

유체 맥동을 고려한 압축기 토출 배관의 진동 응답 해석

Vibration Analysis of Discharge Pipe with Fluid Pulsation in a Rotary Compressor

°서영수* · 정의봉**

Young Soo Seo , Weui Bong Jeong

ABSTRACT

Fluid Pulsation in pipe usually cause several forces and these forces make mechanical vibration and noise. Protecting pipe from mechanical vibration is very important problem because vibration make pipe damage and break . To analyze pipe , we must formulate both the fluid pulsation force and vibration of pipe. In this paper fluid force from pulsation is modeled by Fluid Dynamics and solved by FEM(finite element method). The discharge pipe is also modeled by the FEM with use of 6 dof beam model. The acceleration of discharge pipe is estimated by the suggested method in this paper. The comparision of estimated results with experimental results show good agreement, which verified the validation of this method

1. 서 론

2. 유체의 유한 요소법

배관내의 유체 맥동은 배관에 여러 가지 힘을 발생시키고 이 힘에 의해서 배관에 기계적인 진동이나 소음을 유발하게 된다. 이 기계적인 진동에 의하여 배관이 손상되거나 파괴되므로 이를 방지하는 것은 중요한 문제이다.

유체 맥동이 포함된 배관을 해석하기 위해서는 먼저 유체 맥동에 의해서 배관에 발생하는 힘과 유체와 배관의 관계를 규명하여야한다.

본 논문에서는 유체 맥동이 배관의 형상에 의해서 여러 가지 힘을 발생시키고 이 발생된 힘이 배관의 기계적인 진동에 영향을 미친다고 생각하였다. 그래서 배관 내의 유체를 1자유도를 갖는 유체로 모델링하여 유체 맥동에 의한 힘을 해석하였고 배관은 6자유도를 갖는 beam으로 모델링하여 역시 유한 요소법을 사용하여 해석하였다. 그리고 해석 결과와 실제 에어컨의 압축기 모델 배관을 실험한 결과와 비교를 통하여 해석의 타당성을 검증하였다.

2.1 배관 내의 유체의 기본 방정식

유체의 기본 방정식은 운동 방정식과 연속 방정식으로 이를 벡터형식으로 나타내면 다음 식과 같다.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \vec{g} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2)$$

여기서,

\vec{V} : 유체의 속도 [m/s]

ρ : 유체의 밀도 [kg/m³]

p : 압력 [N/m²]

일반적인 경우로 배관은 길이에 비해서 단면적이 작으므로 1차원 흐름이고 유체의 질량에 의한 효과와 대류항을 무시하고 유체의 속도 대신에 유량을 사용한다. 임의의 강제 유량이 주어진다고 하면 식 (1)과 (2)는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\rho}{A} \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (3)$$

* 부산대학교 대학원 기계설계공학과

** 정희원, 부산대학교 기계공학부

$$\frac{A}{K} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + Q(x, t) \quad (4)$$

여기서,

q : 유량 [m^3/s]

A : 파이프의 단면적 [m^2]

K : 유체의 체적탄성계수 [Kg/ms^2]

Q : 강제 유량 [$m^3/s/m$]

Q 는 분포하고 있는 것으로 되어 있지만 경우에 따라서는 어느 한 점 x_i 에 집중되어 있을 경우에는 $\delta(x-x_i)$ 를 사용한다.

2.2 배관 요소의 기초 방정식

배관 내의 유량과 압력을 다음 식과 같이 가정하였다.

$$q = N_i q_i + N_j q_j \quad (5)$$

$$p = N_i p_i + N_j p_j \quad (6)$$

여기서 $N_i, N_j, \dot{N}_i, \dot{N}_j$ 는 형상함수이다.

p 와 q 의 차수가 같을 경우에는 참값에 수렴하지 않으므로 p 의 차수를 q 의 차수보다 한 차수 낮게 가정을 한다.

가중함수 q^*, p^* 의 경우도 위의 형상함수와 같은 식으로 하여서 식 (3)과(4)에 대입하면 아래와 같다.

$$\int_0^{l_e} q^* \left(-\frac{\rho}{A} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (7)$$

$$\int_0^{l_e} p^* \left(\frac{A}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - Q(x, t) \right) dx = 0 \quad (8)$$

여기서 l_e 는 요소의 길이이다.

식(7)과 식(8)을 정리하면 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$[A]_e \{ \dot{q} \}_e + [B]_e \{ p \}_e = \{ 0 \}_e \quad (9)$$

$$[C]_e \{ \dot{p} \}_e + [D]_e \{ q \}_e = \{ H \}_e \quad (10)$$

단,

$$\{ q \}_e = (q_i, q_j)^T, \quad \{ p \}_e = (p_i, p_j)^T$$

$$[A]_e = \frac{\rho}{A} \begin{bmatrix} \int N_i N_i dx & \int N_i N_j dx \\ \int N_j N_i dx & \int N_j N_j dx \end{bmatrix}$$

$$[B]_e = \begin{bmatrix} \int N_i \frac{\partial N_i}{\partial x} dx & \int N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \\ \int N_j \frac{\partial N_i}{\partial x} dx & \int N_j \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \end{bmatrix}$$

$$[C]_e = \frac{A}{K} \begin{bmatrix} \int \frac{\partial \dot{N}_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dx & \int \frac{\partial \dot{N}_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \\ \int \frac{\partial \dot{N}_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dx & \int \frac{\partial \dot{N}_j}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \end{bmatrix}$$

$$[D]_e = \begin{bmatrix} \int \frac{\partial \dot{N}_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dx & \int \frac{\partial \dot{N}_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \\ \int \frac{\partial \dot{N}_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dx & \int \frac{\partial \dot{N}_j}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx \end{bmatrix}$$

$$\{ H \}_e = \begin{bmatrix} \int \frac{\partial \dot{N}_i}{\partial x} Q dx \\ \int \frac{\partial \dot{N}_j}{\partial x} Q dx \end{bmatrix}$$

위의 식은 각 요소에 성립하고 이를 요소 전체에 걸쳐서 서로 더하면 배관 내 전체 유체에 대한 기초 방정식이 얻어진다.

2.3 배관 내 전체의 기초 방정식

배관을 n 개의 요소로 분할하고 각 절점의 유량과 압력을 $q_i, p_i (i=1, \dots, n)$ 라고 하면 각각의 요소를 전부 더하면 전체 배관의 대한 기초 방정식을 유도할 수 있다.

$$[A]_G \{ \dot{q} \}_G + [B]_G \{ p \}_G = \{ 0 \} \quad (11)$$

$$[C]_G \{ \dot{p} \}_G + [D]_G \{ q \}_G = \{ H \}_G \quad (12)$$

경계조건으로 유량이 가해지는 절점을 각각의 전체 행렬에서 행과 열을 삭제한다. 그리고 난 후 두 방정식을 연립해서 풀면 각 절점에서의 압력과 유량을 구할 수 있다.

3. 유량과 유체 가진력

3.1 유량

Fig.1에서 냉매가 $\psi = 0$ 에서부터 단열과정으로 압축될 때, $p(\psi)$ 는 다음과 같다.

$$p(\psi) = \begin{cases} p_s \left(\frac{V_s}{V(\psi)} \right)^\gamma & p(\psi) < p_d \\ p_d & p(\psi) \geq p_d \end{cases} \quad (13)$$

여기서,

γ : specific heat ratio

p_d : discharge pressure

p_s : suction pressure

$V_s = V(0)$

이다. $p(\psi)$ 와 p_d 가 같아질 때부터 토출이 시작

되어 지고 이때의 각도가 토출 각 ψ_d 이다.

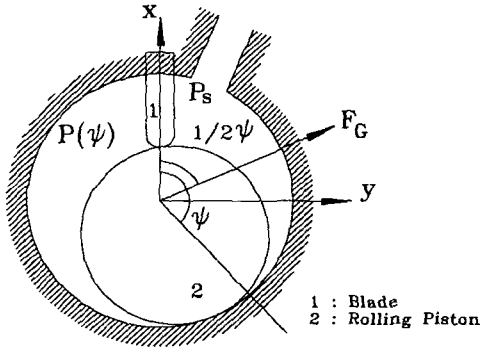


Fig.1 Cylinder in a Compressor

실린더 내의 체적 $V(\psi)$ 는 다음과 같다.

$$V(\psi) = \frac{1}{2} h_c R_c^2 f(\psi) \quad (14)$$

여기서,

$$f(\psi) = (1-a^2)\varphi - \frac{1}{2}(1-a)^2 \sin(2\varphi) - a^2 \sin^{-1}\left\{\left(\frac{1}{a}-1\right)\sin\varphi\right\} - a(1-a)\sin\varphi \sqrt{1 - \left\{\left(\frac{1}{a}-1\right)\sin\varphi\right\}^2}$$

$$a = \frac{R_r}{R_c}$$

h_c : 실린더의 높이

R_c : 실린더의 안쪽 반지름

R_r : Rotor의 반지름

이다. 그러므로 유량은 다음 식과 같이 구해진다.

$$Q = -\frac{dV(\psi)}{dt} = \begin{cases} 0 & \psi < \psi_d \\ -\frac{dV(\psi)}{d\psi} \times \frac{d\psi}{dt} & \psi \geq \psi_d \end{cases} \quad (15)$$

유량 Q 는 토출 각 ψ_d 이 되기 전에는 0이고 ψ_d 를 넘어서면서 식 (15)의 유량으로 토출이 시작된다.

3.2 유체 가진력

유체의 선형 운동량 방정식에서 1차원 흐름이라고 가정하고 유속 대신에 유량으로 표현하고 중력과 마찰의 효과를 무시하면 다음 식과 같다.

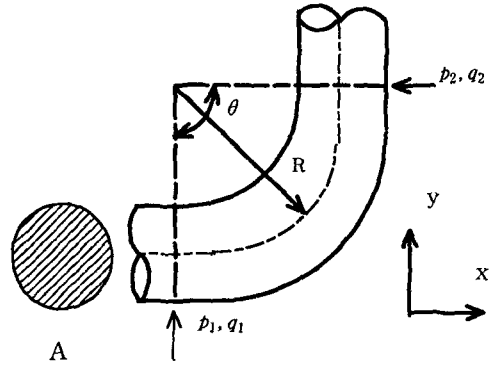


Fig.2 Curved Pipe Element

$$\begin{aligned} F &= F_{pressure} \\ &= -\oint_{A_w} p n dA \\ &= \frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho \frac{q}{A} dV + \oint_{A_w} \rho \frac{q}{A} \left(\frac{q}{A} \cdot n\right) dA \end{aligned} \quad (16)$$

배관 요소의 전체 표면적 A 는 유체의 출입구 면적 A_1 과 배관 경계 면적 A_0 의 합이므로 압력에 의한 유체의 힘의 다음과 같다.

$$F_{pressure} = -\int p n dA_0 - \int p n dA_1 \quad (17)$$

따라서 배관의 경계 면을 따라서 작용하는 유체의 힘은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} F_{fluid} &= -\int p n dA_0 \\ &= \int p n dA_1 + \frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho \frac{q}{A} dV \\ &\quad + \oint_{A_w} \rho \frac{q}{A} \left(\frac{q}{A} \cdot n\right) dA \end{aligned} \quad (18)$$

예를 들어서 Fig.2에 나타나는 곡관의 요소에 식 (18)을 적용한다. 먼저 압력, 유량 그리고 단면적을 아래와 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 = q(\omega) e^{j\omega t} + q_0 \\ p_1 &= p_2 = p(\omega) e^{j\omega t} + p_0 \\ A_1 &= A_2 = A \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 p_0, q_0 는 압력 및 유량의 정상상태 성분을 나타낸다.

p, q 를 식 (18)에 대입하여 정리하면 아래와 같이 유체가 배관에 가하는 변동 성분의 힘을 얻을 수 있다.

$$F_1 = A p(\omega) e^{j\omega t}$$

$$F_2 = -j\omega \rho R q(\omega) e^{j\omega t} \quad (20)$$

$$F_3 = -\frac{\rho}{A} (2q_0 q(\omega) e^{j\omega t} + q^2(\omega) e^{2j\omega t})$$

따라서 유체력 F 의 x, y 방향 성분으로 분해하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$F_x = (F_1 + F_3)(1 - \cos \theta) + F_2 \sin \theta \quad (21)$$

$$F_y = -(F_1 + F_3) \sin \theta + F_2(1 - \cos \theta)$$

4. 배관의 유한 요소법

배관은 6자유도 Beam으로 해석을 하였다. 배관요소의 운동에너지와 위치에너지는 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \int_e \rho A (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx + \frac{1}{2} \int_e \rho I_x \dot{\theta}_x^2 dx$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_e \{ EI_x (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + EI_y (\frac{\partial w}{\partial x})^2 \} dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_e GJ (\frac{\partial \theta_x}{\partial x})^2 dx + \frac{1}{2} \int_e EA (\frac{\partial u}{\partial x})^2 dx \quad (23)$$

여기서,

ρ : 배관의 밀도

E : 배관의 탄성계수

G : 배관의 전단탄성계수

이다. 그리고 변위를 형상함수를 이용하여 다음과 같이 가정한다.

$$u = [N_u] \{u\}_e \quad v = [N_v] \{v\}_e$$

$$w = [N_w] \{w\}_e \quad \theta_x = [N_x] \{\theta_x\}_e \quad (24)$$

식 (24)를 식 (22)와 식(23)에 대입하면 $[m]_e$ 와 $[K]_e$ 를 유도할 수 있고, 이를 전체 Beam요소에 대하여 중첩을 하면 전체 배관의 운동 방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

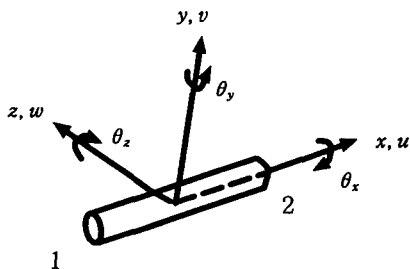


Fig.3 Beam Element

$$[M] \{\dot{X}\} + [K] \{X\} = \{F_{fluid}\} + \{F_{mech}\} \quad (25)$$

단,

$\{F_{fluid}\}$: 유체 맥동에 의해서 발생하는 힘

$\{F_{mech}\}$: 압축기 기계부에서 발생하는 힘

압축기에서 발생하는 힘⁽⁶⁾은 무게 중심에서 나타나므로 이를 다음과 같은 좌표변환을 이용하여 배관의 입구에 작용하도록 하였다.

$$\{F_{comp}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -z_G + z_{in} & y_G - y_{in} \\ z_G - z_{in} & 0 & -x_G + x_{in} \\ -y_G + y_{in} & x_G - x_{in} & 0 \end{bmatrix} \{F_G\} \quad (26)$$

여기서,

(x_G, y_G, z_G) : 압축기 무게중심의 좌표

(x_{in}, y_{in}, z_{in}) : 배관의 입구 좌표

이다. 식 (25)를 고유치 해석하여 고유 진동수 $\omega_r (r=1 \sim n)$ 와 고유모드 $\{\phi\}_r (r=1 \sim n)$ 를 구하면 모드 중첩법을 이용하여 주파수에 따른 응답 스펙트럼을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{X\} = \sum_{r=1}^n \frac{\{\phi\}_r^T \{F\} \{\phi\}_r}{(\omega_r^2 - \omega^2)} \quad (27)$$

단,

$$\{X\} = \{x \ y \ z \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z\}^T$$

5. 해석 결과의 검증

실제 에어컨 압축기 토출 배관을 이용하여 해석 결과와 실험결과를 비교하여 해석 방법의 타당성

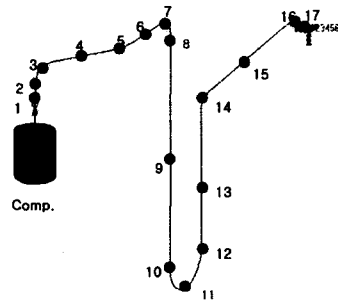


Fig.4 Pipe Model

을 검증하였다. 사용되어진 배관과 해석 및 실험 시 측정 점은 Fig.4와 같다.

5.1 실험

실험은 에어컨을 가동한 후 정상상태에 도달한 후에 가속도를 측정하였다. 모터 회전 주파수인 57Hz에서 토출 배관의 각 측정 점의 가속도를 Fig.5에 나타내었다. 실험 모델에서 구부러진 부분의 위치는 3,7,11,14,16번이고 이 부분에서 가속도가 크게 나타나고 있다. 이는 유체 맥동에 의한 힘과 압축기 기계부의 힘이 서로 영향을 미쳐서 나타난다고 볼 수 있다.

5.2 해석

해석을 위해서 압축기에 발생하는 유량을 Fig. 6에 나타내었다. 유량은 토출 각을 지나면서 토출이 됨을 알 수 있다. 이를 배관의 입구에 가진 하였다. 또한 압축기의 무게 중심에서 발생하는 힘을 Fig.7에 나타내었고 이를 좌표변환을 이용하여 배관의 입구에 가진 하였다. 측정 점 7에서의 가속도를 보면 Fig.8과 같다.

Fig.9는 유체 맥동에 의해서 발생하는 힘만이 배관을 가진 했을 경우 배관의 가속도 분포를 나타내고 Fig.10은 압축기의 가진력만에 의한 가속도 분포를 나타내고 있다. 유체 맥동에 의한 가속도는 배관의 구부러지는 점에서 크게 나타나고 있고 압축기의 가진에 의한 배관의 가속도는 배관의 입구에서 크게 나타나고 있다. Fig.11은 두 가진력을 합한 가속도 분포를 나타내고있는데 3,7,11 점에서 가속도가 크게 나타나는데 이는 Fig.5에 나타난 실험의 경향과 잘 일치한다.

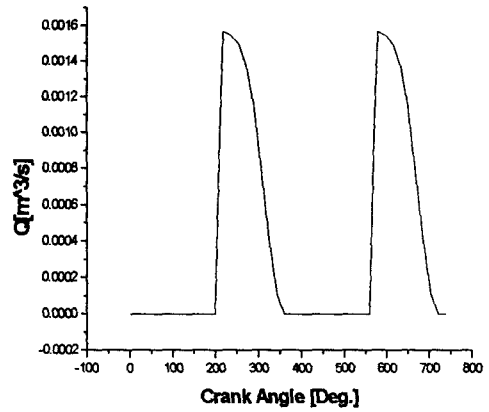


Fig.6 Flow Rate Discharged form Valve

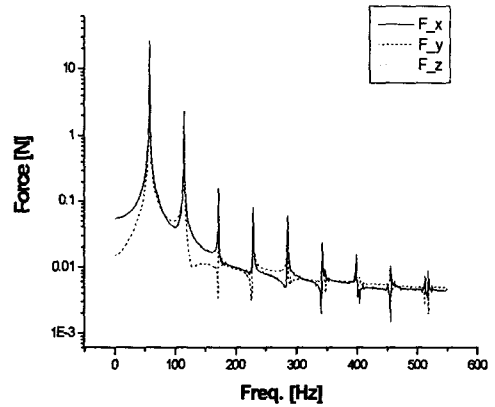


Fig.7 Force Generated by Mechanical Parts of Compressor

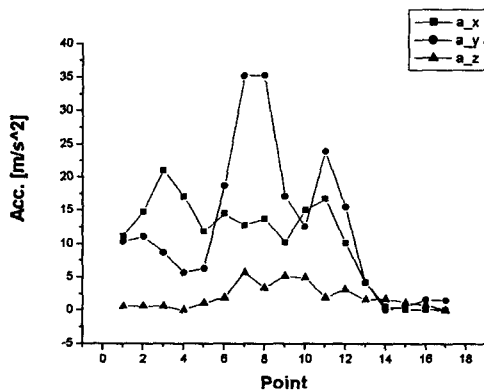


Fig.5 Acceleration of Discharge Pipe Measured at 57Hz

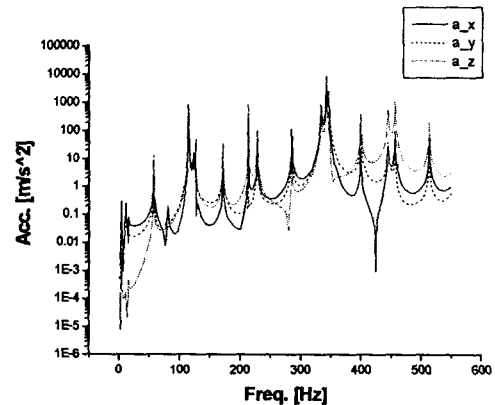


Fig.8 Acceleration at Point 7 of Discharge Pipe

6. 결 론

배관 내의 유체 맥동에 의해서 발생하는 힘을 정식화하고 이 힘을 배관에 적용하여 유한 요소법을 이용하여 배관의 진동응답을 해석하였다. 실제 압축기 배관에 적용한 결과와 실험결과의 경향이 서로 잘 일치하므로 실제 압축기 배관을 설계할 때 유용하게 사용될 것이라 생각된다.

참고 문헌

- (1) 부정숙의 譯, 유체역학, 2판, 반도출판사, 1996.
- (2) 김남형 譯, 유한요소법 유체해석, 원창출판사, 1995.
- (3) 田中守外 1名, “管内流体脈動による配管振動に関する研究(第1報 流体強制力による配管の横振動)”, 日本機械學會論文集 C編 53권 487호, 1987.
- (4) Maia, Silva, Theoretical and Experimental Modal Analysis, Research Studies Press LTD., 1998.
- (5) Maurice Petyt, Introduction to finite element vibration analysis, Cambridge University Press, 1990.
- (6) 황선웅, 정의봉, 안세진, 김정훈, “전동기 연성을 고려한 롤링피스톤형 압축기의 진동해석”, 소음진동학회 춘계학술대회 발표논문, 2002.

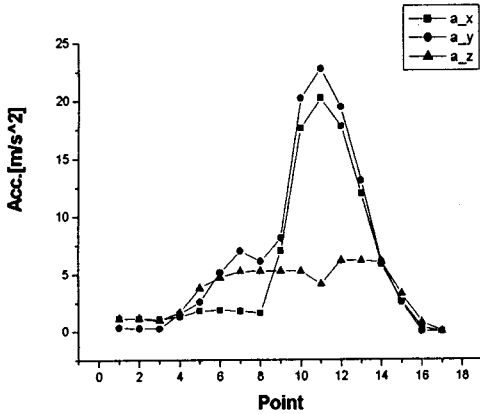


Fig.9 Acceleration of Discharge Pipe by Fluid Force

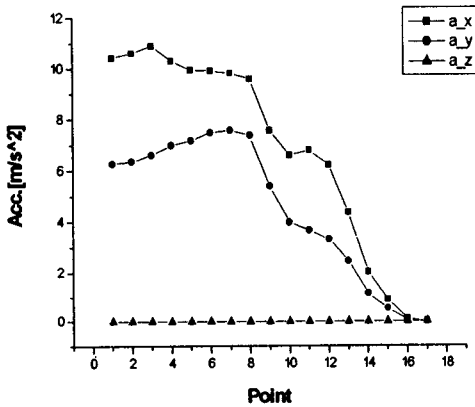


Fig.10 Acceleration of Discharge Pipe by Mechanical Force

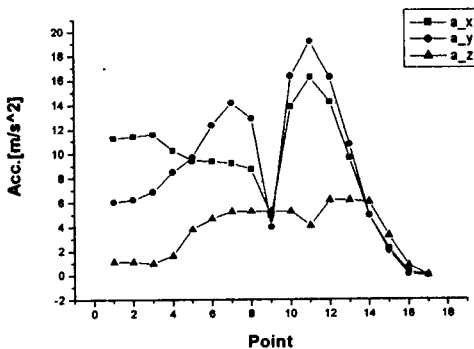


Fig.11 Acceleration of Discharge Pipe by Fluid and Mechanical Force