

# 셸 구조물의 중고주파 진동 파워흐름해석

Power Flow Analysis for Medium-to-High Frequency Vibration of Shell Structures

박도현\* · 김일환\* · 홍석윤\*\* · 길현권\*\*\*

D.-H. Park, I.-H. Kim, S.-Y. Hong and H.-G. Kil

## ABSTRACT

In this paper, power flow analysis method on the various types of thin shell has been developed to solve vibrational problems in the medium to high frequency ranges. Energy governing equations have been derived both for out-of plane and in-plane waves in thin shell. These results have been numerically applied to predict the vibrational energy density and intensity distributions of cylindrical, spherical and doubly-curved shells.

## 1. 서론

복합구조물의 중고주파 진동 현상은 소음 발생의 주요 원인이 될 수 있기 때문에 관심의 초점이 되고 있다. 기존의 유한요소법(FEM)과 경계요소법(BEM) 및 통계적에너지해석법(SEA)이 중고주파 영역에서 가지는 한계점들을 보완하기 위해 제안된 파워흐름해석법(Power Flow Analysis, PFA)은 고유의 에너지지배방정식을 기반으로 하여 고주파 영역에서 에너지의 공간적인 분포와 전달경로등을 제시함은 물론 중주파수 영역에까지 확대 적용될 수 있는 방법으로 인식되고 있다. Nefske와 Sung은 파워흐름해석법을 보의 횡진동에 적용하였고 Wohlever와 Bernhard는 보의 횡진동과 종진동에 대한 에너지지배방정식을 제시하였다. Bouthier와 Bernhard는 이차원 막막(membrane)과 등방성 평판의 횡진동 및 음향공간에 대한 에너지지배방정식을 제시하였다. 박도현 등은 등방성(isotropic) 평판의 면내(in-plane)진동과 직교이방성(orthotropic) 평판의 횡진동에 대한 에너지지배방정식을 유도하였으며 서성훈은 연성 보-평판 구조요소를 개발하였고, 서울대 선박소음진동연구실에서는 PFA를 기반으로 하는 해석프로그램을 처음으로 개발하

였다.

파워흐름해석법을 일반적인 형상을 가지는 구조물의 중고주파 소음진동 문제에 적용하기 위해서는 이를 유한요소법과 경계요소법에 접목할 필요가 있다. 서성훈 등은 파워흐름해석법에 유한요소법을 적용한 파워흐름유한요소법(Power Flow Finite Element Method, PPFEM)을 정립하였고, 박도현 등은 파워흐름해석법에 경계요소법을 적용한 파워흐름경계요소법(Power Flow Boundary Element Method, PFBEM)을 정립하여 보와 평판으로 구성된 복합구조물의 진동해석에 적용하였다. 그러나 보와 평판외에 곡률을 가지는 셸요소에 관한 파워흐름해석법은 아직 시도된 예가 없으며 보다 일반적인 형상을 갖는 복합구조물에 대한 진동문제를 해석하기 위해서 셸요소에 관한 파워흐름해석법의 정립이 필요하다.

따라서, 본 논문에서는 파워흐름해석법을 셸을 포함한 복합구조물에 적용하기 위한 연구로서 일반적인 셸의 면외진동과 면내진동에 관한 에너지지배방정식을 유도하고 cylindrical, spherical, doubly-curved 셸의 진동문제에 수치적으로 적용하였다.

## 2. 얇은 셸의 면외진동에 대한 에너지지배방정식 유도

### 2.1 Strain-Displacement Relations

기본적으로 셸은 평판과 달리 변위의 세가지 방향성분  $u, v, w$  가 서로 연성되어 있으므로 이로부터는 에너

\* 서울대학교 조선해양공학과 대학원  
E-mail : dohyun@gong.snu.ac.kr  
Tel : (02) 888-9298, Fax : (02) 880-7331

\*\* 서울대학교 조선해양공학과

\*\*\* 수원대학교 기계공학과

지배방정식의 유도가 불가능할 가능성이 높다. 그러나 평판의 경우처럼 수직방향 하중이 작용할 때는 extensional motion이 무시할 만큼 작다고 가정한다면 쉘의 면외진동에 대한 에너지지배방정식을 유도할 수 있을 것이다. 또한 실제로 많은 쉘 구조물이 각 방향의 곡률이 일정한 쉘 요소로 표현할 수 있다.

$$u \approx 0, v \approx 0 \quad (1a-b)$$

$$A = \text{constant}, B = \text{constant} \quad (1c-d)$$

얇은 쉘의 변형후의 기울기 각도와 strain, 그리고 곡률의 변화율 등은 다음과 같이 표현된다.

$$\theta_\alpha = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \theta_\beta = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (2a-b)$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{w}{R_\alpha}, \varepsilon_\beta = \frac{w}{R_\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta} = 0 \quad (2c-e)$$

$$\chi_\alpha = -\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \chi_\beta = -\frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \quad (2f-g)$$

$$\tau = -\frac{2}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (2h)$$

(2)식을 이용하여 에너지지배방정식의 유도에 필요한 energy density 식을 표현할 수 있다.

## 2.2 Force and Moment Resultants

(2)식을 적용하면 얇은 쉘의 force resultant와 moment resultant는 다음과 같이 표현된다.

$$N_\alpha = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{\nu}{R_\beta} \right) w \quad (3a)$$

$$N_\beta = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{R_\beta} + \frac{\nu}{R_\alpha} \right) w \quad (3b)$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = 0 \quad (3c)$$

$$M_\alpha = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\nu}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \quad (3d)$$

$$M_\beta = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\nu}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) \quad (3e)$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = -\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (3f)$$

(3)식을 이용하여 intensity식을 변위로 표현할 수 있고 면외진동에 대한 운동방정식을 얻을 수 있다.

## 2.3 Equation of Motion

쉘의 extensional motion을 무시한 경우 면외진동에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & -\frac{N_\alpha}{R_\alpha} - \frac{N_\beta}{R_\beta} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 M_{\beta\alpha}}{\partial \alpha \partial \beta} \\ & + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 M_\beta}{\partial \beta^2} + \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4)$$

(4)식에 (3)식을 적용하면 변위  $w$ 로 표현되는 면외진동의 운동방정식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$D \nabla^4 w + K \left( \frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2} + \frac{2\nu}{R_\alpha R_\beta} \right) w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

위 식의  $\nabla^4$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\nabla^4 = \frac{1}{A^4} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{2}{A^2 B^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{1}{B^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \quad (6)$$

## 2.4 Dispersion Relation

변위  $w$ 를 다음과 같은 파동해의 형태로 가정할 수 있다.

$$w(\alpha, \beta, t) = W \exp(-jk_\alpha A \alpha - jk_\beta B \beta + j\omega t) \quad (7)$$

(7)식을 운동방정식인 (5)식에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$D(k_\alpha^2 + k_\beta^2)^2 = \rho h \omega^2 - K \left( \frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2} + \frac{2\nu}{R_\alpha R_\beta} \right) \quad (8)$$

이 때 wavenumber  $k$ 를  $k^2 = k_\alpha^2 + k_\beta^2$ 로 정의하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$k^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2 - \frac{K}{D} \left( \frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2} + \frac{2\nu}{R_\alpha R_\beta} \right) \quad (9)$$

(9)식으로부터 쉘의 면외진동에 대한 group velocity  $c_g$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2k^3 D}{\omega \rho h} = c_{gl} \left( 1 - \frac{c_{gl}^2}{\omega^2} \left( \frac{1}{R_\alpha^2} + \frac{1}{R_\beta^2} + \frac{2\nu}{R_\alpha R_\beta} \right) \right)^{\frac{3}{4}} \quad (10)$$

여기서  $c_{gl}$ 와  $c_{gt}$ 은 plate의 굽힘파와 종파에 대한 group velocity이며 다음과 같이 표현된다.

$$c_{gl} = 2 \left( \frac{D}{\rho h} \omega^2 \right)^{1/4}, c_{gt} = \sqrt{\frac{K}{\rho h}} \quad (11)$$

(10)식을 보면 주파수가 높거나 곡률반경이 크면 쉘의 group velocity가 plate의 group velocity에 가까워짐을 알 수 있다.

## 2.5 Time-Averaged Energy Density and Intensity

면외진동에 대한 total energy density의 시간 평균한 표현식은 (12)식과 같다.

$$\begin{aligned} \langle E_t \rangle &= \langle P \rangle + \langle T \rangle \\ &= \frac{1}{4} \text{Re} \left\{ K_c \left( \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} + \frac{2\nu}{R_\alpha R_\beta} \right) |w|^2 + D_c \left[ \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right]^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{2D_c(1-\nu)}{A^2 B^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \beta^2} - \left| \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right|^2 \right) + \rho h \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

한편 시간 평균한 intensity의 각 방향 성분은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \langle I_\alpha \rangle &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left\{ D_c \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\nu}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \frac{1}{A} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \alpha \partial t} \right. \\ & \quad \left. + \frac{D_c(1-\nu)}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{1}{B} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \beta \partial t} - D_c \left( \frac{1}{A^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right) \frac{\partial w^*}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \langle I_\beta \rangle &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left\{ D_c \left( \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\nu}{A^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) \frac{1}{B} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \beta \partial t} \right. \\ & \quad \left. + \frac{D_c(1-\nu)}{AB} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{1}{A} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \alpha \partial t} - D_c \left( \frac{1}{B^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \right) \frac{\partial w^*}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (13b)$$

## 2.6 Derivation of Energy Governing Equation

셸 요소의 면외진동에 의한 변위  $w$ 는 다음과 같이 파동해의 형태로 가정할 수 있다.

$$w(\alpha, \beta, t) = \{W_1^- + W_2^+ + W_3^- + W_4^+\} \times \exp(j\omega t) \quad (14)$$

여기서  $W_i^{\pm} \equiv W_i \exp(\pm jk_{\alpha} A \alpha \pm jk_{\beta} B \beta)$  로 정의한다. (14) 식을 (12)식과 (13)식에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\langle \vec{I} \rangle = -\frac{C_{\beta}^2}{\eta\omega} \nabla \langle \vec{E}_I \rangle \quad (15)$$

여기서  $\nabla = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \vec{i}_{\alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \vec{i}_{\beta}$  이다.

한편, 등방성 매질에 대한 에너지 평형식은 구조감쇠가 있는 경우 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\nabla \cdot \langle \vec{I} \rangle + \eta\omega \langle \vec{E}_I \rangle = 0 \quad (16)$$

결국 (15)식을 (16)식에 대입하면 다음과 같이 셸 요소의 면외진동에 대한 에너지지배방정식을 (17)식 또는 (18)식과 같이 얻을 수 있다.

$$-\frac{C_{\beta}^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle \vec{E}_I \rangle + \eta\omega \langle \vec{E}_I \rangle = 0 \quad (17)$$

$$-\frac{C_{\beta}^2}{\eta\omega} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \langle \vec{E}_I \rangle + \eta\omega \langle \vec{E}_I \rangle = 0 \quad (18)$$

### 3. 얇은 셸의 면내진동에 대한 에너지지배방정식 유도

#### 3.1 Strain-Displacement Relations

얇은 셸의 면내진동에 대한 에너지지배방정식은 면내 방향의 하중이 작용할 때 radial motion이 무시할 만큼 작다는 (19)식의 가정 하에 유도한다.

$$w \approx 0 \quad (19)$$

이번에도 (1c-d)식으로 표현된 가정이 유효하다.

(19)식으로 표현된 가정에 의해 얇은 셸 요소의 변위와 변형후의 기울기 각도는 다음과 같이 표현된다.

$$U \approx u, V \approx v, W \approx 0 \quad (20a-c)$$

$$\theta_{\alpha} = \frac{u}{R_{\alpha}}, \theta_{\beta} = \frac{v}{R_{\beta}} \quad (20d-e)$$

한편 midsurface에서의 strain과 곡률 변화를 등은 다음과 같이 변위의 면내 성분으로 표현된다.

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \epsilon_{\beta} = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} \quad (21a-b)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \quad (21c)$$

$$\kappa_{\alpha} = \frac{1}{R_{\alpha} A} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \kappa_{\beta} = \frac{1}{R_{\beta} B} \frac{\partial v}{\partial \beta} \quad (21d-e)$$

$$\tau = 2 \left( \frac{1}{R_{\alpha} B} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_{\beta} A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \quad (21f)$$

이렇게 (21)식을 (12)식에 대입하면 strain energy density를 면내 변위의 식으로 표현할 수 있다.

#### 3.2 Force and Moment Resultants

(21)식을 이용하면 force resultants와 moment resultants를 다음과 같이 면내 변위 성분으로 나타낼 수 있다.

$$N_{\alpha} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \quad (22a)$$

$$N_{\beta} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\nu}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \quad (22b)$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{A} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \quad (22c)$$

$$M_{\alpha} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{R_{\alpha} A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{R_{\beta} B} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \quad (22d)$$

$$M_{\beta} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{R_{\beta} B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\nu}{R_{\alpha} A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \quad (22e)$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left( \frac{1}{R_{\alpha} B} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_{\beta} A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \quad (22f)$$

(22)식을 사용하여 intensity식을 변위로 표현할 수 있고 면내진동에 대한 운동방정식을 얻을 수 있다.

#### 3.3 Equations of Motion

셸의 radial motion을 무시한 경우 면내진동에 대한 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{A} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \beta} + \frac{1}{R_{\alpha} A} \frac{\partial M_{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_{\beta} B} \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \beta} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (23a)$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_{\beta} B} \frac{\partial M_{\beta}}{\partial \beta} + \frac{1}{R_{\alpha} A} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (23b)$$

(23)식에 (22)식을 적용하고  $h^2/(12R^2)$ 을 포함하는 항들을 무시하면 변위의 면내 성분으로 표현된 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (24a)$$

$$\frac{(1+\nu)}{2} \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (24b)$$

#### 3.4 Dispersion Relations

면내진동의 운동방정식에는 두 가지 파동 모드가 존재한다. 이들을 분리해 내기 위해서는 먼저 다음과 같이 변위의 면내 성분을 파동해의 형태로 가정한다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_u \\ C_v \end{Bmatrix} \exp(-jk_{\alpha} A \alpha - ik_{\beta} B \beta + j\omega t) \quad (25)$$

(25)식을 대입한 (24)식을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} k_{\alpha}^2 + \frac{(1-\nu)}{2} k_{\beta}^2 - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \omega^2 & \frac{(1+\nu)}{2} k_{\alpha} k_{\beta} \\ \frac{(1+\nu)}{2} k_{\alpha} k_{\beta} & \frac{(1-\nu)}{2} k_{\alpha}^2 + k_{\beta}^2 - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

위 행렬식에서 계수 행렬의 determinant를 0 으로 두면 다음과 같은 특성 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left\{ k_{\alpha}^2 + \frac{(1-\nu)}{2} k_{\beta}^2 - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \omega^2 \right\} \left\{ \frac{(1-\nu)}{2} k_{\alpha}^2 + k_{\beta}^2 \right\}$$

$$-\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\omega^2 - \frac{(1+\nu)^2}{4}k_\alpha^2 k_\beta^2 = 0 \quad (27)$$

(27)식을 인수분해 하면 다음과 같이 두 가지 파동에 대한 dispersion relation을 얻게 된다.

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho}, \quad \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{E}{2(1+\nu)\rho} \quad (28a-b)$$

(28a)식은 plate의 면내 종파의 dispersion relation과 동일하고 (28b)식은 plate의 전단파의 dispersion relation과 동일하다. 이 두 식으로부터 다음과 같이 각 파동에 대한 group velocity를 얻을 수 있다.

$$c_{gl} = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho}}, \quad c_{gs} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} \quad (29a-b)$$

여기서  $c_{gl}$ ,  $c_{gs}$  는 각각 종파와 전단파의 group velocity들이다.

### 3.4 Time-Averaged Energy Density and Intensity

면내진동의 시간 평균한 total energy density는 다음과 같이 표현된다.

$$\langle E_t \rangle = \frac{1}{4} Re \left\{ K_c \left( \left| \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right|^2 + \left| \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right|^2 + \frac{2\nu}{AB} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v^*}{\partial \beta} \right) + G_c h \left( \left| \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right|^2 + \rho h \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 \right) \right) \right\} \quad (30)$$

시간 평균한 intensity의 각 방향 성분은 (31)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\langle I_\alpha \rangle = -\frac{1}{2} Re \left\{ K_c \left( \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \frac{\partial u^*}{\partial t} + G_c h \left( \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial v^*}{\partial t} \right\} \quad (31a)$$

$$\langle I_\beta \rangle = -\frac{1}{2} Re \left\{ K_c \left( \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\nu}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial v^*}{\partial t} + G_c h \left( \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial u^*}{\partial t} \right\} \quad (31b)$$

### 3.4 Derivation of Energy Governing Equations

(25)식을 (30)식과 (31)식에 대입하면 감쇠가 충분히 작은 경우 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\langle \bar{I} \rangle = -\frac{c_{gl}^2}{\eta\omega} \nabla \cdot \langle \bar{E}_t \rangle \quad (32a)$$

$$\langle \bar{I} \rangle = -\frac{c_{gs}^2}{\eta\omega} \nabla \cdot \langle \bar{E}_t \rangle \quad (32b)$$

(32)식을 (16)식에 대입하면 다음과 같이 쉘 요소의 면내진동에 대한 에너지저배방정식을 (33), (34)식과 같이 얻을 수 있다.

$$-\frac{c_{gl}^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle \bar{E}_t \rangle + \eta\omega \langle \bar{E}_t \rangle = 0 \quad (33a)$$

$$-\frac{c_{gs}^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle \bar{E}_t \rangle + \eta\omega \langle \bar{E}_t \rangle = 0 \quad (33b)$$

$$-\frac{c_{gl}^2}{\eta\omega} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \langle \bar{E}_t \rangle + \eta\omega \langle \bar{E}_t \rangle = 0 \quad (34a)$$

$$-\frac{c_{gs}^2}{\eta\omega} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \langle \bar{E}_t \rangle + \eta\omega \langle \bar{E}_t \rangle = 0 \quad (34b)$$

## 4. Wave Number Diagram

### 4.1 Donnel-Mushtari Equations

얇은 쉘의 경우  $h^2/(12R^2)$ 을 포함하는 항을 무시하면 Donnel-Mushtari equation으로 운동방정식이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta + ABq_\alpha &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha + ABq_\beta &= 0 \\ -\frac{AB}{R_\alpha} - \frac{AB}{R_\beta} N_\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BQ_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AQ_\beta) + ABq_n &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

cylindrical 쉘의 경우는 (36)식과 같으며

$$\begin{aligned} \alpha = s = \frac{x}{R}, \quad \beta = \phi \\ A = R, \quad B = R \\ R_\alpha = \infty, \quad R_\beta = R \end{aligned} \quad (36)$$

spherical 쉘의 경우는 (37)식과 같고

$$\begin{aligned} \alpha = \theta, \quad \beta = \theta \\ A = R, \quad B = R \\ R_\alpha = R, \quad R_\beta = R \end{aligned} \quad (37)$$

doubly-curved 쉘의 경우는 (38)식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \alpha = \theta, \quad \beta = \phi \\ A = R_1, \quad B = R_2 \\ R_\alpha = R_1, \quad R_\beta = R_2 \end{aligned} \quad (38)$$

이 때, strain-displacement relation은 다음과 같다.

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_\alpha} \quad (39a)$$

$$\epsilon_\beta = \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R_\beta} \quad (39b)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) \quad (39c)$$

force resultants와 moment resultants는 다음과 같다.

$$N_\alpha = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} (\epsilon_\alpha + \nu\epsilon_\beta) \quad (40a)$$

$$N_\beta = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} (\epsilon_\beta + \nu\epsilon_\alpha) \quad (40b)$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \epsilon_{\alpha\beta} \quad (40c)$$

$$q_\alpha = -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad q_\beta = -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad q_n = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (40d-f)$$

각 진동변위를 파동해로 가정하고 (40)식을 (35)식에 대입하면 다음과 같이 쉘의 진동변위의 계수로 표현되는 행렬인 Donnel-Mushtari operator를 얻는다.

$$[L_{D-M}] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad (41)$$

여기서,  $L_{11} = -ABk_\alpha^2 - AB\frac{1-\nu}{2}k_\beta^2 + c$

$$L_{12} = -\frac{1+\nu}{2}ABk_\alpha k_\beta, \quad L_{13} = -j(B+\nu A)k_\alpha$$

$$L_{21} = -\frac{1+\nu}{2}ABk_\alpha k_\beta, \quad L_{22} = -ABk_\beta^2 - AB\frac{1-\nu}{2}k_\alpha^2 + c$$

$$L_{23} = -j(A+\nu B)k_\beta, \quad L_{31} = j(B+\nu A)k_\alpha$$

$$L_{32} = j(A+\nu B)k_\beta$$

$$L_{33} = -\frac{B}{A} - \frac{A}{B} - 2\nu\frac{k^2}{12}ABk_\alpha^4 - \frac{k^2}{12}ABk_\alpha^2 k_\beta^2 - \frac{k^2}{12}ABk_\beta^4 - c$$

$$\left(\text{단, } c = \frac{\rho(1-\nu^2)AB}{E} \omega^2\right)$$

이다.

## 4.2 Wave Number Diagram

(41)식의 determinant를 0으로 만드는  $k_\alpha$ 와  $k_\beta$ 를 그래프로 도시하면 wave number diagram을 얻을 수 있다. 이를 면외성분의 변위만 고려했을 경우의 식인 (8)식에서 얻은  $k_\alpha$ 와  $k_\beta$ 를 도시한 wave number diagram을 주파수를 변화시켜가며 비교하면 Fig.2-4와 같은 결과를 얻는다. 주파수가 높아질수록 면의 변위만 고려한 경우와 모든 변위성분을 고려한 경우의 wave number가 서로 거의 일치함을 확인할 수 있으며, 따라서 횡방향 가진의 경우 중고주파 영역에서는 면외변위만 고려해도 된다는 가정을 전제로 한 파워흐름해석법이 유효함을 확인할 수 있다.

## 5. 수치적 적용예

simply supported된 shell 요소의 중앙을 횡방향으로  $F e^{i\omega t}$ 의 힘으로 조화가진 한 경우, 각 경계에서 외부로 흘러나가는 파워는 없다고 가정하면 Fig.1과 같은 shell 요소의 진동을 고려할 수 있다.

이 때, 입력되는 파워는 급수해를 통해 얻은 변위  $w$ 를 이용해서 다음과 같이 유추한 식을 적용하였다.

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ F \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{\text{at exciting point}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ (-i\omega F) w \Big|_{\text{at exciting point}} \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

한편,  $\theta_\alpha$ ,  $\theta_\beta$ 는 각각 shell 요소의 길이  $l$ 에 대응하는  $\alpha$ ,  $\beta$ 방향의 중심각이라 하면, (18)식의 해인 굽힘파의 에너지 밀도는 각각의 shell type에 대해 다음과 같이  $\alpha$ 와  $\beta$ 에 대한 cosine의 이중급수로 표현할 수 있다.

cylindrical shell의 경우는 (43)식과 같으며

$$\langle \bar{E}_i \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} \cos\left(\frac{m\pi R s}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi \phi}{\theta_\alpha}\right) \quad (43)$$

spherical shell의 경우는 (44)식과 같고

$$\langle \bar{E}_i \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} \cos\left(\frac{m\pi \theta}{\theta_\alpha}\right) \cos\left(\frac{n\pi \phi}{\theta_\alpha}\right) \quad (44)$$

doubly-curved shell의 경우는 (45)식과 같이 표현된다.

$$\langle \bar{E}_i \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} \cos\left(\frac{m\pi \theta}{\theta_\alpha}\right) \cos\left(\frac{n\pi \phi}{\theta_\beta}\right) \quad (45)$$

(43-45)식을 (18)식에 대입하면 굽힘파의 에너지 밀도를 얻을 수 있고, 다시 (15)식에 대입하여 굽힘파의 인텐시티를 얻을 수 있다. Fig.5-7은 파워흐름해석법을 통해 예측된 굽힘파의 에너지 밀도와 고전해의 결과를 비교한 그림이다. Fig. 8-10은 주파수를 1000Hz와 2000Hz로 바꾸기며  $\alpha$ 방향과  $\beta$ 방향 각각의 가진점을 지나는 평면으로 각각 자른 경우의 단면부분의 에너지 밀도를 도시한 그림이며 역시 주파수가 높아지거나 곡률이 큰 경우 파워흐름해석법이 정확한 결과를 제시함을 확인할 수 있다.

## 6. 결론

본 논문에서 얇은 쉘에 관한 파워흐름해석법을 수행하여 쉘 요소의 면외진동과 면내진동에 관한 에너지지배방정식을 유도하고 cylindrical, spherical, doubly-curved 쉘의 진동문제에 대해 수치적으로 적용하였다. 파워흐름해석법에 의해 예측된 결과들은 각 방향의 변위를 이중급수로 가정하여 얻은 고전해의 결과와 비교하였으며 그 결과 중고주파 영역에서 얇은 쉘에 관한 파워흐름해석법의 유효성을 확인했다.

## 참고 문헌

- (1) D.J. Nefske, S.H. Sung, 1989, "Power Flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems : Basic Theory and Application to Beams," J. Vib. Acoustics, Stress and Reliability in Design, 111, pp.94-100.
- (2) J.C. Wohlever, R.J. Bernhard, 1992, "Mechanical Energy Flow Models of Rods and Beams", J. Sound Vib., 153(1), pp.1-19.
- (3) L. Cremer, M. Heckl, E.E. Ungar, 1973, Structure-Borne Sound, Springer-Verlag, Berlin.
- (4) O.M. Bouthier, R.J. Bernhard, 1992, "Models of Space-Averaged Energetics of Plates", AIAA J., 30(3), pp.616-623.
- (5) O.M. Bouthier, R.J. Bernhard, 1995, "Simple Models of the Energetics of Transversely Vibrating Plates", J. Sound Vib. 182(1), pp.149-164.
- (6) P.E. Cho, 1993, "Energy Flow Analysis of Coupled Structures", Ph.D. Dissertation, Purdue University.
- (7) 박도현, 1999, "연성된 평판 및 상자형 구조물의 진동파워흐름해석", 공학석사학위논문, 서울대학교.
- (8) Arthur Leissa, 1993, Vibration of Shells, Ohio State University
- (9) S. Timoshenko, 1940, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill.

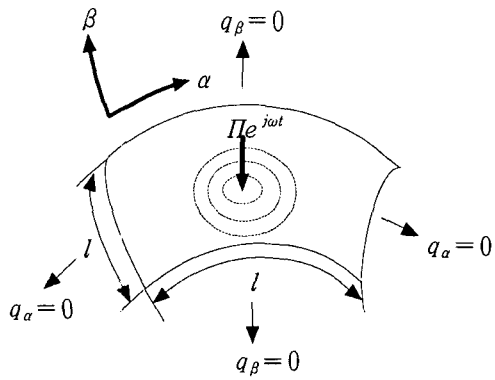


Fig.1 Boundary conditions of thin shell element

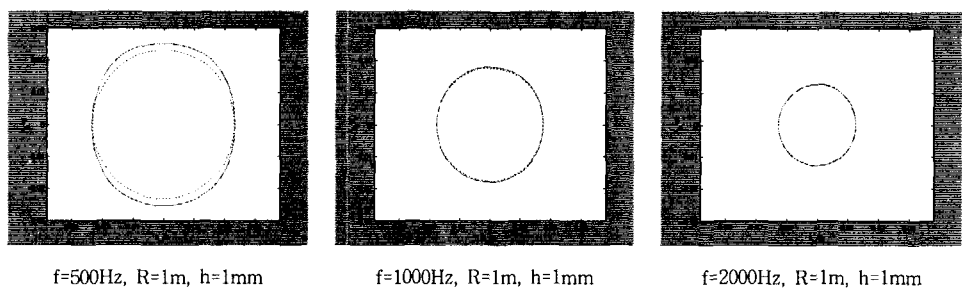


Fig.2 Cylindrical shell( - : PFA, - : classical solution)

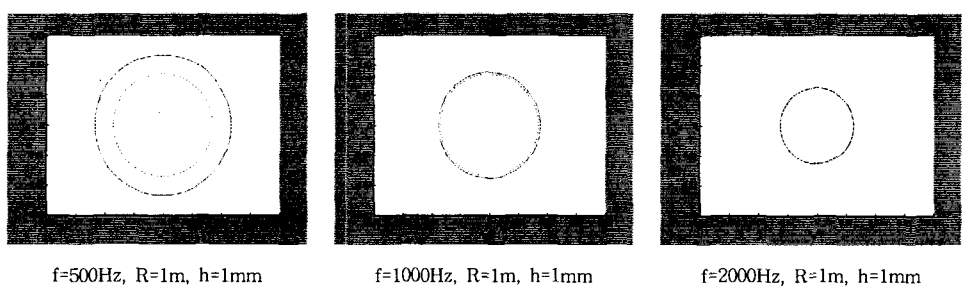


Fig.3 Spherical shell( - : PFA, - : classical solution)

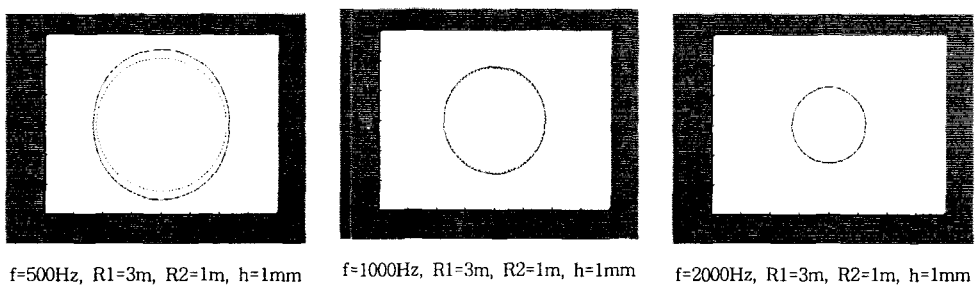


Fig.4 Doubly-curved shell( - : PFA, - : classical solution)

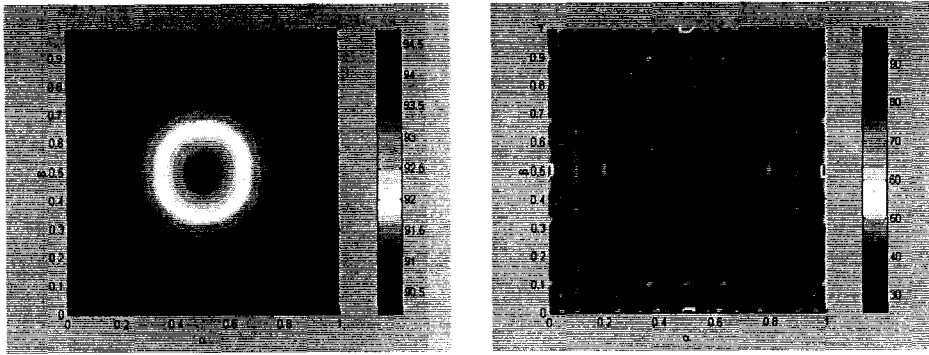


Fig.5 Cylindrical shell ( $f=1000\text{Hz}$ ,  $R=3\text{m}$ ,  $h=1\text{mm}$ ,  $\eta=0.05$ )

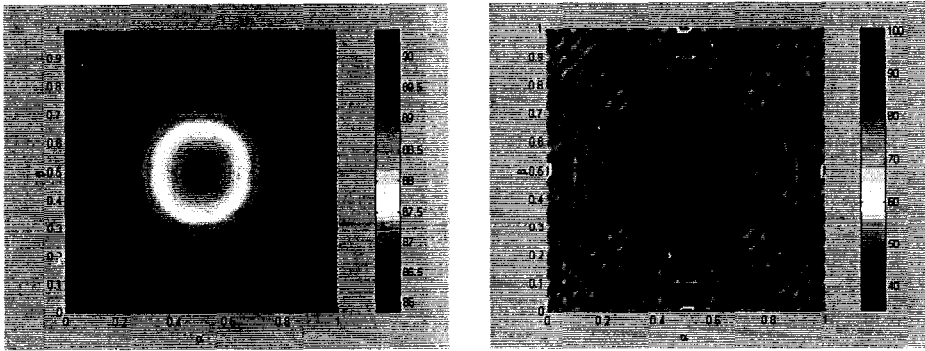


Fig.6 Spherical shell ( $f=1000\text{Hz}$ ,  $R=3\text{m}$ ,  $h=1\text{mm}$ ,  $\eta=0.05$ )

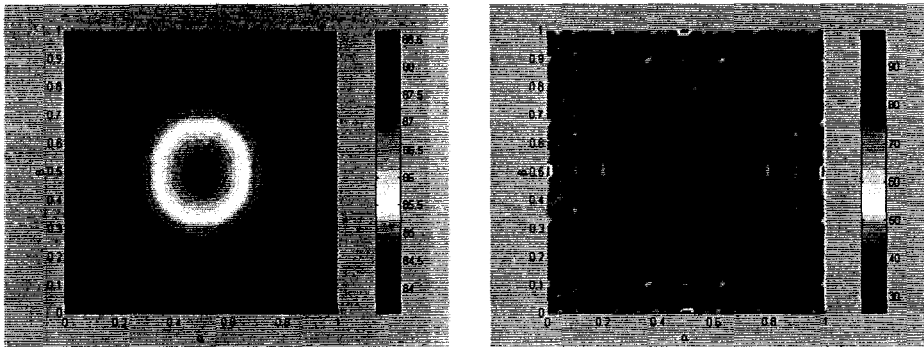
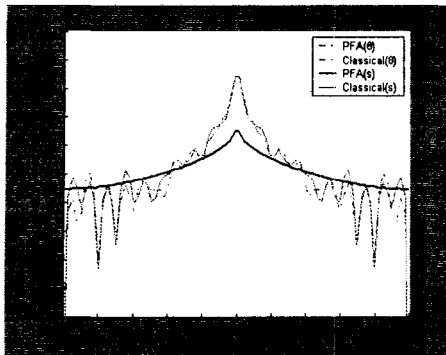
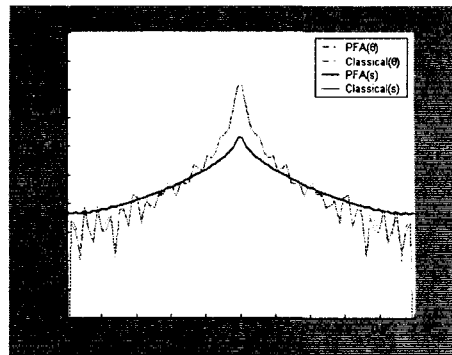


Fig.7 Doubly-curved shell ( $f=1000\text{Hz}$ ,  $R_1=5\text{m}$ ,  $R_2=1\text{m}$ ,  $h=1\text{mm}$ ,  $\eta=0.05$ )

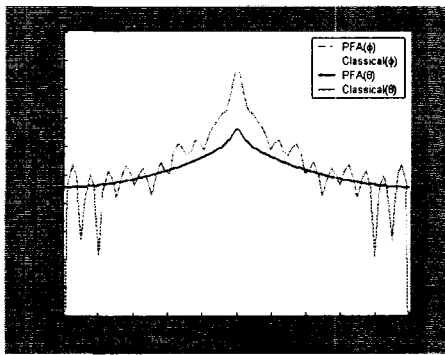


f=1000Hz

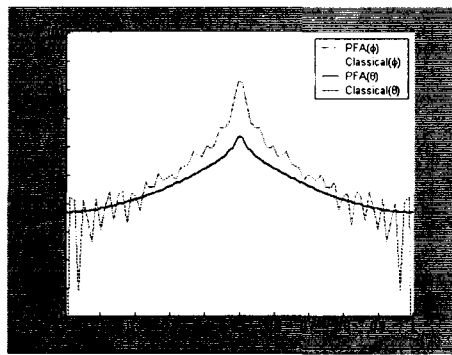


f=2000Hz

Fig.8 Cylindrical shell ( $R=3m$ ,  $h=1mm$ ,  $\eta=0.1$ )

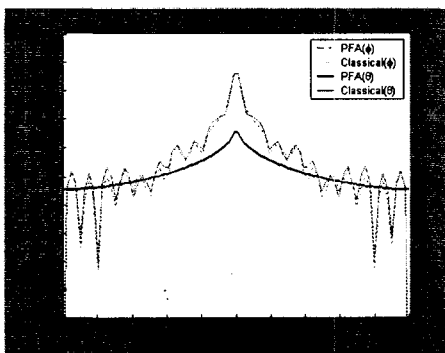


f=1000Hz

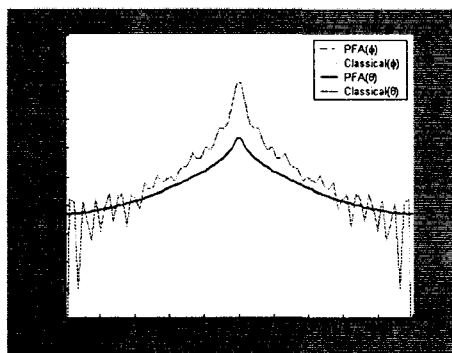


f=2000Hz

Fig.9 Spherical shell ( $R=3m$ ,  $h=1mm$ ,  $\eta=0.1$ )



f=1000Hz



f=2000Hz

Fig.10 Doubly-curved shell ( $R1=5m$ ,  $R2=3m$ ,  $h=1mm$ ,  $\eta=0.1$ )