

미소 비대칭 링의 맥놀이 지도 Beat Maps of a Slightly Asymmetric Ring

김석현[†] · 박석균^{*} · 박기영^{*} · 서백수^{**}

Seock-Hyun Kim, Seock-Gyun Park, Gy-young Park, Baek-Su Suh

Key Words : Slightly asymmetric ring, Impulsive response, Beat phenomenon, Beat map

ABSTRACT

Analytical model of beat response is derived on a slightly asymmetric ring and is verified by experiment. The asymmetric ring is a simplified model used to explain the beat property of a Korean bell. The asymmetric ring has mode pair having slight frequency difference in each radial mode. Each mode pair produces beat phenomenon by the interaction of the two close frequency components. Based on the analytical model, beat maps are first proposed and characteristics of beat on the circumference are detailly explained.

1. 서론

우리 나라의 오랜 문화적 자산인 범종은 크기와 외양의 아름다움만이 아니라 우수한 음향 특성으로 국내외에 널리 알려져 있다. 한국 범종의 중요한 음향 특성으로는 기본음과 고차음의 주파수 성분들이 조화스럽게 어울리고 있는 점과 선명하고 적절한 주기의 맥놀이, 그리고 오래 지속되는 여운을 들 수 있다. 특히, 맥놀이는 소리가 작아졌다가 다시 커지는 과정을 반복함으로써 소리가 마치 살아서 숨을 쉬는 듯한 생명력을 느끼게 한다.⁽¹⁾ 맥놀이를 없애거나 제한된 범위 내에서만 허용하는 서양 종에 비하여^(2,3) 범종에서는 선명하고도 적절한 주기의 맥놀이를 갖도록 설계하고 주조후에는 맥놀이의 교정 작업을 수행한다.⁽⁴⁻⁵⁾ 현재까지 맥놀이는 설계 및 주조 과정에서 질량 및 강성이 원주상에서 비대칭적으로 분포하는 것이 그 원인으로 알려져 있다.⁽⁶⁻⁷⁾ 맥놀이의 특성에 대해서는 주로 실험이나 유한 요소해석에 의한 수치적 방법으로 설명되어졌으며, 그 발생 기전에 대한 이론적

모델을 제시한 연구는 매우 드물다.^(8,9) 실험에 의하면, 맥놀이는 타격 위치에 따라 그 선명도가 다르게 나타난다. 또한, 최근의 측정 결과에 의하면, 맥놀이는 진동체의 표면 위치에 따라서도 그 특성이 다르게 분포하고, 그 결과, 방사되는 음향의 맥놀이도 위치에 따라 다르다는 사실이 보고된 바 있다.⁽¹⁰⁾ 이러한 현상은 매우 흥미 있는 진동-음향 문제이나, 비대칭 셀 구조에 대한 정식화가 어려우므로 아직까지 구체적인 이론적 설명이 이루어지지 못하고 있다. 기존의 연구에 따르면, 미세한 비대칭성이 존재할 때, 링이나 원통셀은 매우 작은 고유진동수의 차이를 갖는 원주모드 쌍을 갖는다.^(11,12) 모드 쌍은 동일한 형태의 진동모드를 보이나, 모드별로 원주상에서 위상차를 갖는다. 이러한 모드쌍이 동시에 가진다면, 고유진동수 쌍이 서로 간섭하여 맥놀이를 발생시킨다.⁽⁹⁾ 본 논문에서는 집중질량을 갖는 비대칭링을 대상으로 그 맥놀이 특성을 이론 및 실험적으로 규명한다. 비대칭링의 충격응답해석을 통하여 맥놀이의 수학적 모델을 제시한다. 이에 근거하여 맥놀이 지도를 작성하고 타격 및 측정 위치에 따라 맥놀이 특성이 어떻게 다른지를 이론적으로 규명한다. 해석 모델을 사용한 맥놀이 지도와 측정데이터에 근거하여 작성한 맥놀이 지도를 비교하여, 맥놀이 해석모델의 신뢰도를 검증한다. 링 모델은 실제 종의 축 상에서의 진동의 변화를 설명하지 못하는 한계

† 책임저자, 정회원 강원대학교 기계메카트로닉스공학부 교수

E-mail : seock@kangwon.ac.kr

Tel : (033) 250-6372, Fax : (033) 257-4190

* 강원대학교 대학원 기계메카트로닉스공학과 석사과정

** 강원대학교 지구환경공학부 교수

는 있으나, 가장 중요한 원주상 비대칭성을 고려할 수 있으므로, 맥놀이 현상을 설명하는데 효과적인 모델이다. 연구결과는 범종의 맥놀이 특성을 이해하기 위한 중요한 단서가 되며, 주조 후에 수행되는 맥놀이의 평가 및 교정 작업에도 유용한 정보를 제공할 것이다.

2. 집중 질량을 갖는 링의 맥놀이 응답 모델

2.1 고유진동모드와 고유진동수

미세한 비대칭성을 갖는 링에 대하여, Allei등은⁽¹¹⁾ 리셉턴스해석법으로 집중질량이나 강성 비대칭성을 갖는 링의 고유진동수와 모드를 해석적으로 구하였다. 홍진선등은^(12,13) 집중 질량이나 국부적인 두께 감소를 갖는 비대칭 링의 고유진동수와 모드를 라플라스 변환법을 사용하여 이론적으로 규명하였다. 이들의 연구에 의하면, 비대칭성이 작을 때, 링의 반경방향의 진동모드는 미세한 차이의 고유진동수를 갖는 모드쌍으로 나타나고, 다음과 같은 형태의 함수로 근사화시킬 수가 있다.

$$U_{nL}(\theta) = \cos n(\theta - \phi) \quad (1)$$

$$U_{nH}(\theta) = \cos n(\theta - \phi - \pi/2n) \quad (2)$$

ϕ 는 비대칭성을 대표하는 집중 질량의 위치를 표시한다. 집중질량이 배에 위치하는 모드 U_{nL} (L모드)의 고유진동수 ω_{nL} 은 질량 부가 효과에 의하여 대칭링의 고유진동수 ω_n 보다 미세하게 작은 값을 갖는다. 반면에, 집중질량 부착 지점이 절점이 되는 U_{nH} (H모드)의 고유진동수 ω_{nH} 는 질량 부가효과를 거의 받지 않으므로 대칭링의 고유진동수 ω_n 와 거의 동일하다. 작은 컷에 의하여 강성이 저하되는 경우도 위와 동일하며, 국부적인 두께 증가에 따른 비대칭의 경우는 강성 부가 효과로 두 모드가 뒤바뀐다.

2.2 맥놀이 응답의 수학적 모델

앞에서 구한 고유진동수와 모드를 사용하여 모드중첩원리(mode superposition principle)를 적용하면 강제 진동응답을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$w(\theta, t) = \sum_n \sum_{\gamma=L,H} \eta_{n\gamma}(t) U_{n\gamma}(\theta) \quad (3)$$

모드기여함수(modal participation factor)는 다음 식으로부터 결정된다.⁽¹⁴⁾

$$\rho h \sum_n \sum_{\gamma=L,H} (\ddot{\eta}_{n\gamma} + \omega_{n\gamma}^2 \eta_{n\gamma}) U_{n\gamma} = q \quad (4)$$

$U_{n\gamma}$ 는 식(1)과 식(2)의 모드쌍을 표시하는데, 집중 질량 위치($\theta = \phi$)를 위상각 영으로 취한다면, 식(1),(2)의 링의 고유진동모드쌍 $U_{n\gamma}$ 은 $\theta = 0$ 위치가

배가 되는 U_{nL} 과 절점이 되는 U_{nH} 로 다음과 같이 구성된다.

$$U_{n\gamma}(\theta) = \cos n(\theta - \phi) \quad (5)$$

여기서, $\phi = 0$ ($\gamma = L$), $\frac{\pi}{2n}$ ($\gamma = H$)

충격응답을 구하기 위하여, 다음과 같이 원주상 한 점($\theta = \theta^*$)에 면적당 충격력을 작용시킨다.

$$q = \left(\frac{\hat{F}}{Rb}\right) \delta(\theta - \theta^*) \delta(t) \quad (6)$$

\hat{F} 는 충격력의 크기를 표시한다. 식(6)을 식(4)에 대입하고, 모드의 직교성을 이용하면 다음과 같이 비연성화된 관계식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{\eta}_{n\gamma} + \omega_{n\gamma}^2 \eta_{n\gamma} = F_{n\gamma}(t) \quad (7)$$

여기서, $F_{n\gamma}(t) = \hat{F} \cos n(\theta^* - \phi) \delta(t)$ (8) 양변을 라플라스 변환시키고 영의 초기조건을 부여하면, 모드별 기여함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\eta_{n\gamma}(t) = \frac{2\hat{F} \cos n(\theta^* - \phi)}{M\omega_{n\gamma}} \sin \omega_{n\gamma} t \quad (9)$$

식(9)을 식(3)에 대입하면 변위응답 및 그 속도 응답을 다음과 같이 결정할 수가 있다.

$$w(\theta, t) = \sum_n \sum_{\gamma=L,H} \frac{2\hat{F} \cos n(\theta^* - \phi)}{M\omega_{n\gamma}} \times \cos n(\theta - \phi) \sin \omega_{n\gamma} t \quad (10)$$

$$\dot{w}(\theta, t) = \sum_n \sum_{\gamma=L,H} \frac{2\hat{F} \cos n(\theta^* - \phi)}{M} \times \cos n(\theta - \phi) \cos \omega_{n\gamma} t \quad (11)$$

또는,

$$\dot{w}(\theta, t) = \sum_n \frac{2\hat{F}}{M} [\cos n\theta^* \cos n\theta \cos 2\pi f_{nL} t + \sin n\theta^* \sin n\theta \cos 2\pi f_{nH} t] \quad (12)$$

가속도 응답은,

$$\ddot{w}(\theta, t) = -\sum_n \frac{4\pi\hat{F}}{M} [f_{nL} \cos n\theta^* \cos n\theta \sin 2\pi f_{nL} t + f_{nH} \sin n\theta^* \sin n\theta \sin 2\pi f_{nH} t] \quad (13)$$

식(12), 식(13)에서 ω_{nL} , ω_{nH} 의 차이는 작으므로, 충격응답에서 L, H-모드쌍은 서로 간섭하여 맥놀이를 발생시키게 된다. 따라서, 식(12)와 식(13)으로부터 고유진동수와 모드쌍 정보만 주어지면, 비대칭링의 맥놀이 응답분포를 구할 수 있다. 본 연구에서는 고유진동수 측정치를 식(13) 적용하여 맥놀이의 분포특성을 맥놀이 측정결과와 비교한다.

3. 링의 진동 모드 및 고유진동수 측정결과

Fig.1과 Table 1은 본 연구에 사용된 링의 제원을 보인다. 집중 질량으로는 17g의 가속도계를 사용하였다. Fig. 2의 충격시험법으로 비대칭링의 고유진동수 및 모드를 결정하였다. 모드변수 추출에는 STAR Modal의 다항곡선피팅법(polynomial curve fitting)을 사용하였다.⁽¹⁵⁾ 고유진동수 측정치를 Table 2에 보인다. 질량 부가효과를 받는 L 모드의 진동수는 초기 대칭링의 진동수에 비하여 약간 감소되는 반면, H 모드는 대칭링의 진동수와 별 차이가 없는 것으로 보아 질량 효과를 거의 받지 않는 것을 알 수가 있다. 진동모드의 측정 결과를 Fig. 3에 보인다. 집중 질량은 4번 지점에 부착되며, 이 지점은 n=2, n=3 모드 모두에서 L모드의 배, H모드의 절점이 된다. 모드쌍의 형태는 식(1),(2)의 이론적 모드쌍에 매우 가깝다. 특히, 원주상에서 L,H 모드의 배와 절점 위치는 이론과 측정결과가 거의 일치하는 것을 확인하였다.

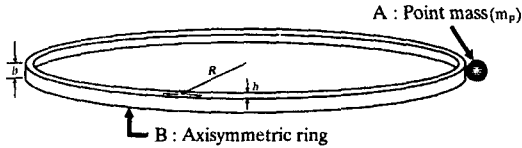


Fig.1 Slightly asymmetric ring with a concentrated mass.

Table 1. Dimensions of the ring specimen.

Young's Modulus (E)	$210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
Density (ρ)	7800 kg/m^3
Poisson's ratio (ν)	0.33
Total weight (M)	2737 g
Weight of point mass (M_p)	17 g
Radius of the ring (R)	196 mm
Thickness of the ring (h)	7 mm
Width of the ring (b)	40 mm

Table 2. Measured frequencies of the ring model.

진동모드 (n)	비대칭링 (Hz)		
	f_n	f_{nL}	f_{nH}
2	112.59	111.86	112.58
3	318.17	316.38	318.24
4	610.02	606.47	609.62
5	985.32	979.00	985.93

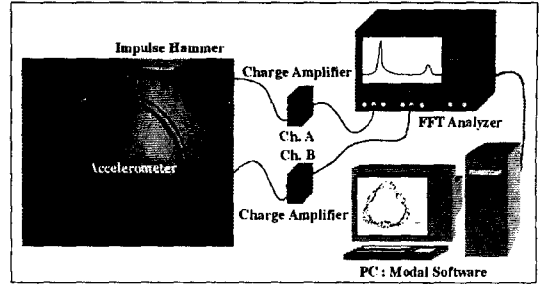


Fig. 2 Experimental set up for modal testing.

4. 비대칭성에 의한 링의 맥놀이 특성

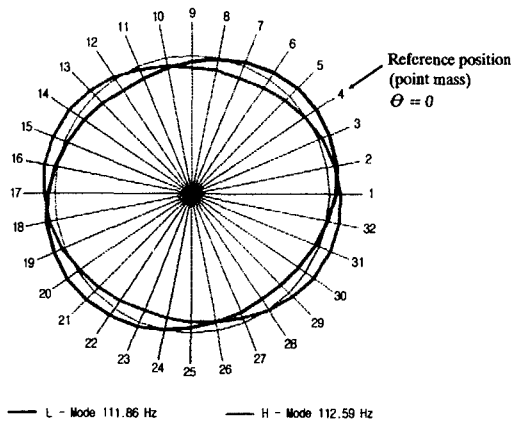
4.1 맥놀이 응답의 해석 및 측정 결과

음향의 맥놀이는 표면의 진동의 맥놀이에 의하여 결정된다. 여기서는 가속도 측정을 감안하여 맥놀이 응답식 (13)을 사용하여 타격과 응답 위치에 따른 맥놀이의 분포특성을 규명한다. 범종의 경우, 맥놀이를 발생시키는 원주모드쌍 중에서도 n=2,3 인 1,2차 굽힘 진동모드가 오래 지속되면서 음향을 지배한다. 특히, n=2 모드가 선명한 맥놀이를 보이면서 오랜 여운을 발생시킬 때, 종소리는 생명력을 느끼게 한다. 여기서는 n=2,3의 모드에 대하여 각각의 맥놀이를 해석모델식(13)에 진동수 측정치를 적용하여 구하고, 맥놀이의 측정결과와 비교한다. 먼저, n=2인 모드쌍의 배의 정중앙에 가까운 Fig.3(a)의 6번 위치($\theta^* = \pi/8$)를 타격하였을 때, 맥놀이 응답을 검토한다. Fig. 4는 주요 응답점에서의 맥놀이 해석 결과이다. 크기는 다음과 같이, n차 항만을 고려하여 정규화시킨 값이다.

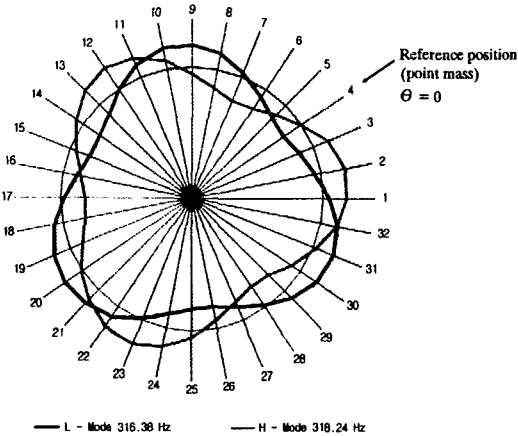
$$\frac{\ddot{w}_n(\theta, t)M}{[4\pi Ff_n]} = \cos n\theta^* \cos n\theta \sin 2\pi f_{nL} t + \sin n\theta^* \sin n\theta \sin 2\pi f_{nH} t \quad (14)$$

n=2 모드쌍의 고유진동수의 차이가 0.72Hz이므로, 맥놀이 주기는 그 역수인 1.39초로 나타난다. 가속도 측정결과를 Fig.5에 보이는데, 2번을 기준신호로 하고, 첫째 맥놀이 진폭을 1로 무차원화시켜 종축의 값을 표시하였다. 위치에 따라 맥놀이의 선명도가 전혀 다르게 나타나는데, 감쇠 효과를 제외하고는 해석 및 측정결과가 매우 잘 맞는다. 2번(또는 6,10,14...) 지점과 같이 응답점이 L, H모드 배의 중앙이 되는 경우에는 매우 선명한 맥놀이가 발생한다. 흥미로운 점은 L, H 모드 배의 중앙을 타격하여도, L, H 모드의 절점 위치인 4번(또는, 8,12,16...) 지점에서는 맥놀이가 발생하지 않는다는 것이다. 또한, 그 중간에는 맥놀이가 불분명한 지점도(3,5,7,9..번.) 주기적으로 분포한

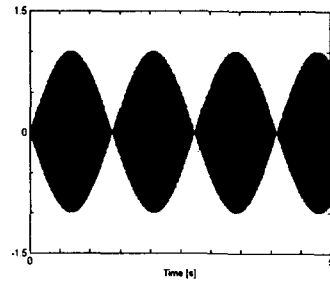
다. 근접 음장에서 듣는 위치에 따라 맥놀이의 선명도가 다른 것이나, 음향의 맥놀이가 들려도 어떤 위치에서는 진동의 맥놀이가 잘 측정되지 않는 것은 이러한 이유 때문이다. 식(13)에서 맥놀이의 분포 특성은 L,H 모드의 배와 절점의 배치 특성에 전적으로기인하므로, L,H 모드쌍과 진동수 데이터만 확보되면 타격조건에 따른 맥놀이 분포특성을 해석모델을 사용하여 보다 구체적으로 파악할 수가 있다.



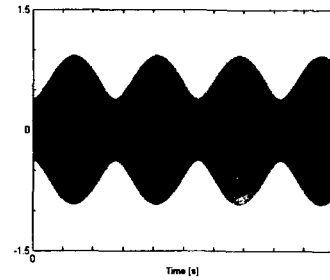
(a) n=2



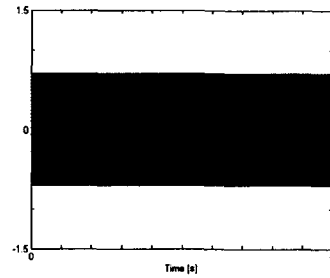
(b) n=3



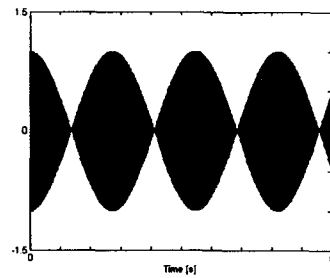
response at node 2



response at node 3



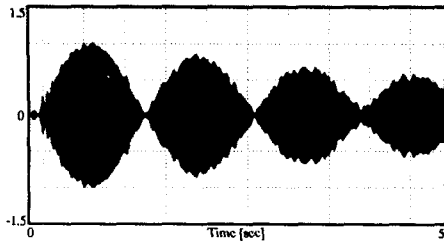
response at node 4



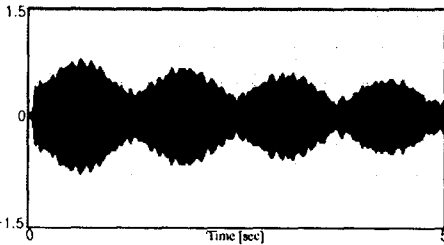
response at node 6

Fig.3 Mode pairs of an asymmetric ring by modal testing. (point mass position : node 4)

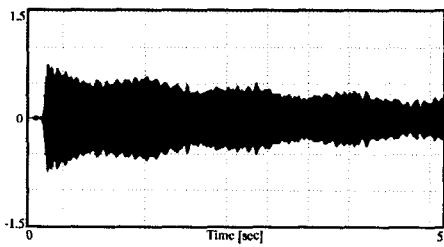
Fig.4 Calculated beats of n=2 mode under impact at node node 6.



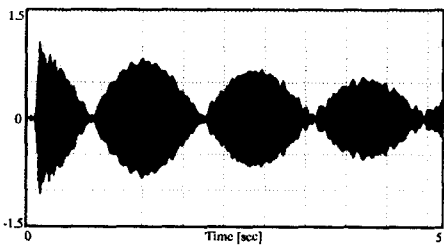
response at node 2



response at node 3



response at node 4



response at node 6

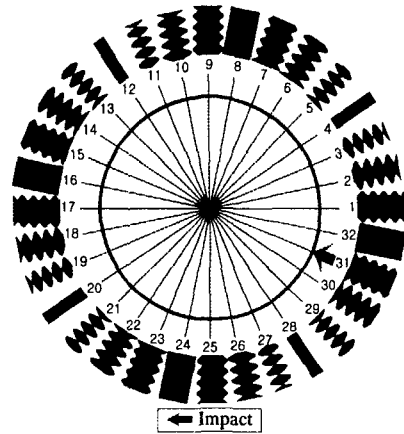
Fig.5 Measured beats of n=2 mode under impact at node 6.

4.2 맥놀이 지도의 작성

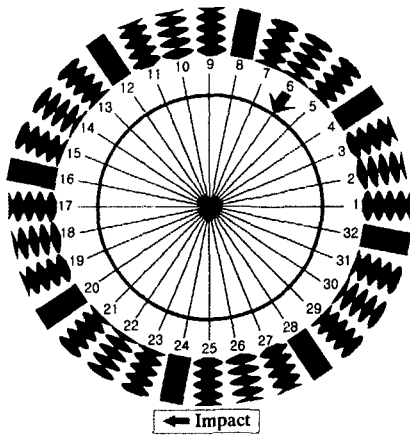
맥놀이의 분포특성은 원주상을 따라 맥놀이 지도를(beat map)를 작성함으로써 보다 명확하게 설명된다. 링의 맥놀이 지도는 타격점이 주어질 때, 모드별로 맥놀이 응답을 원주상을 따라 방사형으

로 그린 그림으로, 맥놀이의 선명도와 크기를 한눈에 파악할 수 있게 한다. 모드별로 맥놀이를 비교하기 위하여, 대역통과 필터를 사용하여 특정 모드쌍의 맥놀이만 측정하여 해석치와 비교하였다. Fig.6은 6번 위치를 타격할 때, n=2 모드의 맥놀이를 원주상 32개 지점에 표시한 맥놀이 지도이다. L,H 모드가 대등하게 응답하는 위치(2,6, 10,14,18, 22,26,30)에서는 대등하게 가진되는 타격위치 조건과 맞물려 가장 선명한 맥놀이를 보인다. 이러한 지점은 $\pi/4$ 의 주기로 반복되는데, n=2 에서 L,H 모드의 배와 절점이 원주상에서 $\pi/4$ 의 주기로 분포하는 것이 그 이유이다. 해석 및 측정 결과는 감쇠효과만 제외하고는 매우 잘 맞는데, 이는 실제의 모드쌍이 이른 모드 식(1),(2)에 거의 일치함을 의미한다. 다음은 31번 지점을 타격하여 H모드를 더 크게 가진시킬 때(Fig.3참조)의 맥놀이 지도를 Fig.7에 보인다. 흥미로운 점은 타격점이 L,H-모드의 정중앙이 아니더라도 선명한 맥놀이가 발생하는 지점(3,5,11,13,19,21,27,29)이 규칙적으로 분포하는데, 그 맥놀이 진폭은 Fig.6에 비해서 현저히 작다. 식(13)에서 L,H 두 주파수성분의 가진항과 응답항의 곱은 동일하나, 둘 다 작은 값을 갖기 때문임을 알 수 있다. 이 경우도 해석과 측정 결과는 감쇠효과만 제외하고는 거의 일치한다. 다음에는 L,H 모드의 한 절점을 타격하는 경우로, Fig.8은 L모드의 절점(H 모드의 배)인 32번($\theta=-\pi/4$) 위치를 타격하였을 때의 맥놀이 응답을 보인다. L모드는 가진되지 않으므로, 원주상 모든 지점은 오직 H모드의 주파수로만 진동한다. 그 결과 맥놀이 없이 H모드의 응답의 크기는 원주상에서 $\pi/4$ 의 주기로 변하고, 진동이 발생되지 않는 지점도 존재한다. 결과적으로 모든 위치에서 맥놀이를 볼 수 없게 되는데, 타격 위치가 적절하지 못할 때 종소리에서 맥놀이를 들을 수 없는 것은 이러한 이유 때문이다. 이러한 원리는 n=3 이후의 고차 모드에도 동일하게 적용된다. Fig.9는 n=3 모드에서 L,H 모드쌍의 배의 정중앙인 32번 위치(Fig.3 b 참조)를 타격할 때, n=3 모드만의 맥놀이 응답이다. 맥놀이는 n=3모드쌍의 주파수 차이 1.86Hz의 역수인 0.538초의 주기를 갖는다. 원주상에서 L,H모드의 절점이 등간격으로 $\pi/6$ 의 주기로 존재하므로, 동일한 주기로 맥놀이가 발생하지 않는 지점이 분포한다. 또한, $\pi/6$ 의 주기로 L,H 모드가 대등하게 응답하는 지점에서 선명한 맥놀이가 발생한다. n차 진

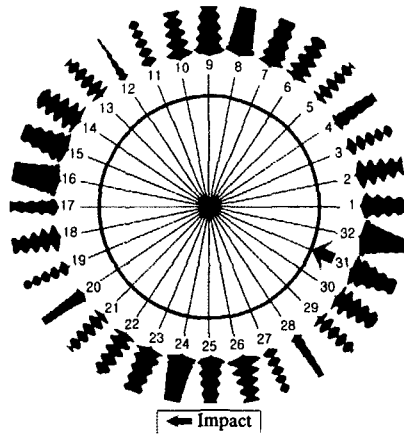
동 모드에서는 $\pi/2n$ 의 주기로 원주상에 선명한 맥놀이 강도가 분포하고, 그 강도는 모드쌍의 배(또는 절점)의 정중앙을 타격할 때 가장 크다는 것을 맥놀이 해석모델로 설명할 수 있으며, 측정으로 확인된다. 범중에서 맥놀이를 지배하는 $n=2$ 와 $n=3$ 모드는 종의 축상에서는 위상의 변화가 없고 하부로 내려오면서 진동의 크기가 증가한다. 또한, 원주상에서의 모드형상은 링과 거의 동일하다. 따라서, 타격지점과 L,H 모드쌍에 관한 데이터만 확보된다면, 링의 맥놀이 지도 작성법으로도 범중의 맥놀이 지도를 그릴 수가 있을 것이다.



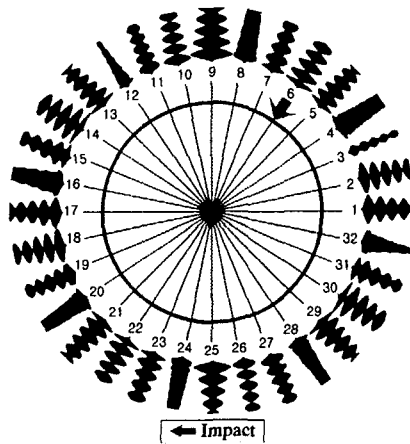
(a) by analysis



(a) by analysis



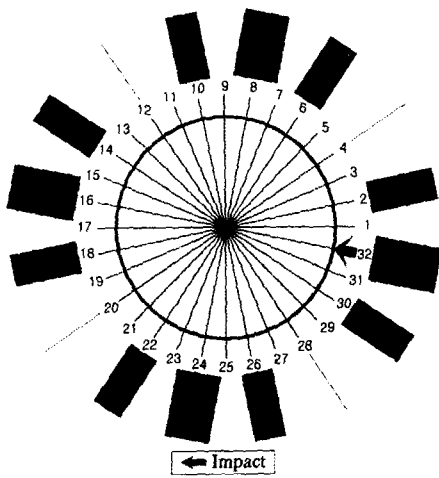
(b) by measurement



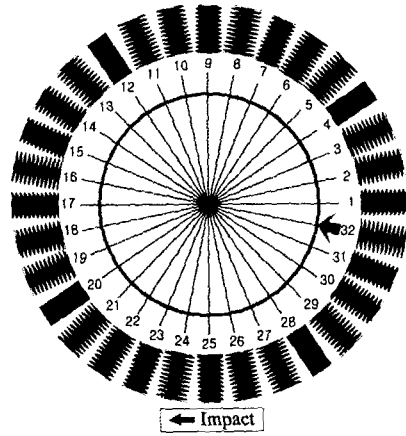
(b) by measurement

Fig.7 Beat maps of $n=2$ mode under the impact at node 31 ($\theta = -5\pi/16$).

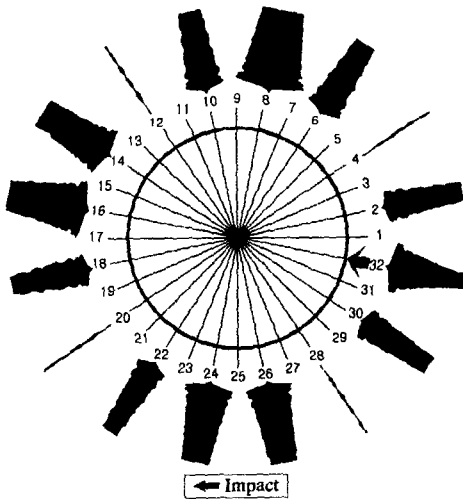
Fig.6 Beat maps of $n=2$ mode under the impact at node 6 ($\theta = \pi/8$).



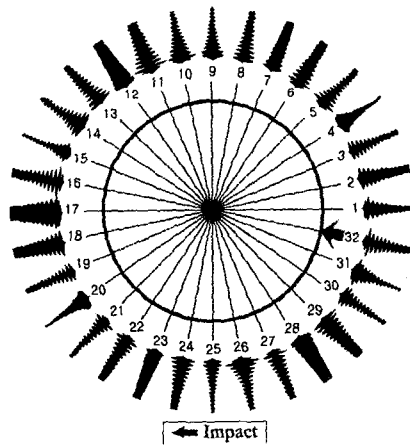
(a) by analysis



(a) by analysis



(b) by measurement



(b) by measurement

Fig.8 Beat maps of n=2 mode under the impact at node 32($\theta = -\pi/4$).

Fig.9 Beat maps of n=3 mode under the impact at node 32

5. 결론

집중질량을 갖는 비대칭 링을 대상으로 맥놀이 응답 해석모델을 제시하고 실험을 수행한 결과 다음의 결론을 얻었다.

1) 집중 질량에 의한 비대칭성은 작은 진동수의 차이를 갖는 L, H-모드쌍을 발생시키고, 모드쌍은 원주상에서 $\pi/2n$ 의 위상 차이를 가진다. 이러한 모드쌍은 서로 간섭하여 맥놀이를 발생시키고, 그 진동수 차이의 역수가 맥놀이의 주기가 된다.

2) L, H 모드쌍의 배의 정중앙을 타격하여 모드쌍을 대등하게 가진할 때, 역시 모드쌍이 대등하게 응답하는 L, H 모드 배의 정중앙에서 선명한 맥놀이가 발생하며, 이러한 위치는 원주상에서 $\pi/2n$ 의 주기로 분포한다. 또한, 정중앙을 타격하지 않더라도 선명한 맥놀이가 발생하는 위치가 존재하나, 그 강도는 정중앙을 타격하는 경우에 비하여 작다.

3) 비대칭 링에서 L,H 모드쌍의 이론모델 및 측정 결과는 거의 일치하였고, 그 결과 해석과 측정에 의한 맥놀이 지도는 거의 동일하게 나타났다. 따라서, 원주상에서 링과 동일한 모드형상을 갖는 범종에서도 L,H 모드쌍의 데이터만 확보된다면, 해석모델을 이용한 맥놀이 지도의 작성이 가능하다.

참 고 문 헌

- (1) 염영하, 1984, "한국종의 연구", 연구논총 84-14, 한국정신문화연구원.
- (2) T. Charnley and R. Perrin, 1978, "Studies with An Eccentric Bell", Journal of Sound and Vibration Vol.58(4), pp.517-525.
- (3) T. D. Rossing, 1987, "Vibration of Bells", Applied Acoustics 20, pp.41-70.
- (4) 염영하 외, 1985, "보신각새종 설계제작에 관한 연구", 서울대학교 공학연구소 연구보고서.

- (5) J.M.Lee, S.H.Kim, S.J.Lee, J.D.Jeong, H.G.Choi, "A Study on the vibration characteristics of a large size Korean bell", Journal of Sound and Vibration, accepted and in press.
- (6) 전성하, 이장무, 염영하, 김석현, 1989, "한국종의 진동 및 음향에 관한 연구", 대한기계학회지 13권 3호, pp.397-403.
- (7) 김양한, 박연규, 김영기, 1997, "성덕대왕 신종의 3차원 진동신호 측정 및 분석 결과", 한국음향학회지, 제 16권, 제 6호, pp.41-47.
- (8) R.Perrin, 1977, "A Group theoretical approach to warble in ornamented bells", Journal of Sound and Vibration, Vol.52, pp.307-313.
- (9) S.H.Kim, W.Soedel and J.M.Lee, 1994, "Analysis of the beating response of bell type structures", Journal of Sound and Vibration, Vol.173(4), pp.517-536.
- (10) 김석현, 2002, "성덕대왕신종의 진동 및 음향 특성 분석", 경주박물관 학술조사보고서, 국립경주박물관.
- (11) D.Allaei, W.Soedel and T.Y.Yang, 1986, "Natural frequencies and modes of rings that deviate from perfect axisymmetry", Journal of Sound and Vibration, Vol.111(1), pp.9-27.
- (12) 홍진선, 김석현, 이장무, 1987, "집중질량을 갖는 원환의 자유진동 해석", 대한기계학회지 제 11권 1호, pp.170-176.
- (13) J.S.Hong and J.M.Lee, 1994, "Vibration of circular rings with local deviation", ASME Transactions Journal of Applied Mechanics, Vol.61(2), pp.317-322.
- (14) W.Soedel, 1993, "Vibration of Shells and Plates", Marcel Dekker.
- (15) STAR System Users Guide, 1983, Spectral Dynamics, Inc.