해석에 사용된 기본 단면 제원은 다음과 같다.

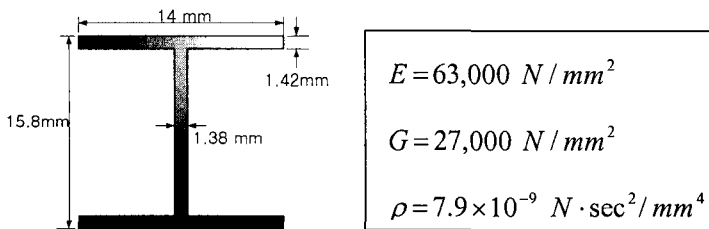


그림 2. 기본 단면 제원

수치 해석 순서는 각 매개 변수에 따라 초기 하중을 고려하지 않은 자유 진동수를 계산하고, 각 하중 조건(등분포 부모멘트, 등분포 정모멘트)에 따른 좌굴 하중을 계산한 후, 초기 하중을 영(zero)에서부터 좌굴 하중까지 점차적으로 늘려가며 적용하면서, 각 매개 변수와 하중 조건에 따른, 기하 강성을 고려한 자유 진동수를 구한다. 그림3은 하중의 적용방법 및 경계조건을 나타낸다.

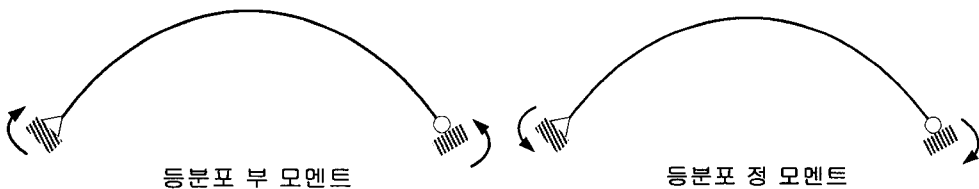


그림 3. 각 하중의 적용 방법 및 경계 조건

4. 수치해석 결과 분석

3.1 등분포 부모멘트를 받는 아치의 자유진동

그림 4에서 볼 수 있듯이, 모든 매개 변수에 대하여 초기 하중이 증가할수록 자유 진동수가 감소함을 알 수 있다. 이것은 하중의 영향으로 받은 내력에 의하여 자유 진동 거동에 대한 강성이 감소하기 때문에 점차적으로 자유 진동수가 감소한다고 볼 수 있다. 또한, 매개 변수 L과 상관 없이 초기 하중이 증가함에 따라 나타나는 자유 진동수의 변화 추이가 거의 비슷함을 알 수 있다. 이러한 자유 진동수 감소 양상은 초기 하중을 받는 아치 부재의 자유 진동에 대한 안전성을 기대하기 힘들다는 것을 보여준다.

이렇게 매개 변수에 따른, 각각의 경우에 대한 비슷한 감소 양상을 좀 더 일반화 하여 비교할 필요성이 있다. 그러므로, 임계 하중에 대한 초기 하중의 비로 나타낼 수 있는 하중비(P/Pcr)와 기하 강성을 고려하지 않은 자유 진동수에 대한, 기하 강성을 고려한 자유 진동수의 비로 표현할 수 있는 자유 진동수비(Wg1/Wn1)와의 관계로 그림 5 와 같이 그래프를 다시 나타내었다. 보는 바와 같이, 부재의 축방향 길이(L)와 내부중심각과 상관없이 그래프가 거의 일치함을 알 수 있으며, 이것은 매개변수와 상관 없이 똑같은 하중비에서의 초기 하중 조건에서 자유 진동수가 똑같은 비율로 감소한다는 것을 의미한다. 그림 5 의 그래프를 통하여, 식 7 과 같은 식으로 초기 하중과 자유 진동수와의 관계를 일반화시킬 수 있다.

$$\frac{Wg1}{Wn1} = \sqrt{1 - \frac{Mn}{Mncr}} \quad (\text{식 7})$$

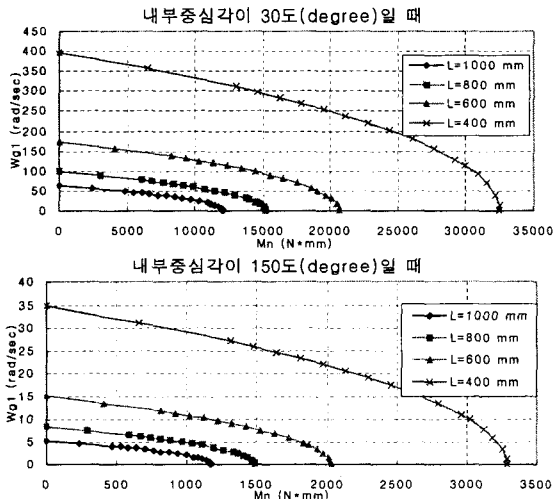


그림 4 등분포 압축 하중을 받을 때, 초기 하중과 자유 진동수와의 관계

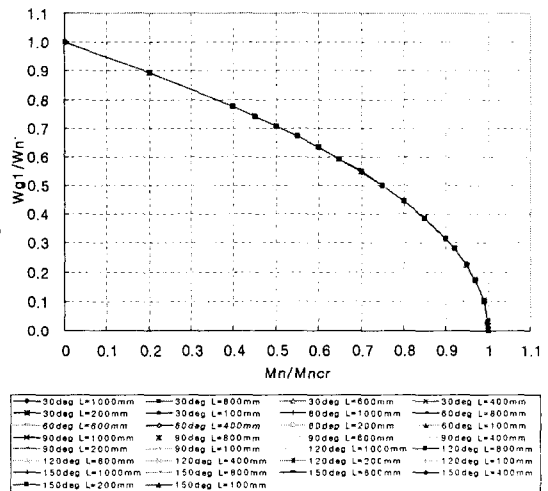


그림 5 등분포 압축 하중을 받을 때, 매개 변수에 대한 모든 경우에서의 하중비(P/Pcr)와 자유 진동수비(Wg1/Wn1)와의 관계

등분포 부모멘트를 받는 아치의 자유진동 모드는, 초기하중이 없을 때의 자유 진동 모드, 그리고 하중에 의해 유도되는 모드 경향이 모두 그림 6 과 같이 상부 플렌지가 압축을 받는 모드이므로 역시 같은 모드 양상을 가지게 된다. 여기서는 아치의 중앙 지점에서의 변위가 제일 크기 때문에, 이 지점에서의 아치의 수평 변위(y 축 변위)를 1 로 본 비틀림(z 축 회전) 상대 모드(Relative Mode)를 비교하여 그 추이를 살펴보았다. 그림 7 에서와 같이 초기 하중이 커질수록 비틀림 상대 모드가 커지는 경향을 보이는데, 이것은 초기 하중을 많이 받을수록, 강성이 감소되어 결과적으로 자유 진동수가 감소한다는 것을 의미한다.

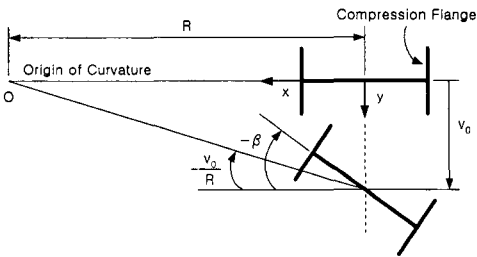


그림 6 등분포 부모멘트를 받는 아치의 곡률면의 모드 형상

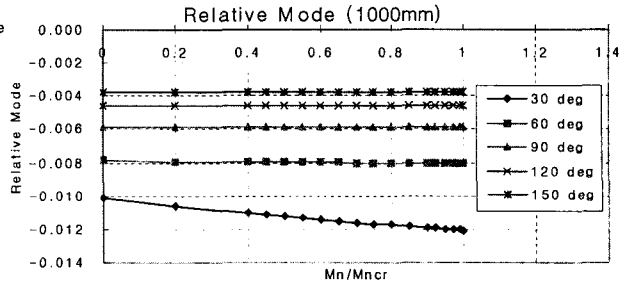


그림 7 축방향 길이가 1000mm 일때의 내부중심각에 따른 비틀림 상대 모드

3.2 등분포 정모멘트를 받는 아치의 자유진동

앞에서 살펴본 등분포 부 모멘트에 의해 유도되는 모드 형상은 상부 플렌지가 압축을 받는 모드였으나, 등분포 정 모멘트에 의해 유도되는 모드 형상은 반대로 그림 9와 같이 하부 플렌지가 압축을 받는 모드 형상이다. 즉, 자유 진동 거동과 다른 형태의 거동을 유발하는 초기 하중 형태를 적용하였다는 점이 등분포 부모멘트의 경우와 다른 점이며, 결과 역시 다른 양상을 보였다.

그림 8은 등분포 부모멘트를 받는 아치의 자유 진동 해석을 수행하여, 하중비와 자유진동수비와의 관계를 각 내부중심각에 대하여, 축방향 길이 별로 나타낸 그래프이다. 보는 바와 같이 초기 하중이 커질수록, 점차 자유 진동수가 증가하다가 초기 하중이 어느 정도의 크기 이상으로 커지면 자유 진동수가 감소하기 시작하여, 초기 하중이 좌굴 하중에 도달하면 영(zero)의 값을 갖는다. 이것은 상부 플렌지가 압축력을 받는 자유 진동 거동과 하부 플렌지가 압축력을 받는 하중에 의한 거동이 상호 작용하여, 전체적으로 자유 진동수가 증가하게 되기 때문이다. 그리고, 어느 초기 하중까지는 이렇듯 자유 진동 거동을 따르면서 자유 진동수가 점차 증가하다가, 그 다음부터는 하중에 의한 거동의 지배를 받으면서 자유진동수가 점차 감소하기 시작하여, 초기 하중이 좌굴 하중의 크기 만큼 가해지게 되면 이론상 영의 값을 가지게 되는 것이다. 또한, 그림에서와 같이 매개 변수에 따라서 그 곡선 양상이 약간씩 차이가 있음을 알 수 있다.

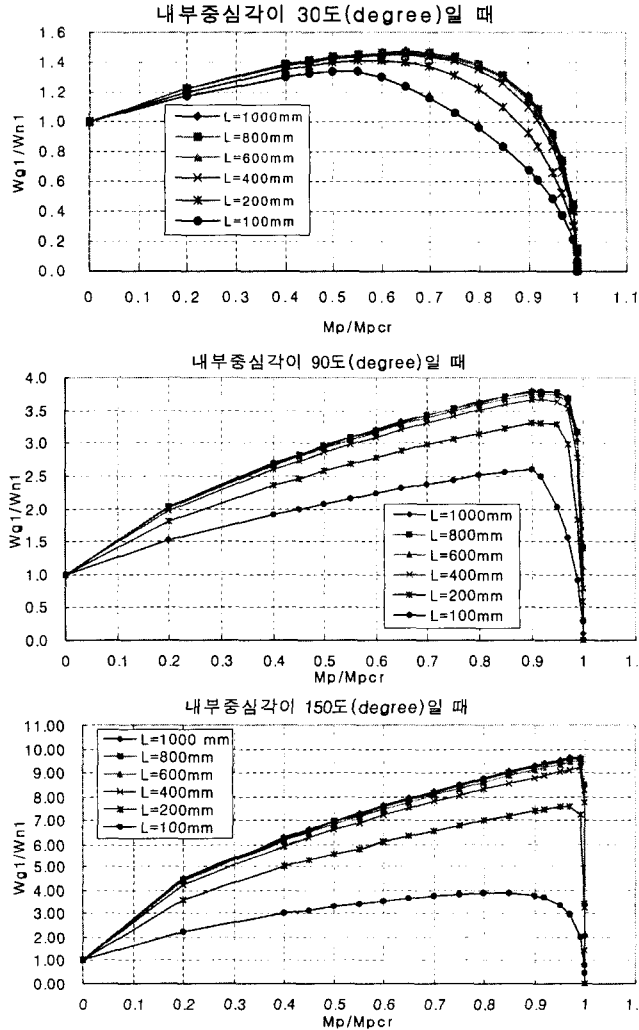


그림 8 등분포 정 모멘트를 받을 때, 하중비(M_p/M_{pcr})와 자유 진동수비(W_{g1}/W_{n1})와의 관계

이렇게, 자유 진동수가 어느정도의 초기 하중이 적용될 때까지 큰 폭으로 증가하는 양상은, 등분포 정 모멘트 형태의 초기 하중을 받는 아치 부재의 자유 진동 거동에 대한 안전 효과를 기대할 수 있다는 것을 의미한다. 또한, 그래프에서 내부 중심각과 부재의 축방향 길이가 커질수록, 하중비의 증가에 따른 자유 진동수의 증가 효과가 크고, 자유 진동수비가 최대일 때의 하중비가 커지며, 자유 진동수의 감소가 급격하게 일어남을 알 수 있다. 자유 진동수비가 최대일 때의 하중비는 자유진동수가 증가 추세에서 감소 추세로 넘어가는 분계점의 하중비를 의미하며, 이것은 다시 말해서, 자유 진동 거동이 상부 플랜지가 압축을 받는 거동에서, 하중의 영향에 의한 하부 플

렌지가 압축을 받는 거동으로 전환하는 시점을 의미한다.

따라서, 자유 진동수비가 최대일 때의 하중비 이하의 하중비에서는 자유진동수 증가 추세에서 자유 진동수의 증가 효과를 기대할 수 있으므로, 안정된 자유 진동수 증가 효과를 기대할 수 있다고 말할 수 있다. 또한, 자유 진동수가 감소 추세에 있더라도 자유 진동수비가 워낙 커지기 때문에, 상대적으로 큰 하중비에서까지 자유 진동수비는 1 이상이 되는 것을 알 수 있다. 자유 진동수비가 1 이상이라는 것은 하중에 의하여 자유 진동수의 증가 효과를 기대할 수 있다는 의미가 된다.

한편, 등분포 정 모멘트를 받는 아치의 자유 진동 거동은 자유진동수가 증가하면서, 상부 플렌지가 압축을 받는 거동을 보이다가, 자유 진동수가 감소하면서, 하부 플렌지가 압축을 받는 거동을 보인다(그림9). 그림 10은, 초기 하중 증가에 따른 비틀림 상대 모드를 각 매개 변수에 따라서 나타낸 것이다. 내부 중심각 30, 60, 90, 120도(degree)에 대하여 각각 그래프를 그렸으며, 부재의 축방향 길이(L)는 1000, 800, 600, 400, 200, 100mm에 대하여 한 그래프 안에 각각 곡선을 따로 표현하였다. 그림에서 비틀림 상대 모드가 음의 값을 갖는 것은 상부 플렌지가 압축을 받는 거동을, 양의 값을 갖는 것은 하부 플렌지가 압축을 받는 거동을 나타낸다. 보는 바와 같이 처음에는 비틀림 상대 모드 값이 음의 값을 갖다가 점차 그 값이 증가하면서 결국 양의 값을 가지면서, 계속 증가하는 양상을 보인다. 비틀림 상대 모드 값이 음수이며, 점점 그 값이 커지면서(절대값은 줄어드는 것이므로, 비틀림 거동이 상대적으로 점점 작아진다), 영(zero)의 값에 근접하는 구간은, 상부 플렌지가 압축을 받는 거동을 유지하면서 자유 진동수가 증가하는 현상을 의미하고, 영의 값을 가질때는 자유 진동수가 최대일 때를 나타내며, 비틀림 상대 모드 값이 양수이며, 점점 그 값이 커지는(절대값도 커지는 것으로, 비틀림 거동이 상대적으로 계속 커진다) 구간은, 하중의 영향을 많이 받아 하부 플렌지가 압축을 받으면서 자유 진동수가 반대로 감소하는 현상을 의미한다. 특히 내부중심각이 30도일 때의 그림에서는 비틀림 상대 모드 값이 영의 값을 갖는 하중비(M_p/M_{pcr})가, 축방향 길이(L)가 커지면서 점점 커지는 것을 확인 할수 있으며, 이것은 자유 진동수비(W_{g1}/W_{n1})가 최대일 때의 하중비(M_p/M_{pcr})가 커지는 현상을 의미한다.

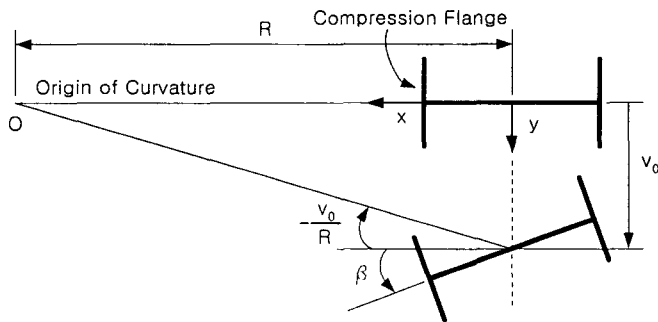


그림 9 등분포 정모멘트를 받는 아치의 곡률면의 모드 형상

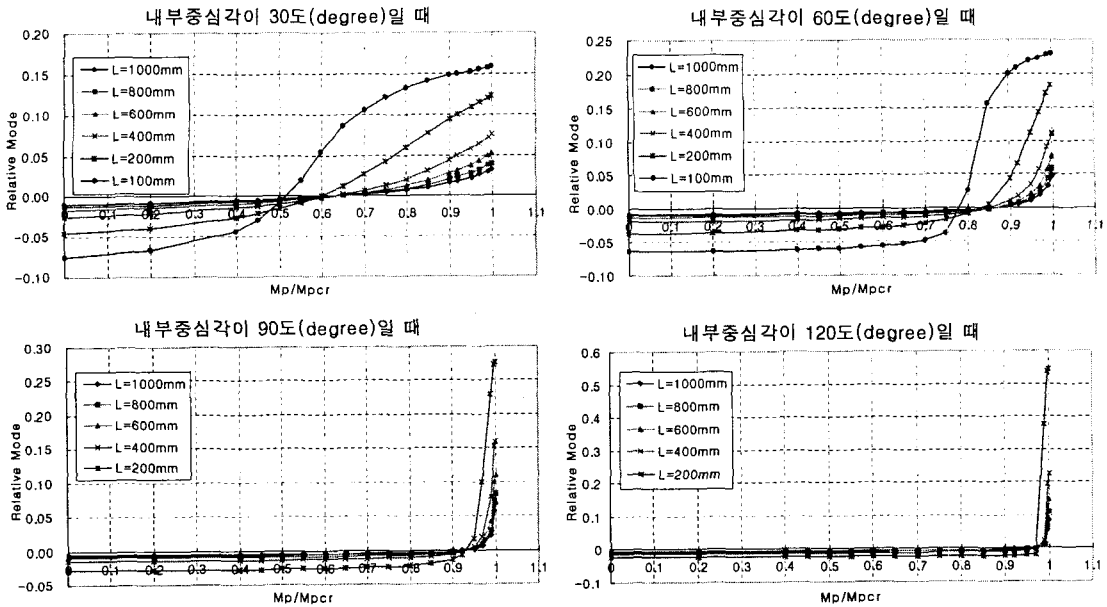


그림 10 등분포 정모멘트를 받을 때, 매개 변수에 따른 비틀림 상대 모드

5. 결론

본 논문에서는, 등분포 모멘트를 받는, 2축 대칭 단면을 갖는 아치 구조물의 횡 자유 진동에 대한 해석 방법을 정립하고 정량적 특성을 분석하였다. 아치는 곡률면내 방향의 등분포 모멘트를 받는 경우, 곡률면외 자유 진동수에 영향을 받는다. 이것은 초기 하중의 영향으로 부재가 받는 내력에 의하여 자유 진동 거동에 대한 강성의 증감이 생기기 때문이다. 아치가 등분포 부모멘트를 받을 때, 자유진동수는 $\frac{Wgl}{Wnl} = \sqrt{1 - \frac{Mn}{Mncr}}$ 의 관계에 따라서 감소양상을 보이며, 이것은 받는 하중이 커질수록 자유진동에 대한 안정성이 떨어진다는 것을 의미한다. 한편, 아치가 등분포 정모멘트를 받을 때에는 자유진동수는 점차 증가하다가 어느 시점부터 비교적 급격히 하락하는 경향을 보이는데, 이것은 초기하중을 받지 않을 때의 자유진동거동과 등분포 정모멘트에 의해 유도되는 거동의 양상이 서로 반대이기 때문이다. 이러한 성질은 아치가 등분포 정모멘트를 받을 때는 자유진동에 대한 안정성을 기대할 수 있다는 것을 보여준다.

참고 문헌

1. Kang, Y.J. (1992). "Nonlinear theory of thin walled curved beams and finite element formulation," Dissertation presented to Auburn University, at Auburn, Alabama, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.
2. 최영준 (1995). "박판 수평곡선보의 자유진동", 공학석사 학위논문, 고려대학교.
3. 임남형 (1995) "1축 대칭 박판 아치의 좌굴", 공학석사 학위논문, 고려대학교..